Vaasan yliopisto, kevät 2014 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

3. harjoitus, viikko 12

R1	ma	16–18	D115	(16.3.)
R2	ke	12–14	B209	(18.3.)

Olkoon tehtävässä 1 tutkittavina matriisit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

1. Tutki matriisien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ definiittisyydet pääminoreiden avulla. (Voit helpottaa $\boldsymbol{C}$ matriisin tutkimista merkittävästi ottamalla huomioon, että $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{Trace}(\boldsymbol{C}) = 1 + 3 + 3 - 10 = -3$.)

2. Onko neliömuoto $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$ positiivisesti definiitti?

3. Olkoon $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$

a) Määritä osittaisderivaatat f_x ja f_y.

b) Kirjoita gradienttivektorin $\nabla f(x,y)$ ja Hessin matriisin $\boldsymbol{H}$ lausekkeet.

c) Laske gradienttivektorin ja Hessin matriisin arvot pisteissä

$$(x \quad y)^T = (1 \quad 2)^T, \quad \text{ja} \quad (x \quad y)^T = (1 \quad -1)^T.$$

4. Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$
(Ohje: Laske pisteet (x_i,y_i), joissa $\nabla f = \overline{\mathbf{0}}$ ja tutki Hessin matriisin definiittisyys näissä pisteissä.)

5. Yritys valmistaa kahta tuotetta T1 ja T2. Valmistusmäärät ovat q_1 ja q_2 (kpl/kk). Kysyntä- ja kustannus-funktiotovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 0{,}010q_1 - 0{,}004q_2 \\ p_2 &= 50 - 0{,}006q_1 - 0{,}020q_2 \\ C &= 17q_1 + 25q_2 + 0{,}01q_1q_2 \end{aligned}$$

Yrityksen voittofunktio on nyt

$$\begin{aligned} f(q_1,q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2) \\ &= 23q_1 + 25q_2 - 0{,}01q_1^2 - 0{,}02q_1q_2 - 0{,}02q_2^2 \end{aligned}$$

Millä valmistusmäärillä voitto on suurin mahdollinen.

6. Maksimoi edellisen tehtävän voittofunktio ehdolla $q_1 + 2q_2 = 1200$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Vaasan yliopisto, kevät 2014 / ORMS1010
Matemaattinen Analyysi

3. harjoitus, viikko 12

R1	ma	16–18	D115	(16.3.)
R2	ke	12–14	B209	(18.3.)

Olkoon tehtävässä 1 tutkittavina matriisit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

1. Tutki matriisien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ definiittisyydet pääminoreiden avulla. (Voit helpottaa $\boldsymbol{C}$ matriisin tutkimista merkittävästi ottamalla huomioon, että $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \text{Trace}(\boldsymbol{C}) = 1+3+3-10 = -3$.)

Matriisi A: $D_1 = -1 < 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2-1 > 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0$

$= -3 + 2 < 0$

$\therefore$ A on negatiivisesti definiitti

Matriisi B: $D_1 = 1 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 < 0$

$\longrightarrow$ B on indefiniitti

Matriisi C: $D_1 = 1 \longrightarrow$ C ei ole neg. def

$\text{Trace}(C) = -3 < 0 \rightarrow$ C ei ole pos. def

$\therefore$ C on indefiniitti

---

	pos. def	neg. def
D_1	+	−
D_2	+	+
D_3	+	−
D_4	+	+
D_5	+	−

2. Onko neliömuoto $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$ positiivisesti definiitti?

$$f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$$

$$= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$D_1 = 1 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-0) + (-1-0) + (0-4) = -1 < 0$$

V: neliömuoto on indefiniitti

3. Olkoon $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$
a) Määritä osittaisderivaatat f_x ja f_y.
b) Kirjoita gradienttivektorin $\nabla f(x,y)$ ja Hessin matriisin $\boldsymbol{H}$ lausekkeet.
c) Laske gradienttivektorin ja Hessin matriisin arvot pisteissä

$$(x \quad y)^T = (1 \quad 2)^T, \quad \text{ja} \quad (x \quad y)^T = (1 \quad -1)^T.$$

a) $f_x = 3x^2 + y$
$f_y = x + 2y$

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\nabla f\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $H\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\nabla f\Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $H\Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$
(Ohje: Laske pisteet (x_i, y_i), joissa $\nabla f = \bar{0}$ ja tutki Hessin matriisin definiittisyys näissä pisteissä.)

$$\boxed{\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 + y \\ x + 2y \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\nabla f = \bar{0} \iff \begin{cases} 3x^2 + y = 0 & \cdot 2 \\ x + 2y = 0 & \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2 + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$H\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_2 = -1 < 0 \rightarrow \text{indefiniitti}$$

$$H\Big|_{\substack{x=1/6 \\ y=-1/12}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} D_1 &= 1 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 > 0 \end{aligned}$$

positiivisesti definiitti

Vastaus

piste $x = \frac{1}{6}$, $y = -\frac{1}{12}$ on lokaali minimikohta
funktion minimiarvo on

$$f\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{-1}{12}\right) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 + \tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{-1}{12}\right) + \left(\tfrac{-1}{12}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6\cdot6\cdot6} - \frac{1}{6\cdot6\cdot2} + \frac{1}{6\cdot2\cdot6\cdot2}$$

$$= \frac{4 - 12 + 6}{4\cdot6^3} = -\frac{1}{2\cdot6^3} = \frac{-1}{432} \approx -0{,}002315$$

5. Yritys valmistaa kahta tuotetta T1 ja T2. Valmistusmäärät ovat q_1 ja q_2 (kpl/kk). Kysyntä- ja kustannus-funktiotovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 0{,}010q_1 - 0{,}004q_2 \\ p_2 &= 50 - 0{,}006q_1 - 0{,}020q_2 \\ C &= 17q_1 + 25q_2 + 0{,}01q_1q_2 \end{aligned}$$

Yrityksen voittofunktio on nyt

$$\begin{aligned} f(q_1,q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2) \\ &= 23q_1 + 25q_2 - 0{,}01q_1^2 - 0{,}02q_1q_2 - 0{,}02q_2^2 \end{aligned}$$

Millä valmistusmäärillä voitto on suurin mahdollinen.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 23 - 0{,}02q_1 - 0{,}02q_2 \\ 25 - 0{,}02q_1 - 0{,}04q_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -0{,}02 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & -0{,}04 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \bar{0} \iff \begin{cases} 23 - 0{,}02q_1 - 0{,}02q_2 = 0 & \cdot(-50) \\ 25 - 0{,}02q_1 - 0{,}04q_2 = 0 & \cdot(-50) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q_1 + q_2 = 1150 \\ q_1 + 2q_2 = 1250 \end{cases} \iff \begin{cases} q_1 = 1050 \\ q_2 = 100 \end{cases}$$

H:n definiittisyys:

$D_1 = -0{,}02 < 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} -0{,}02 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & -0{,}04 \end{vmatrix} = 0{,}0008 - 0{,}0004 > 0$

$\rightarrow$ H on negatiivisesti definiitti, joten piste $(1050; 100)$ on lokaali maksimi

Voiton maksimiarvo on

$$\begin{aligned} f(1050; 100) &= 23 \cdot 1050 + 25 \cdot 100 - 0{,}01 \cdot 1050^2 - 0{,}02 \cdot 1050 \cdot 100 - 0{,}02 \cdot 100^2 \\ &= 24150 + 2500 - 11025 - 2100 - 200 \\ &= 13325 \end{aligned}$$

6. Maksimoi edellisen tehtävän voittofunktio ehdolla $q_1 + 2q_2 = 1200$.

Lagrangen funktio

$L(q_1, q_2, \lambda) =$

$23q_1 + 25q_2 - 0{,}01q_1^2 - 0{,}02q_1q_2 - 0{,}02q_2^2 + \lambda(q_1 + 2q_2 - 1200)$

$$\begin{cases} L_{q_1} = 0 \\ L_{q_2} = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 0{,}02q_1 - 0{,}02q_2 + \lambda = 0 & \cdot(-50) \\ 25 - 0{,}02q_1 - 0{,}04q_2 + 2\lambda = 0 & \cdot(-50) \\ q_1 + 2q_2 - 1200 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 1150 & \cdot 1 \\ q_1 + 2q_2 - 100\lambda = 1250 \\ q_1 + 2q_2 = 1200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 1150 \\ q_2 - 50\lambda = 100 & \cdot 1 \\ q_2 + 50\lambda = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 1150 \\ q_2 - 50\lambda = 100 \\ 100\lambda = -50 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{\lambda = -\frac{1}{2}, \quad q_2 = 75, \quad q_1 = 1050}}$

Voiton maksimiarvo on

$f(1050; 75) = 23 \cdot 1050 + 25 \cdot 75 - 0{,}01 \cdot 1050^2 - 0{,}02 \cdot 1050 \cdot 75 - 0{,}02 \cdot 75^2$

$= 24150 + 1875 - 11025 - 1575 - 112{,}5$

$= \underline{\underline{13312{,}5}}$