Vaasan yliopisto, kevät 2015 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

7. harjoitus, viikko 17

R1	ma	16–18	D115	(20.4.)
R2	ke	12–14	B209	(22.4.)

1. Määritä funktiolle $f(x) = \sqrt{1+0{,}1x}$ Taylorin sarja kehityskeskuksena $a = 80$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+0{,}1x)^{1/2},\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+0{,}1x)^{-1/2}\cdot 0{,}1 = \frac{1}{2\cdot 10}(1+0{,}1x)^{-1/2},\\
f''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 10}(1+0{,}1x)^{-3/2}\cdot 0{,}1 = -\frac{1}{2^2\cdot 10^2}(1+0{,}1x)^{-3/2},\\
f'''(x) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2^2\cdot 10^2}\right)(1+0{,}1x)^{-5/2}\cdot 0{,}1 = \frac{3\cdot 1}{2^3\cdot 10^3}(1+0{,}1x)^{-5/2},\\
f^{(4)}(x) &= \quad\dots\quad = \frac{-5\cdot 3\cdot 1}{2^4\cdot 10^4}(1+0{,}1x)^{-7/2},\\
f^{(5)}(x) &= \quad\dots\quad = \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^5\cdot 10^5}(1+0{,}1x)^{-9/2},\\
f^{(k)}(x) &= \quad\dots\quad = \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k\cdot 10^k}(1+0{,}1x)^{-(2k-1)/2},
\end{aligned}
$$

missä kertomassa $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ ovat vain parittomat tekijät, ja kertomassa $8!! = 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$ ovat vain parilliset tekijät. Seuraavaksi laskemme derivaattojen arvot kehityskeskuksessa.

$$
\begin{aligned}
f(80) &= 3,\\
f'(80) &= \frac{1}{2\cdot 10\cdot 3},\\
f''(80) &= -\frac{1}{2^2\cdot 10^2\cdot 3^3},\\
f'''(80) &= \frac{3\cdot 1}{2^3\cdot 10^3\cdot 3^5},\\
f^{(4)}(80) &= \frac{-5\cdot 3\cdot 1}{2^4\cdot 10^4\cdot 3^7},\\
f^{(5)}(80) &= \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^5\cdot 10^5\cdot 3^9},\\
f^{(k)}(80) &= \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k\cdot 10^k\cdot 3^{(2k-1)}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\\
&= 3 + \frac{1}{2\cdot 10\cdot 3}(x-80) - \frac{1}{2^2\cdot 10^2\cdot 3^3\cdot 2!}(x-80)^2 + \dots\\
&\qquad \dots + \frac{3\cdot 1}{2^3\cdot 10^3\cdot 3^5\cdot 3!}(x-80)^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^4\cdot 10^4\cdot 3^7\cdot 4!}(x-80)^4 + \dots\\
&= 3 + \frac{1}{60}(x-80) - \frac{3}{7200}(x-80)^2 + \frac{15}{1296000}(x-80)^3 - \frac{105}{311040000}(x-80)^4 + \dots
\end{aligned}
$$

2. Mikä on edellisessä tehtävässä saadun potenssisarjan suppenemissäde R?

Edellisen tehtävän mukaan

$$c_k = \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!}{2^k \cdot 10^k \cdot 3^{2k-1} \cdot k!}.$$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2(n+1)-3)!!}{(2^{(n+1)}\cdot 10^{(n+1)}\cdot 3^{(2(n+1)-1)})\cdot(n+1)!}\cdot\frac{(2^n\cdot 10^n\cdot 3^{2n-1})\cdot n!}{(2n-3)!!}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2(n+1)-3)}{2\cdot 10\cdot 3^2\cdot(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)}{90\cdot(2n+2)}\right) = \frac{1}{90} \\
&\longrightarrow R = \frac{1}{L} = 90.
\end{aligned}$$

Siis sarja suppenee jos

$$\begin{aligned}
& & |x-80| &< 90 \\
\Leftrightarrow -90 &< & x-80 &< 90 \\
\Leftrightarrow -10 &< & x &< 170
\end{aligned}$$

3. a) Määritä MacLaurinin sarja funktiolle $f(x) = \sqrt{1+3x}$ ja b) määritä samalle funktiolle Taylorin sarja kehityskeskuksena $a = 1$.

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+3x)^{1/2}, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+3x)^{-1/2}\cdot 3 = \frac{3}{2}(1+3x)^{-1/2}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1+3x)^{-3/2}\cdot 3 = -\frac{1\cdot 3^2}{2^2}(1+3x)^{-3/2}, \\
f'''(x) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1\cdot 3^2}{2^2}\right)(1+3x)^{-5/2}\cdot 3 = \frac{3\cdot 3^3}{2^3}(1+3x)^{-5/2}, \\
f^{(4)}(x) &= \quad\ldots\quad = \frac{-5\cdot 3\cdot 3^4}{2^4}(1+3x)^{-7/2}, \\
f^{(5)}(x) &= \quad\ldots\quad = \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 3^5}{2^5}(1+3x)^{-9/2}, \\
f^{(k)}(x) &= \quad\ldots\quad = \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!\cdot 3^k}{2^k}(1+3x)^{-(2k-1)/2},
\end{aligned}$$

missä kertomassa $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ ovat vain parittomat tekijät, ja kertomassa $8!! = 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$ ovat vain parilliset tekijät. Seuraavaksi laskemme derivaattojen arvot kehityskeskuksessa.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, \\
f'(0) &= \frac{3}{2}, \\
f''(0) &= -\frac{3^2}{2^2}, \\
f'''(0) &= \frac{3\cdot 3^3}{2^3}, \\
f^{(4)}(0) &= \frac{-5\cdot 3\cdot 3^4}{2^4},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^{(5)}(0) &= \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 3^5}{2^5},\\
f^{(k)}(0) &= \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!\cdot 3^k}{2^k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\\
&= 1+\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3^2}{2^2\cdot 2!}\cdot x^2+\frac{3\cdot 3^3}{2^3\cdot 3!}\cdot x^3-\frac{5\cdot 3\cdot 3^4}{2^4\cdot 4!}\cdot x^4+\dots\\
&= 1+\frac{3}{2}\cdot x-\frac{9}{8}\cdot x^2+\frac{27}{16}\cdot x^3-\frac{405}{128}\cdot x^4+\dots
\end{aligned}
$$

b) Derivaattojen lausekkeet laskettiin jo a-kohdassa. Seuraavaksi laskemme derivaattojen arvot kehityskeskuksessa $x=1$.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= (1+3\cdot 1)^{1/2}=2,\\
f'(1) &= \frac{3}{2}\cdot 2^{-1}=\frac{3}{2^2},\\
f''(1) &= -\frac{3^2}{2^2}\cdot 2^{-3}=-\frac{3^2}{2^5},\\
f'''(1) &= \frac{3\cdot 3^3}{2^3}\cdot 2^{-5}=\frac{3\cdot 3^3}{2^8},\\
f^{(4)}(1) &= \frac{-5\cdot 3\cdot 3^4}{2^4}\cdot 2^{-7}=\frac{-5\cdot 3\cdot 3^4}{2^{11}},\\
f^{(5)}(1) &= \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 3^5}{2^5}\cdot 2^{-9}=\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 3^5}{2^{14}},\\
f^{(k)}(1) &= \frac{(-1)^{k+1}(2k-3)!!\cdot 3^k}{2^{3k-1}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\\
&= 2+\frac{3}{2^2}\cdot(x-1)-\frac{3^2}{2^5\cdot 2!}\cdot(x-1)^2+\frac{3\cdot 3^3}{2^8\cdot 3!}\cdot(x-1)^3-\frac{5\cdot 3\cdot 3^4}{2^{11}\cdot 4!}\cdot(x-1)^4+\dots\\
&= 2+\frac{3}{4}\cdot(x-1)-\frac{9}{64}\cdot(x-1)^2+\frac{27}{512}\cdot(x-1)^3-\frac{405}{16384}\cdot(x-1)^4+\dots
\end{aligned}
$$

4. Puutteen sallivan varastomallin tavoitefunktion muunnelmalle

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{KD}{x}+\frac{y^2h}{2x}+\frac{(x-y)^2s}{2x}+2(x-y) \\ &= KDx^{-1}+\frac{1}{2}(h+s)x^{-1}y^2+\left(\frac{s}{2}+2\right)x-(s+2)y \end{aligned}$$

gradienttivektori ja Hessin matriisi ovat

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -\frac{KD}{x^2}-\frac{(h+s)y^2}{2x^2}+\frac{s}{2}+2 \\ \frac{(h+s)y}{x}-s-2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{2KD}{x^3}+\frac{(h+s)y^2}{x^3} & -\frac{(h+s)y}{x^2} \\ -\frac{(h+s)y}{x^2} & \frac{(h+s)}{x} \end{pmatrix}$$

Mallissa x on tilauserän koko, y on maksimi varasto, $x-y$ on maksimi puute. Ilman tavoitefunktion termiä "$2(x-y)$" optimipiste olisi

$$x^* = \sqrt{\frac{h+s}{s}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}, \qquad y^* = \sqrt{\frac{s}{h+s}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}.$$

Olkoon $D = 10000$, $K = 18$, $h = 9$, $s = 16$. Määritä muunnetun varastomallin optimiarvot päätösmuuttujille x ja y. Jos käsin laskeminen tuntuu vaikealta, niin sovella kvadraattista optimointia iteroimalla

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \boldsymbol{H}^{-1}\nabla f(x_k,y_k).$$

Kommentti: Tälle tehtävälle löytyy siisti ratkaisu (jopa käsin laskettuna).

Välttämätön ehto $\nabla f = \vec{0}$ johtaa yhtälöpariin

$$\begin{cases} -\frac{KD}{x^2}-\frac{(h+s)y^2}{2x^2}+\frac{s}{2}+2 = 0 & (1) \\ \frac{(h+s)y}{x}-s-2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Yhtälöstä (2) saamme suhteen y/x

$$\frac{y}{x} = \frac{s+2}{h+s} \qquad (3).$$

Kun sijoitamme tämän suhteen arvon yhtälön (1) toiseen termiin, saamme

$$\begin{aligned} -\frac{KD}{x^2}-\frac{(h+s)(s+2)^2}{2(h+s)^2}+\frac{s}{2}+2 &= 0 \\ -\frac{KD}{x^2}-\frac{(s+2)^2}{2(h+s)}+\frac{s}{2}+2 &= 0 \\ \frac{-(s+2)^2+s(h+s)+4(h+s)}{2(h+s)} &= \frac{KD}{x^2} \\ \frac{-s^2-4s-4+sh+s^2+4h+4s}{2(h+s)} &= \frac{KD}{x^2} \\ \frac{-4+sh+4h}{2(h+s)} &= \frac{KD}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-4/h+s+4}{(h+s)} &= \frac{2KD}{hx^2}\\ \longrightarrow x^* = \sqrt{\frac{(h+s)}{s+(4-4/h)}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}\end{aligned}$$

Kun sijoitamme tämän yhtälöön (3), saamme

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{s+2}{h+s}\cdot x^* = \frac{(s+2)}{(h+s)}\cdot\sqrt{\frac{(h+s)}{s+(4-4/h)}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}\\ &= \sqrt{\frac{(s+2)^2}{(s+h)(s+4-4/h)}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}\end{aligned}$$

Tehtävän arvoilla Siis

$$\begin{aligned} x^* &= \sqrt{\frac{(h+s)}{s+(4-4/h)}}\cdot\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{(9+16)}{16+(4-4/9)}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 10000}{9}}\\ &= 226.13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^* &= \sqrt{\frac{(s+2)^2}{(s+h)(s+4-4/h)}}\cdot\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{(16+2)^2}{(16+9)(16+4-4/9)}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 10000}{9}}\\ &= 162{,}82\end{aligned}$$

Lisäanalyysi: Tutkimme ongelmaa myös kvadraattisen optimoinnin hengessä. Jos Tavoitefunktioon ei olisi lisätty tehtävässä mainitua epätavallista lisätermiä "$2(x-y)$", niin optimiarvot olisivat

$$\begin{aligned} x^* &= \sqrt{\frac{h+s}{s}}\cdot\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{9+16}{16}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 10000}{9}} = 250\\ y^* &= \sqrt{\frac{s}{s+h}}\cdot\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{16}{16+9}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 18\cdot 10000}{9}} = 160\end{aligned}$$

Nämä ovat luonnolliset lähtöarvot numeerisessa etsimisessä. Asetamme

$$\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250\\ 160\end{pmatrix},\quad \text{ja}\quad \begin{pmatrix} x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k\\ y_k\end{pmatrix} - \boldsymbol{H}^{-1}\nabla f$$

Ohjelma Octavella:

```
D = 10000;
K = 18;
h = 9;
s = 16;

N=10;
V = zeros(N,2);
w = [250; 160]; # = [x0; y0]
for j=1:N
        # viimeiset arvot x:lle ja y:lle
```

```
  x = w(1,1);
  y = w(2,1);
          # gradientti-vektori
  g1 = -K*D/(x^2)-((h+s)*y^2)/(2*x^2)+s/2+2;
  g2 = (h+s)*y/x-s-2;
  g  = [g1;g2];
          # Hessin matriisi
  h11 = 2*K*D/x^3+(h+s)*y^2/x^3;
  h12 = -(h+s)*y/(x^2);
  h22 = (h+s)/x;
  H = [h11 h12; h12 h22];
          # etsintaaskel
  w = w-inv(H)*g;
          # arvot talteen x-> w1, y-> w2
  V(j,:) = w';
endfor
V

# #### output ##########################
# V =
#
#    218.75    160.00
#    225.73    162.60
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
#    226.13    162.82
```

5. Tutkimme funktiota $g(x)$, joka toteuttaa yhtälön $g'(x) = 2 \cdot g(x)$ kaikilla x. Jos g:llä on suppeneva sarjakehitelmä, niin g':n sarjakehitelmä saadaan derivoimalla termeittäin

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \\
\Rightarrow \quad g'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots
\end{aligned}
$$

a) Mitkä ovat sarjakehitelmän kertoimet c_k, jos $g(0) = 3$ ja $g'(x) = 2g(x)$?
b) Mikä tämä ratkaisufunktio on?

Koska $g(0) = 3$, niin

$$
\begin{aligned}
3 = g(0) &= c_0 + \underbrace{c_1 \cdot 0}_{=0} + \underbrace{c_2 \cdot 0^2}_{=0} + \underbrace{c_3 \cdot 0^3}_{=0} + \dots \\
&= \longrightarrow c_0 = 3 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Koska $g'(x) - 2g(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} g'(x) - 2g(x) &= 0, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \\ (c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots) - 2(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots) &= 0, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \\ (c_1 - 2c_0) + (2c_2 - 2c_1)x + (3c_3 - 2c_2)x^2 + (4c_4 - 2c_3)x^3 + \ldots &= 0, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c_1 - 2c_0 &=& 0 \\ 2c_2 - 2c_1 &=& 0 \\ 3c_3 - 2c_2 &=& 0 \\ 4c_4 - 2c_3 &=& 0 \\ \ldots \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c_1 &=& 2c_0 \\ 2c_2 &=& 2c_1 \\ 3c_3 &=& 2c_2 \\ 4c_4 &=& 2c_3 \\ \ldots \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} c_1 &=& 2c_0 \\ c_2 &=& 2c_1/2 = 2^2c_0/2! \\ c_3 &=& 2c_2/3 = 2^3c_0/3! \\ c_4 &=& 2c_3/4 = 2^4c_0/4! \\ \ldots \end{array} \right.$$

Siis

$$\begin{aligned} g(x) &= c_0 + 2c_0x + \frac{2^2c_0}{2!}x^2 + \frac{2^3c_0}{3!}x^3 + \frac{2^4c_0}{4!}x^4 + \ldots \\ &= c_0\left(1 + (2x) + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \ldots\right) \\ &= 3e^{2x} \end{aligned}$$

6. Määritä vastaavalla tavalla kuin tehtävässä 3 funktion $y(x)$ MacLaurinin sarjan kertoimet, kun $y(0) = 0$ ja

$$x \cdot y'(x) = y(x).$$

$$\begin{array}{rcccccccccccc} y(x) &=& c_0 &+& c_1x &+& c_2x^2 &+& c_3x^3 &+& c_4x^4 &+& \ldots \\ y'(x) &=& c_1 &+& 2c_2x &+& 3c_3x^2 &+& 4c_4x^3 &+& 5c_5x^4 &+& \ldots \\ x \cdot y'(x) &=& & & c_1x &+& 2c_2x^2 &+& 3c_3x^3 &+& 4c_4x^3 &+& \ldots \end{array}$$

Ensimmäisen rivin ja kolmannen rivin saman asteen termien kertoimet tulee olla samat. Siis

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c_0 &=& 0 \\ c_1 &=& c_1 \\ c_2 &=& 2c_2 \\ c_3 &=& 3c_3 \\ c_4 &=& 4c_4 \\ c_5 &=& 5c_5 \\ \ldots \end{array} \right.$$

Siis c_1 on vapaa, mutta muut kertoimet ovat kaikki nollia. Siis

$$y(x) = c_1x, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$