Vaasan yliopisto, kevät 2014 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

3. harjoitus, viikko 12

R1	ma	16–18	D115	(16.3.)
R2	ke	12–14	B209	(18.3.)

Olkoon tehtävässä 1 tutkittavina matriisit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

1. Tutki matriisien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ definiittisyydet pääminoreiden avulla. (Voit helpottaa $\boldsymbol{C}$ matriisin tutkimista merkittävästi ottamalla huomioon, että
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{Trace}(\boldsymbol{C}) = 1 + 3 + 3 - 10 = -3$.)

2. Onko neliömuoto $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$ positiivisesti definiitti?

3. Olkoon $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$
a) Määritä osittaisderivaatat f_x ja f_y.
b) Kirjoita gradienttivektorin $\nabla f(x,y)$ ja Hessin matriisin $\boldsymbol{H}$ lausekkeet.
c) Laske gradienttivektorin ja Hessin matriisin arvot pisteissä

$$(x \quad y)^T = (1 \quad 2)^T, \quad \text{ja} \quad (x \quad y)^T = (1 \quad -1)^T.$$

4. Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$
(Ohje: Laske pisteet (x_i,y_i), joissa $\nabla f = \overline{\mathbf{0}}$ ja tutki Hessin matriisin definiittisyys näissä pisteissä.)

5. Yritys valmistaa kahta tuotetta T1 ja T2. Valmistusmäärät ovat q_1 ja q_2 (kpl/kk). Kysyntä- ja kustannus-funktiotovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 0{,}010q_1 - 0{,}004q_2 \\ p_2 &= 50 - 0{,}006q_1 - 0{,}020q_2 \\ C &= 17q_1 + 25q_2 + 0{,}01q_1q_2 \end{aligned}$$

Yrityksen voittofunktio on nyt

$$\begin{aligned} f(q_1,q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2) \\ &= 23q_1 + 25q_2 - 0{,}01q_1^2 - 0{,}02q_1q_2 - 0{,}02q_2^2 \end{aligned}$$

Millä valmistusmäärillä voitto on suurin mahdollinen.

6. Maksimoi edellisen tehtävän voittofunktio ehdolla $q_1 + 2q_2 = 1200$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$