Vaasan yliopisto, kevät 2012 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

8. harjoitus, viikko 18

R1	ke	14–16	D115	(2.5.)
R2	to	10–12	D115	(3.5.)

1. Määritä funktion $y(x)$ MacLaurinin sarjan kertoimet, kun $y(0) = 2$ ja

$$y'(x) = (x+1)y(x).$$

Kommentti: MacLaurinin sarjaa varten tarvitsemme derivaattojen lausekkeet. Tässä tapauksessa se onnistuu:

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (x+1)y(x) \\
y''(x) &= y(x) + (x+1)y'(x) \\
y'''(x) &= y'(x) + 1\cdot y'(x) + (x+1)y''(x) = 2y'(x) + (x+1)y''(x) \\
y^{(4)}(x) &= 2y''(x) + 1\cdot y''(x) + (x+1)y'''(x) = 3y''(x) + (x+1)y'''(x) \\
y^{(5)}(x) &= 3y'''(x) + 1\cdot y'''(x) + (x+1)y^{(4)}(x) = 4y'''(x) + (x+1)y^{(4)}(x) \\
y^{(6)}(x) &= 4y^{(4)}(x) + 1\cdot y^{(4)}(x) + (x+1)y^{(5)}(x) = 5y^{(4)}(x) + (x+1)y^{(5)}(x)
\end{aligned}$$

Käyttämällä alkuarvoa $y(0) = 2$ ja edellä saatuja lausekkeita, saamme derivaattojen arvot nollassa:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 2 \\
y'(0) &= y(0) = 2 \\
y''(0) &= y(0) + y'(0) = 2 + 2 = 4 \\
y'''(0) &= 2y'(0) + y''(0) = 2\cdot 2 + 4 = 6 \\
y^{(4)}(0) &= 3y''(0) + y'''(0) = 3\cdot 4 + 6 = 18 \\
y^{(5)}(0) &= 4y'''(0) + y^{(4)}(0) = 4\cdot 6 + 18 = 42 \\
y^{(6)}(0) &= 5y^{(4)}(0) + y^{(5)}(0) = 5\cdot 18 + 42 = 132
\end{aligned}$$

Näistä saamme edelleen MacLaurinin sarjakehitelmän

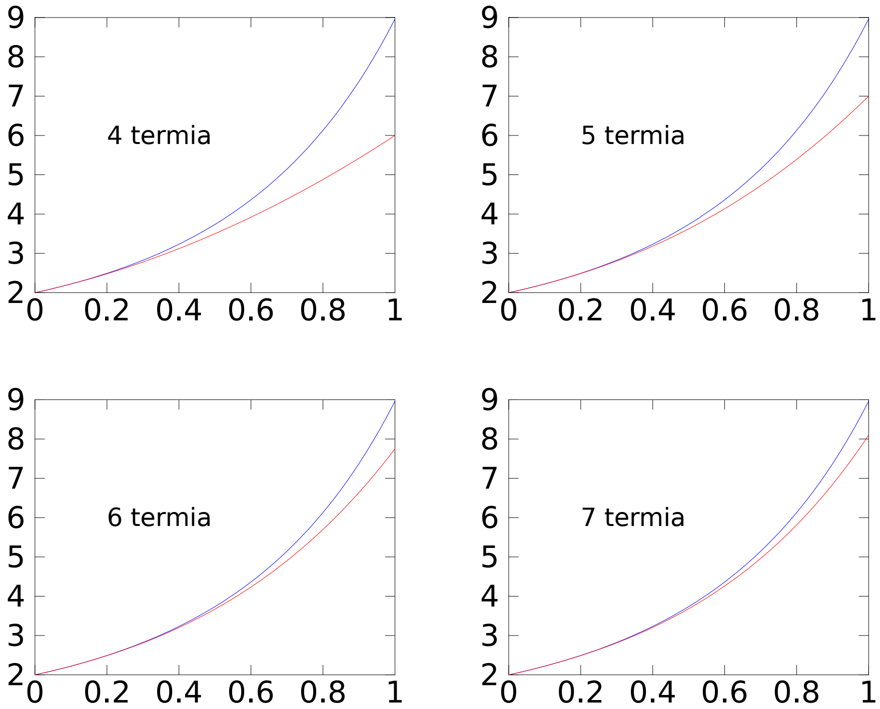
$$\begin{aligned}
y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k &= 2 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{18}{4!}x^4 + \frac{42}{5!}x^5 + \frac{132}{6!}x^6 + \dots \\
&= 2 + 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{7}{20}x^5 + \frac{11}{60}x^6 + \dots
\end{aligned}$$

Vastaus: $y(x) = 2 + 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{7}{20}x^5 + \frac{11}{60}x^6 + \dots$

Edellä annettu tehtävä on nyt suoritettu. Jatkamme hieman jotta saamme mielikuvan potenssisarjan pätevyydestä. Ratkaistaan DY separoimalla:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+1)y \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int (x+1)\mathrm{d}x + C \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + x + C \\
&\Leftrightarrow \quad y = C\mathrm{e}^{0,5x^2+x} \quad \underset{\text{alkuarvo}}{\longrightarrow} \quad y = 2\mathrm{e}^{0,5x^2+x}
\end{aligned}
$$

Piirretään DY:n ratkaisufunktion kuvaaja ja MacLaurinin sarjan osasummien määrittelemien funktioiden kuvaajia



Punainen käyrä on oikea ratkaisufunktio. Sininen käyrä on MacLaurinin sarjasta katkaisemalla saatu polynomi.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y' + xy = 0 \\ \text{(b)} & y' + xy = 3x \end{array}$$

Kommentti: Differentiaaliyhtälöt ovat ensimmäisen kertaluvun lineaarisia.
(a)-kohdassa DY on homogeeninen, ja sen yleinen ratkaisu saadaan separoimalla.
(b)-kohdassa DY on ei-homogeeninen.
Ratkaistaan separoimalla HY:n yleinen ratkaisu y_0 ja yritteellä DY:n yksityisratkaisu y_1. Niiden summa $y_0(x) + y_1(x)$ on DY:n yleinen ratkaisu.

Ratkaisu:
(a) Separoidaan DY

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -x\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int -x\mathrm{d}x + C_1 \\ \ln|y| &= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x + C_1 \\ y(x) &= C\mathrm{e}^{-x^2/2} \end{aligned}$$

(b) HY on sama kuin a-kohdan differentiaaliyhtälö, joten sen yleinen ratkaisu saadaan a-kohdasta

$$y_0(x) = C\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

DY:n yksityisratkaisu saadaan yritteellä

$$\begin{array}{rrrl} & DY: & y' + xy &= 3x \\ y_1(x) = Ax + B, \quad y_1'(x) = A \underset{\text{sij } y_1, y_1'}{\longrightarrow} & DY: & A + x(Ax + B) &= 3x \\ & & \to A = 0, & B = 3 \end{array}$$

Siis $y_1(x) = 3$ ja yleinen ratkaisu on

$$\underline{\underline{\text{Vastaus: } y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C\mathrm{e}^{-x^2/2} + 3.}}$$

3. Ratkaise $y' = x(1-y)$, kun $y(0) = 0.5$.

Kommentti: Differentiaaliyhtälö on ensimäistä kertalukua, se voidaan separoida, ja sille on annettu alkuarvo .

Ratkaisu: Separoidaan

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x(1-y) \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{1-y} &= x \cdot \mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow -\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} &= \int x \cdot \mathrm{d}x + C \\
\Leftrightarrow -\ln|y-1| &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
\Leftrightarrow y-1 &= C\mathrm{e}^{-x^2/2} \\
\Leftrightarrow y &= 1 + C\mathrm{e}^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

Alkuarvo merkitsee sitä, että

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0,5 \\
\Leftrightarrow 1 + C &= 0,5 \\
\Leftrightarrow C &= -0,5.
\end{aligned}$$

Siis: Vastaus: $y(x) = 1 - 0,5\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

4. Yrityksellä on 1000 potentiaalista asiakasta. Seuraavassa aikamuuttuja t mittaa ajan kulumista päivinä. Hetkellä t yrityksellä on $y(t)$ todellista asiakasta. Joka päivä yritys menettää osan todellisista asiakkaistaan ja vastaavasti tehokkaan markkinoinnin ansiosta joka päivä yritys saa uusia todellisia asiakkaita. Mallinnetaan näitä muutoksia seuraavasti

$$\begin{aligned}
\Delta y_{menetys} &= 0,01 \cdot y(t) \cdot dt \\
\Delta y_{uudet} &= 0,10 \cdot \frac{y(t)}{1000} \cdot (1000 - y(t)) \cdot dt
\end{aligned}$$

Muodosta prosessia kuvaava differentiaaliyhtälö. Miten suureksi markkinaosuus nousee?

Ratkaisu

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= \Delta y_{uudet} - \Delta y_{menetys} = 0,10 \cdot \frac{y(t)}{1000} \cdot (1000 - y(t)) \cdot \mathrm{d}t - 0,01 \cdot y(t) \cdot \mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0,10y(t) - 0,0001y(t)^2 - 0,01y(t) \\
\Leftrightarrow y'(t) &= 0,09y(t) - 0,0001y(t)^2 \qquad \text{(logistinen } A = 0,09, \quad B = 0,0001)
\end{aligned}$$

Markkinaosuus lähestyy arvoa $\lim_{t\to\infty} y(t) = A/B = 0,09/0,0001 = 900$.

Vastaus: DY: $y' = 0,09y - 0,0001y^2, \quad y(t) \underset{t\to\infty}{\to} 900$

5. Ratkaise $y'' + 2y' + 2y = x$.

Kommentti: Differentiaaliyhtälö on toista kertalukua, lineaarinen, vakiokertoiminen, ei-homogeeninen.

Ratkaisu:

Karakteristinen yhtälö:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad r = -1 \pm i$$

HY:n yleinen ratkaisu:

Karakteristisen yhtälön kompleksisen juuren reaaliosa on $\alpha = 1$ ja imaginaariosa on $\beta = 1$. Siten homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} \sin x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \cos x.$$

DY:n yksityisratkaisu:

Tehdään yrite: $y_1 = Ax + B$, $y_1' = A$, $y_1'' = 0$. Yrite toteuttaa DY:n, jos

$$\begin{aligned} 0 + 2 \cdot A + 2 \cdot (Ax + B) &= x \\ \Leftrightarrow 2Ax + 2(A + B) &= x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2A &= 1 \\ 2(A+2) &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A &= 1/2 \\ B &= -1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

DY:n yksityisratkaisu on siis $y_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

DY:n yleinen ratkaisu:

DY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} \sin x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Integroimisvakioita emme voi nyt ratkaista, koska alkuarvoja ei ole tiedossa. Siis

Vastaus: $C_1 \mathrm{e}^{-x} \sin x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

6. Ratkaise $y'' + 6y' + 5y = 100$, kun $y(0) = 4$ ja $y'(0) = 2$

Kommentti: Differentiaaliyhtälö on toista kertalukua, lineaarinen, vakiokertoiminen, ei-homogeeninen. Koska RHS on vakio, niin yritteenä toimii vakio. Koska alkuarvot tiedetään, niin integroimisvakiot saavat numeroarvot.

Ratkaisu:

Karakteristinen yhtälö:

$$r^2 + 6r + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 &= -1 \\ r_2 &= -5 \end{cases}$$

HY:n yleinen ratkaisu:

$$y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x}.$$

DY:n yksityisratkaisu:

Tehdään yrite: $y_1 = A$, $y_1' = 0$, $y_1'' = 0$. Yrite toteuttaa DY:n, jos

$$\begin{aligned} 0 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot A &= 100 \\ \Leftrightarrow A &= 20 \end{aligned}$$

DY:n yksityisratkaisu on siis $y_1(x) = 20$.

DY:n yleinen ratkaisu:

DY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x} + 20.$$

Alkuarvot:

Ratkaisufunktion derivaatta on

$$y'(x) = -C_1 \mathrm{e}^{-x} - 5C_2 \mathrm{e}^{-5x}.$$

$$\begin{cases} y(0) &= 4 \\ y'(0) &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 20 &= 4 \\ -C_1 - 5C_2 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 &= -19,5 \\ C_2 &= 3,5 \end{cases}$$

Ratkaisu:

Ainoa funktio, jolla on kaikki annetut ominaisuudet on siis

$$\underline{\underline{\text{Vastaus: } y(x) = -19,5\mathrm{e}^{-x} + 3,5\mathrm{e}^{-5x} + 20.}}$$

7. Tarkastellaan kulutustuotteen markkinoita. Tuotteen hinta on p ja määrä varastossa on q. Tuotteen kysyntä on $D = a_1 - b_1 p$ ja tarjonta on $S = -a_2 + b_2 p$. Varaston muutosnopeus on $q' = S - D$. Varastoja pyritään pitämään keskimäärin suunnitellun kokoisena q^e samoin hintaa pyritää ohjaamaan tavoitearvoonsa p^e. Hintaa ohjataan tätä varten niin, että

$$dp/dt = \alpha(q^e - q) + \beta(p^e - p).$$

Oletamme, että kaikke edellä esiintyneet vakiot $a_1, b_1, a_2, b_2, q^e, p^e, \alpha, \beta$ ovat positiivisia. Millainen tulee β:n arvon olla, jotta tasapaino olisi stabiili? Miten tasapaino riippuu tavoitehinnasta p^e ja tavoitevarastosta q^e. Mitä arvoa q lähestyy systeemin vakiintuessa?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
p'(t) &= \alpha(q^e - q) + \beta(p^e - p) \\
\Rightarrow p'' &= -\alpha q' - \beta p' \\
\Leftrightarrow p'' &= -\alpha(-a_2 + b_2 p - (a_1 - b_1 p)) - \beta p' \\
\Leftrightarrow p'' + \beta p' + \alpha(b_1 + b_2)p &= \alpha(a_1 + a_2)
\end{aligned}$$

Dynamiikkaa kuvaava DY on teisen kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen, ja myös RHS on vakio. Kaikki kertoimet ovat positiivisia, joten tasapaino on stabiili. Tasapainoratkaisu on DY:n yksityisratkaisu, joka on vakio

$$p_1(t) = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}.$$