

4. harjoitus, viikko 13

R1	ma	16-18	D115	(23.3.)
R2	ke	12-14	B209	(25.3.)

1. Yritys valmistaa kahta tuotetta A ja B. Valmistusmäärät kuukaudessa ovat q_1 ja q_2 . Kysyntä- ja kustannus-funktiot ovat

$$p_1 = 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2$$

$$p_2 = 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1$$

$$C = 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2$$

Lisäksi tuotantotilojen pienenä toimintaa rajoittaa ehto $q_1 + q_2 = 5A$, missä A on tehdashallin lattiapinta-ala (m^2). Tällä hetkellä $A = 140m^2$, joten tilarajoite on $q_1 + q_2 = 700$.

a) Maksimoi voitto (tällä hetkellä, kun $q_1 + q_2 = 700$).

b) Miten optimi riippuu A n arvosta?

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C \\ &= 40q_1 - 0,01q_1^2 + 0,004q_2q_1 \\ &\quad + 50q_2 - 0,02q_2^2 + 0,006q_1q_2 \\ &\quad - 22q_1 - 25q_2 - 0,03q_1q_2 \\ &= 18q_1 + 25q_2 - 0,01q_1^2 - 0,02q_1q_2 - 0,02q_2^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Max } f(q_1, q_2) = 18q_1 + 25q_2 - 0,01q_1^2 - 0,02q_1q_2 - 0,02q_2^2$$

ehdolla $q_1 + q_2 = 700$

Lagrangen funktio

$$L = 18q_1 + 25q_2 - 0,01q_1^2 - 0,02q_1q_2 - 0,02q_2^2 + \lambda(q_1 + q_2 - 700)$$

$$\begin{cases} L_{q_1} = 0 \\ L_{q_2} = 0 \\ L_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 - 0,02q_1 - 0,02q_2 + \lambda = 0 \\ 25 - 0,02q_1 - 0,04q_2 + \lambda = 0 \\ q_1 + q_2 = 700 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-50) \\ \cdot (-50) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 900 & \cdot 1 \quad \cdot 1 \\ q_1 + 2q_2 - 50\lambda = 1250 & \leftarrow \\ q_1 + q_2 = 700 & \leftarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 900 \\ q_2 = 350 \\ 50\lambda = -200 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q_1 = 350 \\ q_2 = 350 \\ \lambda = -4 \end{matrix}$$

$$b) L = 18q_1 + 25q_2 - 0,01q_1^2 - 0,02q_1q_2 - 0,02q_2^2 + \lambda(q_1 + q_2 - 5A)$$

$$\begin{cases} L_{q_1} = 0 \\ L_{q_2} = 0 \\ L_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 - 0,02q_1 - 0,02q_2 + \lambda = 0 & \cdot (-50) \\ 25 - 0,02q_1 - 0,04q_2 + \lambda = 0 & \cdot (-50) \\ q_1 + q_2 - 5A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 900 \\ q_1 + 2q_2 - 50\lambda = 1250 \\ q_1 + q_2 = 5A \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - 50\lambda = 900 \\ q_2 = 350 \\ 50\lambda = 5A - 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = 5A - 350 \\ q_2 = 350 \\ \lambda = 0,1 \cdot A - 18 \end{cases}$$

Tavoitefunktion optimaarivo on

$$\begin{aligned} z^*(A) &= 18 \cdot (5A - 350) + 25 \cdot 350 \\ &\quad - 0,01 \cdot (5A - 350)^2 - 0,02(5A - 350) \cdot 350 - 0,02 \cdot 350^2 \\ &= 90A - 6300 + 8750 \\ &\quad - 0,25A^2 + 35A - 1225 - 35A + 2450 - 2450 \\ &= 1125 + 90A - 0,25A^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dz^*}{dA} = 90 - 0,50A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 180$$

2. Jatketaan tehtävän 1 yrityksen tarkastelua. On ehdotettu tuotantotilojen laajentamista. Minkä verran kannattaa rakentaa lisää lattiapinta-alaa ja mitä rakentaminen enintään saa maksaa kun vaaditaan, että investointi maksetaan kahden seuraavan vuoden voiton lisäyksellä.

Enintään kannattaa rakentaa $40m^2$ ($A=140 \rightarrow A=180$)
 Hyöty on silloin $\Delta z = 20 \cdot 40 - 0,25 \cdot 40^2 = 400 \text{ €/kk}$

Jos rakentaminen tulee rahoitettua kahden vuoden tulonlisäyksestä niin maksimimitä se on $20 \cdot 400 \text{ €} = 9600 \text{ €}$ (eli $\frac{9600 \text{ €}}{40 \text{ km}^2} = 240 \text{ €/m}^2$)

Näillä numeroilla ei tunneta kovin kannattavalle

3. Olkoon edelleen $p_1 = 40 - 0.01q_1 + 0.004q_2$, $p_2 = 50 - 0.02q_2 + 0.006q_1$ ja $C = 22q_1 + 25q_2 + 0.03q_1q_2$ Kirjoita lauseen 3.5.1 (sivu 85) mukaiset välttämättömät ehdot optimointitehtävälle

$$\begin{cases} \max & z = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2) \\ \text{st.} & q_1 + q_2 \leq 700 \\ & q_1 \geq 0 \\ & q_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min & -p_1q_1 - p_2q_2 + C \\ \text{s.t.} & q_1 + q_2 - 700 \leq 0 \\ & -q_1 \leq 0 \\ & -q_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Lagrange

$$L(q_1, q_2, \mu_1, \mu_2) = -18q_1 - 25q_2 + 0.01q_1^2 + 0.02q_1q_2 + 0.02q_2^2 + \mu_1(q_1 + q_2 - 700) - \mu_2q_1 - \mu_3q_2$$

$\left\{ \begin{array}{l} L_{q_1} = 0 \\ L_{q_2} = 0 \\ \mu_1 q_1 = 0 \\ \mu_2 q_2 = 0 \\ \mu_3 q_3 = 0 \\ \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ \mu_3 \geq 0 \\ \\ q_1 \leq 0 \\ q_2 \leq 0 \\ q_3 \leq 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -18 + 0.02q_1 + 0.02q_2 + \mu_1 \\ -25 + 0.02q_1 + 0.04q_2 + \mu_1 \\ \mu_1 (q_1 + q_2 - 700) \\ -\mu_2 q_1 \\ -\mu_3 q_2 \end{array} \right.$	$-\mu_2$	$= 0$		
		$-\mu_3$	$= 0$		
		μ_1	$= 0$		
		μ_2	$= 0$		
		μ_3	$= 0$		
				μ_1	≥ 0
				μ_2	≥ 0
				μ_3	≥ 0
				$q_1 + q_2 - 700$	≤ 0
				$-q_1$	≤ 0
		$-q_2$	≤ 0		

5. Kirjoita lauseen 3.5.1 (sivu 85) mukaiset ehdot optimointitehtävälle

(4)

$$\begin{cases} \min z = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 \\ \text{st.} & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0 \leftarrow -x_1 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \leftarrow -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$L = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 + \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) + \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18) - \mu_3x_1 - \mu_4x_2$$

$$\begin{cases} -2 & +0.2x_2 + \mu_1 & +2\mu_2 - \mu_3 & = 0 \\ 0.2x_1 & -3 & +2\mu_1 + 3\mu_2 & -\mu_4 = 0 \\ \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) & & & = 0 \\ \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18) & & & = 0 \\ & & \mu_3x_1 & = 0 \\ & & \mu_4x_2 & = 0 \\ & & \mu_1 & \geq 0 \\ & & \mu_2 & \geq 0 \\ & & \mu_3 & \geq 0 \\ & & \mu_4 & \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 & & & \leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 18 & & & \leq 0 \\ -x_1 & & & \leq 0 \\ -x_2 & & & \leq 0 \end{cases}$$

6. Muodosta edellisen tehtävän jokin relaksaatio ja etsi sille jokin välttämättömän ehdon toteuttava käypä ratkaisu.

rajoittamaton optimi:

$$\begin{cases} z_{x_1} = 0 \\ z_{x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 0.2x_2 = 0 \\ 0.2x_1 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 10 \\ x_1 = 15 \end{cases}$$

1. ja toinen rajoite eivät toteudu, mutta merkijarajoitteet toteutuvat

$$\Rightarrow \text{Relaksaatio} \quad \begin{cases} \min z = -2x_1 + 0.2x_1x_2 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 18 \leq 0 \end{cases}$$

(5)

$$L = -2x_1 + 0,2x_1x_2 - 3x_2 + \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) + \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18)$$

$$\begin{cases} -2 + 0,2x_2 + \mu_1 + 2\mu_2 = 0 \\ 0,2x_1 - 3 + 2\mu_1 + 3\mu_2 = 0 \\ \mu_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0 \\ \mu_2(2x_1 + 3x_2 - 18) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &\geq 0 \\ \mu_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 &\leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 18 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$$

$$\begin{cases} +0,2x_2 + \mu_1 + 2\mu_2 = 2 \\ 0,2x_1 + 2\mu_1 + 3\mu_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -1,2 \\ \mu_2 = 1,4 \\ x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &\geq 0 \\ \mu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

✓
er' didolokan

$$\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$$

$$\begin{cases} 0,2x_2 + \mu_1 = 2 \\ 0,2x_1 + 2\mu_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2,5 \\ x_2 &= 3,75 \\ \mu_1 &= 1,25 \\ &\text{ok} \\ &\text{ok} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 18 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,5 \\ x_2 &= 3,75 \\ z &= -14,375 \end{aligned} \quad \textcircled{I}$$

6

$$\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,2x_1 + 2\mu_2 = 2 \\ 0,2x_1 + 3\mu_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4,5 \\ x_2 = 3 \\ \mu_2 = 0,7 \end{array}$$

✓ ei chdoberh

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow x_2 = 10 \\ \rightarrow x_1 = 15$$

✓ ✓ ei chdoberh

∞ optim: $x_1 = 2,5$
 $x_2 = 3,75$

alternativset

reparatset ①

$$x_1 + 2x_2 = 2,5 + 2 \cdot 3,75 = 10 \text{ ok}$$

②

$$2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 3,75 = 16,75 < 18 \text{ ok}$$

③

$$x_1 = 2,5 \geq 0 \text{ ok}$$

④

$$x_2 = 3,75 \geq 0 \text{ ok}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 2,5 \\ x_2 = 3,75 \\ z = -14,375 \end{array}$$

optim!