Kertausta termeistä

transpoosi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad !$$

Käänteismatriisi (neliömatriisille A)

$$A^{-1} = B \iff \begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$$

$(AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1}$ jos A^{-1} ja M^{-1} ovat olemassa

Matriisi on symmetrinen, jos

$$A^T = A$$

Esim $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} = A$

Jos A^{-1} on olemassa, niin sanomme, että

A on <u>säännöllinen</u> (Saom)

("A" is <u>a matrix of full rank</u>" (engl.))

Jos A^{-1} ei ole olemassa niin sanomme, että

A on <u>singulaarinen</u>

(A is singular)

A on vapaa lineaarisesti riippumaton jos

$$A\bar{x} = \bar{0} \rightarrow \bar{x} = 0$$

Jos A on $m \times n$-matriisi, niin

$\boxed{\text{tapaus } m = n}$ (m riviä, n saraketta)

A on neliömatriisi

→ det(A) on olemassa

→ A^{-1} on olemassa, jos $\det(A) \neq 0$

A on vapaa, jos $\det(A) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ A^{-1} on olemassa

$\Leftrightarrow$ A ei ole singulaarinen, vaan A on "a matrix of full rank"

$\boxed{\text{tapaus } m > n}$

A:lla ei ole käänteismatriisia eikä determinanttia

kun $m > n$, niin

Lause: A on vapaa, jos $A^T A$ on vapaa

$\Leftrightarrow \boxed{\det(A^T A) \neq 0}$

Perustelu

$$A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow A^T A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}^T A^T A\bar{x} = 0 \Rightarrow (Ax)^T Ax = 0$$
$$\Rightarrow |A\bar{x}| = 0 \Rightarrow A\bar{x} = \bar{0}$$

Siis $A\bar{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A^T A\bar{x} = \vec{0}$

joten A:n vapaus voidaan tutkia matriisin $A^T A$ determinantin avulla

(Huom. $A^T A$ on neliömatriisi) $\boxed{\text{A vapaa} \Leftrightarrow \det(A^T A) \neq 0}$

$\boxed{\text{Tapaus } m < n}$ Matriisi on aina sidottu.

ESIMERKKI: VOITON MAKSIMOINTI
(KAHDEN TUOTTEEN TAPAUS)

Olkoon kysyntäfunktiot

$$\begin{cases} p_1 = 100 - q_1 + 0{,}2q_2 \\ p_2 = 80 + 0{,}1q_1 - 2q_2 \end{cases}$$

ja kustannusfunktio

$$C = 70q_1 + 60q_2 + q_1^2 + q_2^2 + 0{,}1q_1q_2$$

Määritä optimaaliset tuotantomäärät

Tuotto

$$\begin{aligned} R &= p_1q_1 + p_2q_2 \\ &= (100 - q_1 + 0{,}2q_2)q_1 + (80 + 0{,}1q_1 - 2q_2)q_2 \\ &= 100q_1 + 80q_2 - q_1^2 + 0{,}3q_1q_2 - 2q_2^2 \\ &= (100 \quad 80)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (q_1 \quad q_2)\begin{pmatrix} -1 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kust.

$$C = (70 \quad 60)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (q_1 \quad q_2)\begin{pmatrix} 1 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Voitto

$$\begin{aligned} R - C &= (100q_1 + 80q_2 - q_1^2 + 0{,}3q_1q_2 - 2q_2^2) \\ &\quad - (70q_1 + 60q_2 + q_1^2 + 0{,}1q_1q_2 + q_2)^2 \\ &= 30q_1 + 20q_2 - 2q_1^2 + 0{,}2q_1q_2 - 3q_2^2 \\ &= \underbrace{(30 \quad 20)}_{=u}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (q_1 \quad q_2)\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -3 \end{pmatrix}}_{=M}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P = 30q_1 + 20q_2 - 2q_1^2 + 0{,}2\,q_1q_2 - 3q_2^2$$

Optimointi (perustellaan myöhemmin)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial q_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 30 - 4q_1 + 0{,}2q_2 = 0 \\[2ex] 20 + 0{,}2q_1 - 6q_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4q_1 + 0{,}2q_2 = -30 \\ 0{,}2q_1 - 6q_2 = -20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2M\bar{q} = -\bar{u}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{q}_{opt} = -\tfrac{1}{2}M^{-1}\bar{u}}$$

$$\xrightarrow{\text{Octave}} \quad \bar{q}_{opt} = \begin{pmatrix} 7{,}68 \\ 3{,}59 \end{pmatrix}$$

$$P_{opt} = 151{,}09$$

```
>> u = [30; 20]
u =

30
20

>> M = [-2 0.1; 0.1 -3]
M =

-2.00000    0.10000
0.10000    -3.00000

>> qopt = -0.5*inv(M)*u
qopt =

7.6795
3.5893

>>
```