Vaasan yliopisto, kevät 2015 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

Opettaja: Matti Laaksonen

2. välikoe ke 29.4.2015

Ratkaise kolme tehtävää! Kokeessa saa saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa.

Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!

1. a) (2p) Mikä on Cauchyn kriteeri sarjan suppenemiselle?
b) (1p) Kirjoita seuraavan potenssisarjan viisi ensimmäistä termiä näkyviin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{2^k}(x-5)^k.$$

c) (3p) Millä x:n arvoilla b-kohdan potenssisarja suppenee?

a) Olkoon $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ tutkittavan sarjan n:s osasumma. Cauchyn kriteeri sarjan suppenemiselle sanoo, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa indeksi n_ε siten, että

$$|S_n - S_{n+p}| < \varepsilon, \text{ aina kun } n > n_\varepsilon \text{ ja } p \geq 1.$$

b)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{2^k}(x-5)^k \\
= \; & \frac{0^2+1}{2^0}(x-5)^0 + \frac{1^2+1}{2^1}(x-5)^1 + \frac{2^2+1}{2^2}(x-5)^2 + \frac{3^2+1}{2^3}(x-5)^3 + \frac{4^2+1}{2^4}(x-5)^4 + \ldots \\
= \; & 1 + (x-5) + \frac{5}{4}(x-5)^2 + \frac{10}{8}(x-5)^3 + \frac{17}{16}(x-5)^4 + \ldots
\end{aligned}$$

c) Suhdetesti

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+2}{2n^2+2}\right| = \frac{1}{2} \\
&\longrightarrow R = \frac{1}{L} = 2.
\end{aligned}$$

Sarja siis suppenee, jos

$$|x-5| < 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 < x < 7.$$

2. Muodosta Taylorin sarja (kehityskeskuksena $a = -1$) funktiolle

$$f(x) = \frac{1}{9-x}.$$

(Viisi termiä sarjassa riittää. Suppenemis-tarkastelua ei tehdä, joten k:nnen termin muotoa ei tarvitse pohtia, vaan numeroarvot kertoimille riittävät.)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (9-x)^{-1} && \longrightarrow \quad f(-1) = 1/10 \\
f'(x) &= (-1)\cdot(9-x)^{-2}\cdot(-1) = (9-x)^{-2} && \longrightarrow \quad f'(-1) = 1/100 \\
f''(x) &= (-2)\cdot(9-x)^{-3}\cdot(-1) = 2\cdot(9-x)^{-3} && \longrightarrow \quad f''(-1) = 2!/1000 \\
f'''(x) &= (-3)\cdot 2\cdot(9-x)^{-4}\cdot(-1) = 3\cdot 2\cdot(9-x)^{-4} && \longrightarrow \quad f'''(-1) = 3!/10000 \\
f''''(x) &= (-4)\cdot 3\cdot 2\cdot(9-x)^{-5}\cdot(-1) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot(9-x)^{-5} && \longrightarrow f''''(-1) = 4!/100000 \\
f^{(k)}(x) &= k!\cdot(9-x)^{-k-1} && \longrightarrow f^{(k)}(-1) = k!/10^{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x-(-1))^k = \frac{1/10}{0!}(x+1)^0 + \frac{1/100}{1!}(x+1)^1 + \frac{2!/1000}{2!}(x+1)^2 + \dots \\
&\quad \dots + \frac{3!/10000}{3!}(x+1)^3 + \frac{4!/100000}{4!}(x+1)^4 + \dots \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{100}(x+1) + \frac{1}{1000}(x+1)^2 + \frac{1}{10000}(x+1)^3 + \frac{1}{100000}(x+1)^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Vastaus:

$$
\frac{1}{9-x} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100}(x+1) + \frac{1}{1000}(x+1)^2 + \frac{1}{10000}(x+1)^3 + \frac{1}{100000}(x+1)^4 + \dots
$$

3. Tutkitaan differentiaaliyhtälöä

$$
xy' - 2y = 3x - 2.
$$

a) (1p) Mikä on DY:n kertaluku?
b) (1p) Onko DY lineaarinen?
c) (1p) Onko DY separoituva?
d) (3p) Ratkaise DY.

a) DY:n kertaluku on 1, (Korkeimman derivaatan kertaluku.)
b) DY on lineaarinen,
c) DY ei ole separoituva. (HY on separoituva, mutta DY ei ole!)
d)

$$
\begin{cases}
\text{DY}: & xy' - 2y = 3x - 2 \\
\text{HY}: & xy' - 2y = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad xy' = 2y
\end{cases}
$$

Ratkaistaan HY:n yleinen ratkaisu separoimalla

$$
\begin{aligned}
xy' = 2y \quad &\Leftrightarrow \quad x\cdot\frac{dy}{dx} = 2y \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + C_1 \\
&\Leftrightarrow \quad y = Cx^2
\end{aligned}
$$

Siis HY:n yleinen ratkaisu on $y_0(x) = Cx^2$.

Seuraavaksi etsimme DY:lle yksityisratkaisun. Teemme yritteen $y_1(x) = Ax + B$, jolloin $y_1'(x) = A$. Sijoittamalla y_1 ja y_1' differentiaaliyhtälöön, saadaan:

$$\begin{aligned} x \cdot y' - 2y &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow x \cdot A - 2(Ax + B) &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow -Ax - 2B &= 3x - 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Siis $y_1(x) = -3x + 1$, ja DY:n yleinen ratkaisu on $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Cx^2 - 3x + 1$. Alkuarvoa ei ole tehtävässä annettu, joten vastaus on:

Vastaus: $y(x) = Cx^2 - 3x + 1$.

4. Ratkaise $y'' + 4y' + 3y = 12$, kun $y(0) = 6$, ja $y'(0) = 0$.

Karakteristinen yhtälö:

$$\begin{aligned} r^2 + 4x + 3 = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \\ &\longleftrightarrow \quad r_1 = -1 \quad \text{ja} \quad r_2 = -3 \end{aligned}$$

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu:

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

DY:n yksityisratkaisu yritteellä:

$$\begin{cases} y_1 = A \\ y_1' = 0 \\ y_1'' = 0 \end{cases} \quad \overset{\text{sij. DY:hyn}}{\longrightarrow} \quad \begin{aligned} 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot A &= 12 \\ \rightarrow A &= 4 \end{aligned}$$

DY:n yleinen ratkaisu:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + 4.$$

Alkuarvot: $y(0) = 6$, ja $y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + 4 \\ \rightarrow y'(x) &= -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = 6 \\ -C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Alkuarvot toteuttava DY:n ratkaisu:

$$y(x) = 3e^{-x} - e^{-3x} + 4$$

Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$