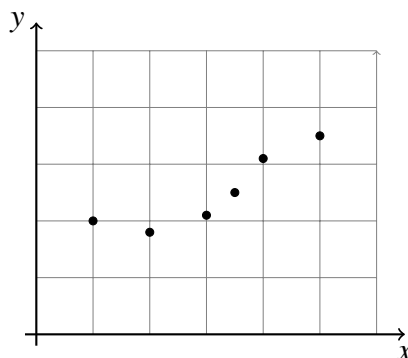


# Matemaattinen Analyysi

## 6. harjoitus

1. Approksimoi toisen asteen polynomilla  $P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$  oheisen taulukon mukaisia havaintoja. (Teorian löydät opetusmonisteen sivuilta 91-92.)

$x_i$	$y_i$
1,00	2,00
2,00	1,80
3,00	2,10
3,50	2,50
4,00	3,10
5,00	3,50



Selittävät polynomit ovat  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  ja  $P_2(x) = x^2$ . Sijoitetaan selittäjien arvot kohdissa  $x_j$  matriisiin  $\mathbf{A}$  sarakkeisiin. Saamme matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.0 & 1.0^2 \\ 1 & 2.0 & 2.0^2 \\ 1 & 3.0 & 3.0^2 \\ 1 & 3.5 & 3.5^2 \\ 1 & 4.0 & 4.0^2 \\ 1 & 5.0 & 5.0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.0 & 1.0 \\ 1 & 2.0 & 3.0 \\ 1 & 3.0 & 9.0 \\ 1 & 3.5 & 12.25 \\ 1 & 4.0 & 16 \\ 1 & 5.0 & 25 \end{pmatrix}$$

Etsimme nyt mallin kertoimia  $b_0$ ,  $b_1$  ja  $b_2$  niin, että

$$P(x_j) = b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 \approx y_j, \forall j$$

niin tarkasti kuin mahdollista. Mallin kerroinvektorin  $\vec{b} = (b_0 \ b_1 \ b_2)^T$  pienimmän neliösumman (PNS) estimaatti saadaan kaavalla

$$\vec{b} = \mathbf{A}^\dagger \vec{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{y}.$$

Octavella:

```
octave:3> x=[1 2 3 3.5 4 5]'
```

```
x =
```

```
1.0000
2.0000
3.0000
3.5000
4.0000
5.0000
```

```
octave:4> y=[2 1.8 2.1 2.5 3.1 3.5]'
```

```
y =
```

```
2.0000
1.8000
2.1000
2.5000
3.1000
3.5000
```

```
octave:5> apu = ones(6,1)
```

```
apu =
```

```
1
1
1
1
1
1
```

```
octave:6> A=[apu , x , x.^2]
```

```
A =
```

```
1.0000    1.0000    1.0000
1.0000    2.0000    4.0000
1.0000    3.0000    9.0000
1.0000    3.5000   12.2500
1.0000    4.0000   16.0000
1.0000    5.0000   25.0000
```

```
octave:7> b = (A'*A)^(-1)*A'*y
```

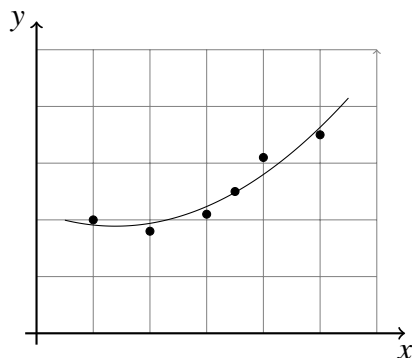
```
b =
```

```
2.14714
-0.37182
0.13377
```

Siis approksimoiva polynomi on

$$P(x) = 2.14714 - 0.37182 \cdot x + 0.13377 \cdot x^2.$$

Kun polynomin kuvaaja piirretään samaan koordinaatistoon lähtö-datan kanssa saadaan kuva



**2.** Mikä on seuraavien funktioiden homogeenisuuden aste

a) Tuotantofunktio  $z(K,L) = L^{3/8}K^{5/8}$ ,

b)  $f(x,y) = x^2 + 3xy$ ,

c)  $g(x,y,z) = x\sqrt{y} + 2\sqrt{xyz}$

(Teorian löydät opetusmonisteen sivuilta 99-100.)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad z(\alpha K, \alpha L) &= (\alpha L)^{3/8}(\alpha K)^{5/8} \\ &= \alpha^{3/8}L^{3/8}\alpha^{5/8}K^{5/8} \\ &= \alpha^1 z(K,L) \quad \longrightarrow \quad \text{asteluku on 1.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(\alpha x, \alpha y) &= (\alpha x)^2 + 3(\alpha x)(\alpha y) \\ &= \alpha^2 x^2 + 3\alpha x \alpha y \\ &= \alpha^2 (x^2 + 3xy) = \alpha^2 f(x,y) \quad \longrightarrow \quad \text{asteluku on 2.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad g(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= (\alpha x)\sqrt{\alpha y} + 2\sqrt{(\alpha x)(\alpha y)(\alpha z)} \\ &= \alpha^1 x \alpha^{1/2} x^{1/2} + 2\alpha^{1/2} x^{1/2} \alpha^{1/2} y^{1/2} \alpha^{1/2} z^{1/2} \\ &= \alpha^{3/2} (x\sqrt{y} + 2\sqrt{xyz}) \quad \longrightarrow \quad \text{asteluku on 3/2.} \end{aligned}$$

**3.** Osoita majoranttiperiaatteella, että seuraava sarja suppenee. (Ohje: Majoranttiperiaate, lause 4.4.1 sivu 107.  $0 \leq a_k = \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} = b_k$  ja sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  suppenee.)

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k + 1)}$$

Merkitään

$$a_k = \frac{1}{2^k + 1}, \quad \text{ja} \quad b_k = \frac{1}{2^k}.$$

Nyt on selvä, että  $0 \leq a_k < b_k$ , kun  $k \geq 0$ . Geometrinen sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  suppenee, joten se on suppeneva majorantti positiivitermiselle sarjalle  $\sum a_k$ . Majoranttiperiaatteen mukaan silloin myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k + 1)}$$

suppenee.

*Kommentti:* Tehtävässä ei tarvinnut laskea summaa, vaan ainoastaan tutkia suppenemisen. Tämä voi toisinaan olla melko turheuttavaa. Siksi teemme nyt hieman ylimääräistä työtä ja selvitämme summan arvon miljoonasosan tarkkuudella.

Laskemme  $N$  ensimmäistä termiä erikseen ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) ja arvioimme loppusummaa  $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$  erikseen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^k} &< \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{(2^k + 1)} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^N} &< \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \frac{2}{2^N} \end{aligned}$$

Voimme siis arvioida, että

$$A \approx \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2^k + 1)} + \frac{1,5}{2^N},$$

ja virhe on enintään  $0,5/2^N$ . Haluttuun tarkkuuteen päästään, jos

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{2^N} < 10^{-7} &\Leftrightarrow 5\,000\,000 < 2^N \\ &\Leftrightarrow \ln(5\,000\,000) < N \cdot \ln 2 \\ &\Leftrightarrow 22,3 < N \end{aligned}$$

Excelillä saamme arvion

$$A \approx \sum_{k=0}^{23} \frac{1}{(2^k + 1)} + \frac{1,5}{2^{23}} = 1.26449984 \approx 1.264500$$

**4. Suppenevatko seuraavat sarjat? (Ohje: Suhdetesti, lause 4.4.4 sivu 108.)**

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)2^k} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)2^k} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)2^k}$$

a) suhdetesti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)}{(n+2)2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)2^n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2}{2n(n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 4n} \right) = \frac{1}{2} < 1 \\ &\rightarrow \text{ sarja suppenee.} \end{aligned}$$

b) suhdetesti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2}{(n+2)2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)2^n}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2(n+1)}{2n^2(n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{2n^3 + 4n^2} \right) = \frac{1}{2} < 1 \\ &\rightarrow \text{ sarja suppenee.} \end{aligned}$$

c) suhdetesti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)2^n}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\frac{(n+1)^n}{n^n}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{(n+1)^2}{2(n+2)}}_{\rightarrow \infty} \right) = \infty > 1 \\ &\rightarrow \text{ sarja hajaantuu.} \end{aligned}$$

*Kommentti:* Kuten tehtävässä 3 teemme taas hieman ylimääräistä työtä ja selvitämme summan arvon miljoonasosan tarkkuudella. Laskemme  $N - 1$  ensimmäistä termiä erikseen ( $k = 1, 2, \dots, N - 1$ ) ja arvioimme loppusummaa  $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$  erikseen. Saamme loppusummalle alaja ylärajan täsmälleen samoin kuin tehtävässä 3.

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^k} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k}{(k+1)2^k} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^N} < \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \frac{2}{2^N}$$

Voimme siis arvioida, että

$$A \approx \sum_{k=1}^N \frac{k}{(k+1)2^k} + \frac{1,5}{2^N},$$

ja virhe on enintään  $0,5/2^N$ . Haluttuun tarkkuuteen päästään, jos  $0,5/2^N < 10^{-7}$  eli  $N > 22,3$ . Excelillä saamme arvion

$$\text{summa} \approx \sum_{k=1}^{23} \frac{k}{(k+1)2^k} + \frac{1,5}{2^{23}} = 0.6137057031 \approx 0.613706$$

b-kohdan sarja on selkeästi haastavampi kuin edeltävät. Voimme arvioida loppusummaa seuraavasti

$$0.5 \cdot \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)2^k} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

$$\Leftrightarrow 0.5 \cdot S_N < \sum_{k=N}^{\infty} a_k < S_N, \quad S_N = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Määritellään funktio  $f(x)$  sarjan avulla

$$f(x) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^k = \frac{x^N}{2^N} \cdot \frac{1}{(1-x/2)} = \frac{1}{2^{N-1}} \cdot \frac{x^N}{(2-x)}$$

Funktion  $f(x)$  derivaatta on

$$f'(x) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^{k-1} = \frac{1}{2^{N-1}} \cdot \frac{Nx^{N-1}(2-x) + x^N}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{x^{N-1}}{2^{N-1}} \cdot \frac{(N(2-x) + x)}{(2-x)^2}$$

$$S_N = f'(1) = \frac{N+1}{2^{N-1}}$$

Kokeilemalla löytyy raja  $S_N < 10^{-7}$ , jos  $N \geq 30$ . Excelillä saamme nyt arvion

$$\text{summa} \approx \sum_{k=1}^{30} \frac{k^2}{(k+1)2^k} + 0,75 \cdot \frac{31}{2^{29}} = 1.3862943755 \approx 1.386294$$

5. a-kohdan sarja suppenee. Selvitä onko sarjan summa positiivinen vai negatiivinen. b-kohdan sarja ei suppene. Laske b-sarjan ensimmäisiä osasummia. Voiko hajaantumisen perustella Cauchyn yleisen suppenemiskriteerin avulla?

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$$

a) Kirjoitetaan sarjan termit näkyviin, jotta pääsemme alkuun

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2} &= -\frac{1+1}{1^2} + \frac{2+1}{2^2} - \frac{3+1}{3^2} + \frac{4+1}{4^2} - \frac{5+1}{5^2} + \frac{6+1}{6^2} - \dots \\ &= -2 + \frac{3}{4} - \frac{4}{9} + \frac{5}{16} - \frac{6}{25} + \frac{7}{36} - \dots \end{aligned}$$

Sarja vuorottelee (alternoi) ja termien itseisarvot lähestyvät nollaa monotonisesti. Leibnizin lauseen nojalla sarja suppenee. Osasummien jono suppenee. Tarkastellaan parillisten osasummien jonoa ( $S_{2p}$ ).

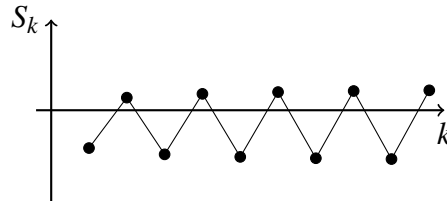
$$\begin{aligned} S_{2p} &= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k \frac{k+1}{k^2} = \left( -\frac{1+1}{1^2} + \frac{2+1}{2^2} \right) + \left( -\frac{3+1}{3^2} + \frac{4+1}{4^2} \right) + \left( -\frac{5+1}{5^2} + \frac{6+1}{6^2} \right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^p \left( \frac{-2n}{(2n-1)^2} + \frac{2n+1}{(2n)^2} \right) = \sum_{n=1}^p \left( \frac{(2n+1)(2n-1)^2 - 2n(2n)^2}{(2n)^2(2n-1)^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^p \underbrace{\left( \frac{-4n^2 - 2n + 1}{(2n)^2(2n-1)^2} \right)}_{< 0, \text{ kaikilla } n} < 0, \text{ kaikilla } p \end{aligned}$$

Sarjan summa on siis negatiivinen.

b)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^1 (-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{-1}{2} = -0.5 \\ S_2 &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \\ S_3 &= \sum_{k=1}^3 (-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{14}{24} \\ S_4 &= \sum_{k=1}^4 (-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{26}{120} \\ S_5 &= \sum_{k=1}^5 (-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} = -\frac{444}{720} \\ S_6 &= \sum_{k=1}^6 (-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} = \frac{1212}{5040} \end{aligned}$$

Osasummien jonon graafi on



Cauchyn suppenemiskriteerin mukaan osasumman itseisarvo

$$|S_n^{n+p}| = |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}|$$

saadaan miten pieneksi tahansa, kunhan  $n$  on riittävän iso. Tästä seuraa, että suppenevalle sarjalle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Tämä ei ole nyt totta, joten sarja hajaantuu.

**6.** Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet. Millä  $x$ :n arvoilla potenssisarjat supenevat? ( $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1$ )

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (x-5)^k \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-5)^k$$

a)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow R = \frac{1}{L} = 2.$$

Potenssisarja suppenee, kun

$$\begin{aligned} |x-a| < R &\Leftrightarrow |x-5| < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 < x-5 < 2 \\ &\Leftrightarrow 3 < x < 7 \end{aligned}$$

b)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = 0$$

$$\rightarrow R = \infty.$$

Potenssisarja suppenee kaikilla  $x$ :n arvoilla.

*Vastaus:* a) Suppenemissäde on  $R = 2$ , ja sarja suppenee, kun  $3 < x < 7$ .

b) Suppenemissäde on  $R = \infty$ , ja sarja suppenee kaikilla  $x$ :n arvoilla.