Vaasan yliopisto, kevät 2014 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

2. harjoitus, viikko 11

R1	ma	16–18	D115	(9.3.)
R2	ke	12–14	B209	(11.3.)

1. a) Minkä kokoinen on matriisi $\boldsymbol{M}$, jolle

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\quad\text{ja}\quad \boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

b) Määritä kaikki matriisissa $\boldsymbol{M}$ olevat luvut.

2. Olkoon

$$f(x,y)=5+2x-y+x^2+xy.$$

Laske dw/dt, kun $w(t)=f(1+t,2-3t)$.
(ohje: voit sijoittaa $f(x,y)$:n lausekkeeseen x:n paikalle $1+t$ ja y:n paikalle $2-3t$ ja sieventtä ja derivoida lausekkeen t:n suhteen. Toinen tapa on käyttää kaavaa

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Tulosten tulisi olla samat.)

3. Laske matriisin $\boldsymbol{B}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&2\\2&4\end{pmatrix}$$

(Ohje: Tarkista saamasi arvot arvot λ_j, $\boldsymbol{v}_j$, $(j=1,2)$ sijoittamalla ne ominaisarvoyhtälöön $\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_j=\lambda_j\boldsymbol{v}_j$.)

4. Laske matriisin $\boldsymbol{S}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

(Ohje: Tarkista saamasi arvot arvot λ_j, $\boldsymbol{v}_j$, $(j=1,2)$ sijoittamalla ne ominaisarvoyhtälöön $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}_j=\lambda_j\boldsymbol{v}_j$.)

5. Olkoon

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lausumme vektorin $\vec{w} = (1 \quad 3 \quad 0)^T$ usealla eri tavalla matriisin $\boldsymbol{Q}$ sarakkeiden lineaarikombinaationa.

$$\vec{w} = c_1\vec{q}_1 + c_2\vec{q}_2 + \ldots + c_5\vec{q}_5 \tag{1}$$

Selvitämme ensin mitä yhtälöitä kertoimien tulee toteuttaa:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} [1] & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot 2 & 1 \\ \leftarrow_{-} & \\ & \leftarrow_{-} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & [2] & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} & \\ \cdot 1 & \cdot 0.5 \\ & \leftarrow_{-} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1.5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} [1] & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & [2] & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [1] & 1.5 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 2c_4 + c_5 = 1 \\ 2c_3 - 2c_4 - 2c_5 = 1 \\ c_5 = 1.5 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} c_1 + c_5 = 1 - 2c_2 - 2c_4 \\ 2c_3 - 2c_5 = 1 + 2c_4 \\ c_5 = 1.5 \end{cases}$$

a) Etsi nyt lineaarikombinaation (1) kertoimille arvot siten, että ainakin yksi kerroin on iso ($c_k \geq 100$, jollekin k.)
b) Etsi tehtävän lineaarikombinaatiolle (1) pienet kertoimet siten, että ($|c_k| \leq 2$, kaikille k.)

6. a) Perustele tehtävän 5 lineaarikombinaatiota (1) koskeva havainto: ”Ainakin yksi lineaarikombinaation kertoimista on negatiivinen”.
b) Etsi nyt tehtävän 5 lineaarikombinaation (1) kertoimille arvot siten, että kertoimien summa on 0 ja kertoimien neliöiden summa on niin pieni kuin mahdollista.

$$\sum_{k=1}^{5} c_k = 0, \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{5} c_k^2 = \text{pieni.}$$