

Merkitsemme koulumatematiikasta tuttua vektoria

$\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ sarake matriisilla

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^T$$

Merkintätavan muutos helpottaa jatkossa siirtymistä useamman kuin kahden koordinaatin vektoreihin.

Yhteenlasku ja reaalityyppillä kertominen ovat nyt helposti määriteltävissä.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Yleistämme \mathbb{R}^2 :ssa niin luonnolliset yhteenlasku- ja reaaliluvulla kertomissäännöt \mathbb{R}^n :ään seuraavasti. Olkoot

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \text{ja} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow c_j = a_j + b_j, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\mu \mathbf{a} = \mathbf{c} \Leftrightarrow c_j = \mu a_j, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Sovitaan vielä merkinnöistä

$$0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$$

$$1 = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$$

$$\mathbf{e}_k = (\delta_{1k} \ \delta_{2k} \ \dots \ \delta_{nk})^T$$

missä $\delta_{kk} = 1$, ja $\delta_{jk} = 0$, kun $j \neq k$

Esimerkiksi \mathbb{R}^3 :ssa

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Kertaa matriisikertolasku niin, että pystyt näkemään seuraavien ehtojen yhdenpitävyys:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kahden vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ sisätulo $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ ja vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ normi $\|\mathbf{a}\|$ määritellään seuraavasti

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sisätulo on siis lukiosta tuttu pistetulo ja normi on vektorin pituus.

Nyt yleistämme seuraavasti.

Määritelmä Kahden vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sisätulo $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ ja vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ normi $\|\mathbf{a}\|$ ovat

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Sisätulon arvo on reaaliluku, joten sisätulo ei ole vektoreiden välinen laskutoimitus.

(Siksi vältämme nyt pistetulomerkinä.)

Kahden vektorin sanotaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan eli **ortogonaaliset** (merkitään $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) jos niiden sisätulo on nolla, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = 0$.

Normi on mitta vektorin suuruudelle. Kaksi vektoria ovat **lähellä toisiaan**, jos niiden erotuksen normi on pieni

Olkoon $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ N :stä havaintoarvosta muodostuva havaintovektori (aikasarja). Havaintosarjan keskiarvo on

$$\mu_a = (a_1 + a_2 + \dots + a_N)/N = N^{-1} \langle \mathbf{a} | \mathbf{1} \rangle \quad (1)$$

Havaintojen poikkeama keskiarvosta (vaihtelu) saadaan vähentämällä keskiarvo jokaisesta havainnosta

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_1 - \mu_a, a_2 - \mu_a, \dots, a_N - \mu_a)^T = \mathbf{a} - \mu_a \mathbf{1} \quad (2)$$

Vaihtelun suuruutta on tapana mitata varianssilla s_a^2 , joka on

$$\begin{aligned} s_a^2 &= \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}\|^2}{N-1} = (N-1)^{-1} \langle \mathbf{a} - \mu_a \mathbf{1} | \mathbf{a} - \mu_a \mathbf{1} \rangle \\ &= (N-1)^{-1} (\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle - \mu_a \langle \mathbf{a} | \mathbf{1} \rangle - \mu_a \langle \mathbf{1} | \mathbf{a} \rangle + \mu_a^2 \langle \mathbf{1} | \mathbf{1} \rangle) \\ &= \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{a} - N \mu_a^2}{N-1} \quad (\in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (3)$$

Olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ toinen aikasarja ja μ_b sen keskiarvo ja $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$ sen poikkeama keskiarvosta. Jos kummankin aikasarjan poikkeamat keskiarvosta noudattavat yhteistä rytmiä, niin tulo $\tilde{a}_j \tilde{b}_j$ on useimmiten positiivinen. Silloin $\langle \tilde{\mathbf{a}} | \tilde{\mathbf{b}} \rangle = \sum \tilde{a}_j \tilde{b}_j$ on positiivinen. Tätä yhteisvaihtelua on tapana mitata kovarianssilla

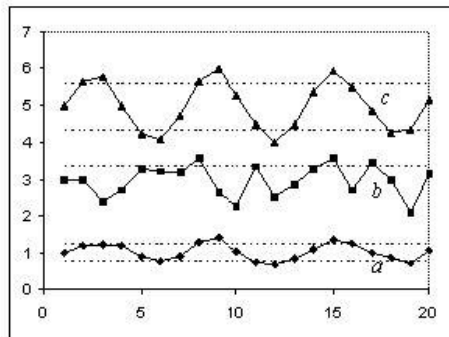
$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\langle \tilde{\mathbf{a}} | \tilde{\mathbf{b}} \rangle}{N-1} = (N-1)^{-1} \langle \mathbf{a} - \mu_a \mathbf{1} | \mathbf{b} - \mu_b \mathbf{1} \rangle \\
 &= (N-1)^{-1} (\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle - \mu_b \langle \mathbf{a} | \mathbf{1} \rangle - \mu_a \langle \mathbf{1} | \mathbf{b} \rangle + \mu_a \mu_b \langle \mathbf{1} | \mathbf{1} \rangle) \\
 &= \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b} - N \mu_a \mu_b}{N-1} \tag{4}
 \end{aligned}$$

Kahden aikasarjan välinen korrelaatio r_{ab} määritellään lausekkeella

$$\begin{aligned} r_{ab} &= \frac{\text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{s_a s_b} = \frac{\frac{\langle \tilde{\mathbf{a}} | \tilde{\mathbf{b}} \rangle}{N-1}}{\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}\|}{\sqrt{N-1}} \frac{\|\tilde{\mathbf{b}}\|}{\sqrt{N-1}}} \\ &= \frac{\langle \tilde{\mathbf{a}} | \tilde{\mathbf{b}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{a}}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|} \end{aligned}$$

Seuraavassa taulukossa on kolme aikasarjaa ja vastaavat varianssit, kovarianssit ja korrelaatiokertoimet.

j	a_j	b_j	c_j	j	a_j	b_j	c_j
1	1.000	3.000	5.000	11	0.733	3.349	4.497
2	1.165	2.986	5.648	12	0.671	2.514	4.013
3	1.224	2.388	5.790	13	0.823	2.857	4.497
4	1.171	2.698	4.988	14	1.076	3.286	5.366
5	0.894	3.275	4.243	15	1.327	3.575	5.939
6	0.767	3.199	4.077	16	1.247	2.714	5.501
7	0.893	3.188	4.753	17	0.976	3.449	4.863
8	1.285	3.556	5.665	18	0.849	2.996	4.272
9	1.389	2.628	6.021	19	0.704	2.106	4.343
10	1.011	2.251	5.289	20	1.063	3.157	5.165



$$\begin{array}{lll} \mu_a = 1.013 & \mu_b = 2.959 & \mu_c = 4.997 \\ s_a = 0.219 & s_b = 0.429 & s_c = 0.643 \end{array}$$

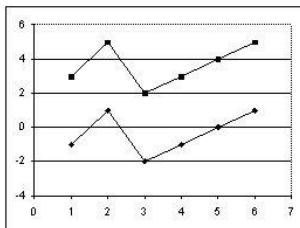
$$\begin{array}{ll} \text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.012, & r_{a,b} = 0.126 \\ \text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0.132, & r_{a,c} = 0.941 \\ \text{cov}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.014, & r_{b,c} = 0.053 \end{array}$$

$$r_{ab} = \frac{\text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{s_a s_b} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{a}} | \tilde{\mathbf{b}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{a}}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|}$$

Yhteisvaihtelua käsitellään paljon riippuvuusanalyysin kurssilla. Tämä kurssilla emme jatka aiheen käsittelyä enempää kuin yhdellä huomiolla. Koska usein taloudelliset aikasarjat esitetään muodossa, jossa havaintojen keskiarvo on likimain nolla, ymmärretään helposti aikasarjojen ortogonaalisuus ja korreloimattomuus samaksi asiaksi.

Tämä ei kuitenkaan ole totta. Seuraava vastaesimerkki osoittaa eron.

j	a_j	b_j
1	-1,000	3,000
2	1,000	5,000
3	-2,000	2,000
4	-1,000	3,000
5	0,000	4,000
6	1,000	5,000



μ	-0.333	3.667
s	1.211	1.211

$$\text{cov}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1.222$$

$$r_{a,b} = 1.000,$$

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = 0$$

Aikasarjat korreloivat täydellisesti, vaikka ovatkin keskenään ortogonaaliset.