

Matemaattinen Analyysi**8. harjoitus, viikko 18**

R1	ma	16–18	D115	(27.4.)
R2	ke	12–14	B209	(29.4.)

1. Määritä funktion $y(x)$ MacLaurinin sarjan kertoimet, kun $y(0) = 2$ ja

$$y'(x) = x(x - y(x)).$$

Lasketaan ensin ratkaisufunktion derivaattoja:

$$y'(x) = x^2 - x \cdot y(x)$$

$$y''(x) = 2x - y(x) - x \cdot y'(x)$$

$$y'''(x) = 2 - y'(x) - y'(x) - x \cdot y''(x) = 2 - 2y'(x) - x \cdot y''(x)$$

$$y''''(x) = -2y''(x) - y''(x) - xy'''(x) = -3y''(x) - x \cdot y'''(x)$$

$$y^{(5)}(x) = -3y^{(3)}(x) - y^{(3)}(x) - x \cdot y^{(4)}(x) = -4y^{(3)}(x) - x \cdot y^{(4)}(x)$$

$$y^{(6)}(x) = -4y^{(4)}(x) - y^{(4)}(x) - x \cdot y^{(5)}(x) = -5y^{(4)}(x) - x \cdot y^{(5)}(x)$$

$$y^{(k)}(x) = -(k-1)y^{(k-2)}(x) - x \cdot y^{(k-1)}(x)$$

Derivaattojen arvot kehityskeskukseksi ovat

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0^2 - 0 \cdot 2 = 0$$

$$y''(0) = 2 \cdot 0 - 2 - 0 \cdot 0 = -2$$

$$y'''(0) = 2 - 2 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) = 2$$

$$y^{(4)}(0) = -3 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 = 6$$

$$y^{(5)}(0) = -4 \cdot 2 - 0 \cdot 6 = -8$$

$$y^{(6)}(0) = -5 \cdot 6 - 0 \cdot (-8) = -30$$

$$y^{(7)}(0) = -6 \cdot (-8) - 0 \cdot (-30) = 48$$

$$y^{(8)}(0) = -7 \cdot (-30) - 0 \cdot 48 = 210$$

$$y^{(k)}(0) = -(k-1) \cdot y^{(k-2)}(0)$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisufunktion Maclaurinin sarja on silloin

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= 2 + 0 \cdot x + \frac{-2}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 + \frac{6}{4!} \cdot x^4 + \frac{-8}{5!} \cdot x^5 + \frac{-30}{6!} \cdot x^6 + \frac{48}{7!} \cdot x^7 + \frac{210}{8!} \cdot x^8 - \dots \\ &= 2 - x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{15} \cdot x^5 - \frac{1}{24} \cdot x^6 + \frac{1}{105} \cdot x^7 + \frac{1}{192} \cdot x^8 \dots \\ &\quad \dots - \frac{1}{945} \cdot x^9 - \frac{1}{1920} \cdot x^{10} + \frac{1}{10395} \cdot x^{11} + \frac{1}{23040} \cdot x^{12} + \frac{1}{135135} \cdot x^{13} + \frac{1}{322560} \cdot x^{14} + \dots \end{aligned}$$

Kommentti: Tehtävä on nyt suoritettu. Teemme seuraavaksi vielä suppenemis-tarkastelun ja piirrämme funktion kuvaajan. Tätä ei tehtävässä vaadittu, mutta koska seuraavassa tehtävässä DY:n ratkaiseminen suljetussa-muodossa epäonnistuu, niin ratkaisun saaminen potenssi-sarja -muodossa saa lisää merkitystä.

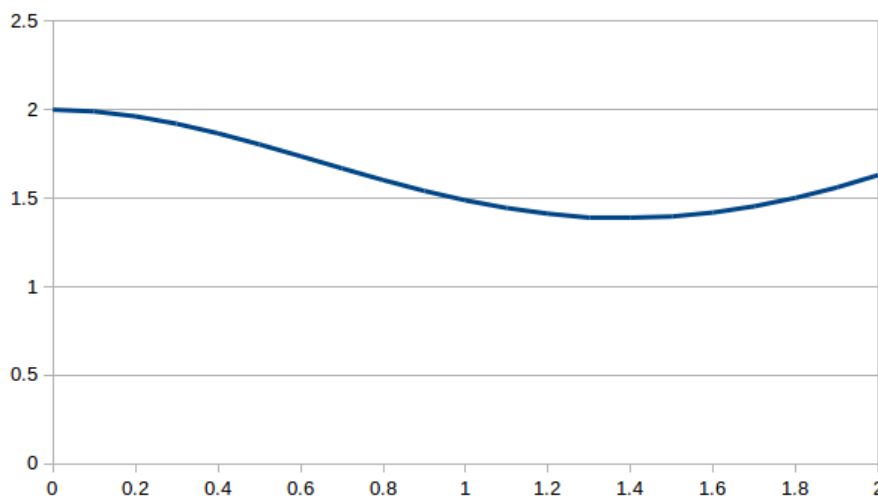
Ratkaisufunktion sarjakehitelmä voidaan jakaa parittomaan ja parilliseen osaan

$$\begin{aligned} y_{\text{odd}}(x) &= \frac{1}{3 \cdot 1} \cdot x^3 - \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot x^5 + \frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot x^7 - \frac{1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot x^9 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y_{\text{even}}(x) &= 2 - \frac{2}{2} x^2 + \frac{2}{4 \cdot 2} \cdot x^4 - \frac{2}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot x^6 + \frac{2}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot x^8 - \frac{2}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot x^{10} + \dots \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n)!!} x^{2n} \end{aligned}$$

Sarjat suppenevat kaikilla x :n arvoilla, mutta termejä tulee ottaa summaan mukaan melko paljon. Kun sarjaan otetaan 20 termiä, niin funktion kuvaajaksi tulee:



2. Ratkaise differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut

(a) $y' + xy = 0$

(b) $y' + xy = x^2$

a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -xy &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -x dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x dx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C_1 \\ &\Leftrightarrow y(x) = C \cdot e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

b) Tutkittavana on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö (DY). Erotetaan DY ja vastaava homogeeninen yhtälö (HY).

$$(DY) \quad y' + xy = x^2$$

$$(HY) \quad y' + xy = 0$$

HY ratkaistiin jo tehtävän a-kohdassa, joten saamme sen yleisen ratkaisun sieltä:

$$y_0(x) = C \cdot e^{-x^2/2}.$$

DY:n yksityisratkaisua varten teemme yrittien:

$$\text{yrite : } y_1(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_1'(x) = 2Ax + B.$$

Kun sijoitamme yrittien DY:öön, saamme

$$\begin{aligned} (DY) : \quad & y' + xy = x^2 \\ \Leftrightarrow & (2Ax + B) + x(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \\ \Leftrightarrow & Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + B = x^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ 2A + C = 0 \\ B = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten yrite epäonnistui. Melko pian huomaa, että mikään polynomi -tyyppinen yrite ei onnistu. Seuraava menetelmä järjestyksessä on vakion variointi (ks. opetusmoniste s. 131-133). Menetelmä antaa yksityisratkaisun muodossa

$$y_1(x) = e^{-x^2/2} \cdot \int x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} dx$$

Lausekkeen sisältämä integraali ei ole helppo. Integraalia pystyy yksinkertaistamaan osittais-integroinnilla, mutta senkin jälkeen integraalia ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla. (Jos voitaisiin, niin silloin myös normaalijakauman tiheysfunktiolle olisi esitys alkeisfunktioiden avulla. Tämä on tunnetusti mahdotonta.)

Emme siis saa DY:n yksityisratkaisua lausuttua mitenkään yksinkertaisella tavalla.

MUTTA tehtävässä 1 saimme sille potenssisarjan. Jos tehtävän 1 ratkaisufunktio on $\tilde{y}_1(x)$, niin tehtävän 2b) ratkaisu on

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \tilde{y}_1(x) = C \cdot e^{-x^2/2} + \tilde{y}_1(x) \\ &= C \cdot e^{-x^2/2} + 2 - x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{15} \cdot x^5 - \frac{1}{24} \cdot x^6 + \frac{1}{105} \cdot x^7 + \frac{1}{192} \cdot x^8 \dots \end{aligned}$$

3. Ratkaise $xy' = x^2 - y$, ($x > 0$), kun $y(1) = 0.5$.

Tutkittavana on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö (DY). Erotetaan DY ja vastaava homogeeninen yhtälö (HY).

$$(DY) \quad xy' + y = x^2,$$

$$(HY) \quad xy' + y = 0.$$

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} (HY) \quad \frac{x \cdot dy}{dx} = -y &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \\ &\Leftrightarrow y_0(x) = C \cdot x^{-1} \end{aligned}$$

DY:n yksityisratkaisua varten teemme yrittteen:

$$\begin{aligned} \text{yrite : } y_1(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ y_1'(x) &= 2Ax + B. \end{aligned}$$

Kun sijoitamme yrittteen DY:öön, saamme

$$\begin{aligned} (DY) : \quad xy' + y &= x^2 \\ \Leftrightarrow x(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) &= x^2 \\ \Leftrightarrow 3Ax^2 + 2Bx + C &= x^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ 2B = 0 \\ C = 0 \end{cases} &\longrightarrow y_1(x) = \frac{1}{3}x^2. \end{aligned}$$

DY:n yleinen ratkaisu on siis:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{3}.$$

Alkuarvo $y(1) = 0.5$ määrää integroimisvakion C .

$$\begin{aligned} y(1) = \frac{1}{2} &\longrightarrow \frac{C}{1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow C = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ratkaisu:

$$y(x) = \frac{1}{6x} + \frac{x}{3}.$$

4. Luennolla käsiteltiin seuraavaa kulutustuotteen markkinoita kuvaavaa mallia:

Tuotteen hinta on p ja määrä varastossa on q . Tuotteen kysyntä on $D = a_1 - b_1p$ ja tarjonta on $S = -a_2 + b_2p$. Varaston muutosnopeus on $q' = S - D$. Varastoja pyritään pitämään keskimäärin suunnitellun kokoisena q^e samoin hintaa pyritään ohjaamaan tavoitearvoonsa p^e . Hintaa ohjataan tätä varten niin, että

$$dp/dt = \alpha(q^e - q) + \beta(p^e - p).$$

Oletamme, että kaikke edellä esiintyneet vakiot $a_1, b_1, a_2, b_2, q^e, p^e, \alpha, \beta$ ovat positiivisia. Luennolla tehdyn analyysin perusteella mallin tasapaino on stabiili ja tasapainohinta on

$$p_1(t) = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

(Ohje: Toisen kertaluvun vakiokertoimisen lineaarisen DY:n $ay'' + by' + cy = d$ tasapainoratkaisu on stabiili, joss $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$.)

Miten malli muuttuu ja miten mallin stabiilisuus muuttuu, jos asiakkaat lykkäävät ostojaan hinnan ollessa laskussa ja aientavat ostojaan hinnan ollessa nousussa. Mallinamme asian muuttamalla mallin kysynnän hintariippuvuuden seuraavan kaltaiseksi

$$D = a_1 - b_1p + c_1p',$$

missä $c_1 > 0$.

$$\begin{aligned} p' &= \alpha \cdot q^e - \alpha \cdot q + \beta \cdot p^e - \beta \cdot p \\ \rightarrow p'' &= -\alpha \cdot q' - \beta \cdot p' \\ \Leftrightarrow p'' + \beta \cdot p' &= -\alpha \cdot [S - D] \\ \Leftrightarrow p'' + \beta \cdot p' &= -\alpha \cdot [(-a_2 + b_2p) - (a_1 - b_1p + c_1p')] \\ \Leftrightarrow p'' + (\beta - \alpha \cdot c_1)p' + \alpha(b_1 + b_2) &= \alpha(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

Nyt on selvää, että tasapaino ratkaisu on edelleen

$$p_1(t) = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}.$$

Se ei siis muutu. Tasapaino on stabiili, jos

$$\beta - \alpha \cdot c_1 > 0.$$

5. Ratkaise $y'' + 5y' + 4y = x$.

$$(DY:)\quad y'' + 5y' + 4y = x,$$

$$(HY:)\quad y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Karakteristinen yhtälö:

$$r^2 + 5r + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$
$$\Leftrightarrow r_1 = -1, \text{ ja } r_2 = -4.$$

HY:n yleinen ratkaisu:

$$y_0(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$$

DY:n yksityisratkaisu yrittäessä: $y_1(x) = Ax + B$

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x) = Ax + B \\ y_1'(x) = A \\ y_1''(x) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sisj.}} \quad (DY:)\quad y'' + 5y' + 4y = x$$
$$\Leftrightarrow 0 + 5A + 4(Ax + B) = x$$
$$\Leftrightarrow 4Ax + (5A + 4B) = x$$
$$\Leftrightarrow A = 1/4 \text{ ja } B = -5/16.$$

$$y_1(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{16}$$

DY:n yleinen ratkaisu: $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$. Siis

$$\text{Vastaus: } y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{16}.$$

Tarkistus:

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{16} \\ y'(x) = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x} + \frac{1}{4} \\ y''(x) = C_1 e^{-x} + 16C_2 e^{-4x} \\ (DY:)\quad y'' + 5y' + 4y = x \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow (DY:)\quad (C_1 e^{-x} + 16C_2 e^{-4x}) + 5(-C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}) + \dots$$
$$\dots + 4(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{16}) = x \quad \text{OK!}$$

6. Ratkaise $2y'' + 6y' - 8y = 160$, kun $y(0) = 9$ ja $y'(0) = 2$

$$(DY:)\quad 2y'' + 6y' - 8y = 160,$$

$$(HY:)\quad 2y'' + 6y' - 8y = 0.$$

Karakteristinen yhtälö:

$$2r^2 + 6r - 8 = 0 \rightarrow r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$
$$\Leftrightarrow r_1 = 1, \text{ ja } r_2 = -4.$$

HY:n yleinen ratkaisu:

$$y_0(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

DY:n yksityisratkaisu yritteellä: $y_1(x) = A$

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x) = A \\ y_1'(x) = 0 \\ y_1''(x) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sisj.}} \quad (DY:)\quad 2y'' + 6y' - 8y = 160$$
$$\Leftrightarrow 0 + 0 - 8A = 160$$
$$\Leftrightarrow A = -20$$

$$y_1(x) = -20$$

DY:n yleinen ratkaisu: $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$. Siis

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - 20,$$
$$y'(x) = C_1 e^x - 4C_2 e^{-4x}.$$

Alkuarvot:

$$\begin{cases} y(0) = 9 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - 20 = 9 \\ C_1 - 4C_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 23,6 \\ C_2 = 5,4 \end{cases}$$

$$\text{Vastaus: } y(x) = 23,6e^x + 5,4e^{-4x} - 20.$$

Tarkistus:

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = 23,6e^x + 5,4e^{-4x} - 20 \\ y'(x) = 23,6e^x - 21,6e^{-4x} \\ y''(x) = 23,6e^x + 86,4e^{-4x} \\ (DY:)\quad 2y'' + 6y' - 8y = 160 \end{array} \right\}$$
$$\rightarrow (DY:)\quad 2(23,6e^x + 86,4e^{-4x}) + \dots$$
$$\quad \dots + 6(23,6e^x - 21,6e^{-4x}) + \dots$$
$$\quad \dots - 8(23,6e^x + 5,4e^{-4x} - 20) = 160 \quad \text{OK!}$$