Vaasan yliopisto, kevät 2014 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

4. harjoitus, viikko 13

R1	ma	16–18	D115	(23.3.)
R2	ke	12–14	B209	(25.3.)

1. Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B. Valmistusmäärät kuukaudessa ovat q_1 ja q_2. Kysyntä- ja kustannus-funktiot ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2 \\ p_2 &= 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1 \\ C &= 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2 \end{aligned}$$

Lisäksi tuotantotilojen pienuuden takia toimintaa rajoittaa ehto $q_1 + q_2 = 5A$, missä A on tehdashallin lattiapinta-ala (m^2). Tällä hetkellä $A = 140m^2$, joten tilarajoite on $q_1 + q_2 = 700$.
a) Maksimoi voitto (tällä hetkellä, kun $q_1 + q_2 = 700$).
b) Miten optimi riippuu An arvosta?

2. Jatketaan tehtävän 1 yrityksen tarkastelua. On ehdotettu tuotantotilojen laajentamista. Minkä verran kannattaa rakentaa lisää lattiapinta-alaa ja mitä rakentaminen enintään saa maksaa kun vaaditaan, että investointi maksetaan kahden seuraavan vuoden voiton lisäyksellä.

3. Olkoon edelleen $p_1 = 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2$, $p_2 = 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1$ ja $C = 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2$ Kirjoita lauseen 3.5.1 (sivu 85) mukaiset välttämättömät ehdot optimointitehtävälle

$$\begin{cases} \max & z = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2) \\ \text{st.} & q_1 + q_2 \leq 700 \\ & q_1 \geq 0 \\ & q_2 \geq 0 \end{cases}$$

5. Kirjoita lauseen 3.5.1 (sivu 85) mukaiset ehdot optimointitehtävälle

$$\begin{cases} \min & z = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 \\ \text{st.} & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. Muodosta edellisen tehtävän jokin relaksaatio ja etsi sille jokin välttämättömän ehdon toteuttava käypä ratkaisu.

Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

on minimipiste $\mathbf{x}^\star$, niin on olemassa reaaliluvut $\lambda_j^\star, j = 1, \ldots, m$ siten, että pisteessä $(\mathbf{x}^\star, \lambda^\star)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= h_j(\mathbf{x}^\star) = 0, \; j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

(eli $\nabla L = \mathbf{0}$)

Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}), \; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

on minimipiste $\mathbf{x}^\star$, niin on olemassa reaaliluvut $\mu_i \geq 0, i = 1, \ldots, p$ ja $\lambda_j^\star, j = 1, \ldots, m$ siten, että optimipisteessä $(\mathbf{x}^\star, \mu^\star, \lambda^\star)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_k} = 0, \; k = 1, \ldots, n \\ \mu_i &\geq 0, \; i = 1, \ldots, p \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}^\star) &= 0, \; i = 1, \ldots, p \\ g_i(\mathbf{x}^\star) &\leq 0, \; i = 1, \ldots, p \\ h_j(\mathbf{x}^\star) &= 0, \; j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$