Vaasan yliopisto, kevät 2015 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

7. harjoitus, viikko 17

R1	ma	16–18	D115	(20.4.)
R2	ke	12–14	B209	(22.4.)

1. Määritä funktiolle $f(x) = \sqrt{1+0{,}1x}$ Taylorin sarja kehityskeskuksena $a = 80$.

2. Mikä on edellisessä tehtävässä saadun potenssisarjan suppenemissäde R?

3. a) Määritä MacLaurinin sarja funktiolle $f(x) = \sqrt{1+3x}$ ja b) määritä samalle funktiolle Taylorin sarja kehityskeskuksena $a = 1$.

4. Puutteen sallivan varastomallin tavoitefunktion muunnelmalle

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{KD}{x} + \frac{y^2 h}{2x} + \frac{(x-y)^2 s}{2x} + 2(x-y) \\ &= KDx^{-1} + \frac{1}{2}(h+s)x^{-1}y^2 + \left(\frac{s}{2}+2\right)x - (s+2)y \end{aligned}$$

gradienttivektori ja Hessin matriisi ovat

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -\frac{KD}{x^2} - \frac{(h+s)y^2}{2x^2} + \frac{s}{2} + 2 \\ \frac{(h+s)y}{x} - s - 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{2KD}{x^3} + \frac{(h+s)y^2}{x^3} & -\frac{(h+s)y}{x^2} \\ -\frac{(h+s)y}{x^2} & \frac{(h+s)}{x} \end{pmatrix}$$

Mallissa x on tilauserän koko, y on maksimi varasto, $x-y$ on maksimi puute. Ilman tavoitefunktion termiä ”$2(x-y)$” optimipiste olisi

$$x^* = \sqrt{\frac{h+s}{s}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}, \qquad y^* = \sqrt{\frac{s}{h+s}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}.$$

Olkoon $D = 10000$, $K = 18$, $h = 9$, $s = 16$. Määritä muunnetun varastomallin optimiarvot päätösmuuttujille x ja y. Jos käsin laskeminen tuntuu vaikealta, niin sovella kvadraattista optimointia iteroimalla

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \boldsymbol{H}^{-1}\nabla f(x_k,y_k).$$

Kommentti: Tälle tehtävälle löytyy siisti ratkaisu (jopa käsin laskettuna).

5. Tutkimme funktiota $g(x)$, joka toteuttaa yhtälön $g'(x) = 2\cdot g(x)$ kaikilla x. Jos g:llä on suppeneva sarjakehitelmä, niin g':n sarjakehitelmä saadaan derivoimalla termeittäin

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \\ \Rightarrow \quad g'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots \end{aligned}$$

a) Mitkä ovat sarjakehitelmän kertoimet c_k, jos $g(0) = 3$ ja $g'(x) = 2g(x)$?
b) Mikä tämä ratkaisufunktio on?

6. Määritä vastaavalla tavalla kuin tehtävässä 3 funktion $y(x)$ MacLaurinin sarjan kertoimet, kun $y(0) = 0$ ja

$$x\cdot y'(x) = y(x).$$