Matemaattinen Analyysi, s2016, L2

esimerkki

Dieetti-välipala 1: Opiskelija Ken Obi on dieetillä. Lenkin jälkeen Ken pysähtyy välipalalle. Dieetin mukaan hänen pitäisi saada välipalasta 100g rasvaa ja 50g sokeria. Repustaan Ken löytää suklaapatukoita ja keksejä. Patukassa on 20g rasvaa ja 20g sokeria. Keksissä on 30g rasvaa ja 5g sokeria.
Ken esittää suklaapatukan ja keksin ravintoaine-jakaumat vektoreina

$$\text{patukka: } \begin{pmatrix} 20\text{ g rasvaa} \\ 20\text{ g sokeria} \end{pmatrix}, \qquad \text{keksi: } \begin{pmatrix} 30\text{ g rasvaa} \\ 5\text{ g sokeria} \end{pmatrix}.$$

Ken päättää syödä x suklaapatukka ja y keksiä.

Silloin hän saa täsmälleen oikean määrän eri ravintoaineita, jos

$$x \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x & + & 30y & = & 100 \\ 20x & + & 5y & = & 50 \end{cases}$$

Tästä yhtälöryhmästä Ken helposti saa ratkaisun dieetti-ongelmaansa. Hän syö kaksi patukkaa ja kaksi keksiä.
Sovimme seuraavassa eräistä sanonnoista, joita jatkossa käytämme paljon.

Määritelmä

Olkoon $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vektoreita ja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ reaalilukuja.

(1) Jos

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{v}_m$$

niin sanomme, että vektori $\boldsymbol{u}$ on esitetty *lineaarikombinaationa* (linear combination) vektoreista $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$.

(2) Vektorijoukon $K \subset \mathbb{R}^n$ kaikkien äärellisten lineaarikombinaatioiden joukko on sen *virittämä aliavaruus* (a subspace of $\mathbb{R}^n$ spanned by K)

$[K] = \mathrm{span}(K) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{u}$ on lineaarikombinaatio $K:n$ vektoreista $\}$

Lineaarinen riippuvuus

Edellä esimerkissä Kenin ratkaisu – kaksi patukkaa ja kaksi keksiä – oli lineaarikombinaatio kertoimin $(2, 2)$.

Matriisikertolasku on määritelty niin, että kun matriisin ja sarakevektorin tulo on lineaarikombinaatio matriisin sarakkeista ja lineaarikombinaation kertoimet ovat vektorin koordinaatit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & + & 1b & + & 3c \\ -1a & + & 2b & + & 5c \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti rivivektorin ja matriisin tulo on lineaarikombinaatio matriisin riveistä ja lineaarikombinaation kertoimet ovat vektorin koordinaatit.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x - y & 1x + 2y & 3x + 5y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Esimerkki *Dieetti-välipala 2:* Kenin ystävä Luke haluaa myös nauttia repusta löytyviä patukoita ja keksejä. Luken tarve on 50g rasvaa ja 100g sokeria.

Samoin kuin Ken myös Luke pystyy analysoimaan ongelmaa yhtälöllä

$$x \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 30y = 50 \\ 20x + 5y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5.5 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ratkaisu on siis olemassa ja se on ainoa ratkaisu. Luken kannalta ratkaisu on tietenkin vähän ongelmallinen.

Esimerkki *Dieetti-välipala 3:* Jos edellä Luken tavoite ei ole niinkään syödä Kenin repusta, kuin lisätä oman reppunsa ravintosisälöä hankkimalla reppuunsa 50g rasvaa ja 100g sokeria, niin Luke onnistuu tässä ostamalla Keniltä 5.5 suklaapatukkaa ja myymällä Kenille 2 keksiä. Luken repun sisältö muuttuu silloin määrällä

$$5.5 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki *Dieetti-välipala 4:* Ken päättää huomioida myös hiilihydraatit. Kenin tavoite on saada välipalastaan 100g rasvaa, 50g sokeria ja 75g hiilihydraattia. Patukan ja keksin ravintoainesisällöt ovat

$$\text{patukka: } \begin{pmatrix} 20\text{ g rasvaa} \\ 20\text{ g sokeria} \\ 10\text{ g hiilaria} \end{pmatrix}, \qquad \text{keksi: } \begin{pmatrix} 30\text{ g rasvaa} \\ 5\text{ g sokeria} \\ 30\text{ g hiilaria} \end{pmatrix}.$$

Tavoite onnistuu, jos Ken löytää sopivat lineaarikombinaation kertoimet yhtälöön

$$x \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 30y = 100 \\ 20x + 5y = 50 \\ 10x + 30y = 75 \end{cases}$$

Yhtälöryhmällä ei nyt ole ratkaisua. Johtopäätös on, että vektoria $\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 75 \end{pmatrix}$ ei voi esittää vektoreiden $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa.

Määritelmä (1) Jos $m > 1$, niin vektorijono $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$, on *lineaarisesti riippuva (sidottu)* (linearly dependent), jos jokin jonon vektoreista voidaan esittää jonon muiden vektoreiden lineaarikombinaationa ja vastaavasti

vektorijono on *lineaarisesti riippumaton (vapaa)* (linearly independent), jos mitään jonon vektoria ei voida esittää jonon muiden vektoreiden lineaarikombinaationa.

(2) Tapauksessa $m = 1$ sovimme, että nollavektorista muodostettu jono $(\mathbf{0})$ on sidottu ja muut yhden vektorin jonot ovat vapaita.

Esimerkki *Dieetti-välipala 5:* Jos Kenin repussa on muitakin herkkuja kuin suklaapatukoita ja keksejä, niin vaihtoehtojen määrä alkaa kasvaa. Jos repusta löytyy myös hillomunkkeja, ja yhden hillomunkin ravintosisältö on täsmälleen sama kuin yhden suklaapatukan ja yhden keksin yhteenlaskettu ravintosisältö, niin Ken voi aina korvata annoksessaan yhden munkin yhdellä patukalla ja yhdellä keksillä. Luke voi jopa ajatella, että

$$\text{patukka} = \text{munkki} - \text{keksi}.$$

Erilaisten ratkaisujen määrä kasvaa, mikä herkuttelijan mielestä on tietenkin mahtavaa. Matematiikassa kuitenkin usein halutaan, että on yksi ja vain yksi ratkaisu. Tähän usein päästään kun vektorit, joilla lasketaan, valitaan siten, että ne ovat keskenään lineaarisesti riippumattomat.

Toinen määritelmä

Lineaarisen riippumattomuuden määritelmä voidaan tehdä kahdella tavalla. Edellä annettu määritelmä on helppo ymmärtää, mutta sen avulla ei ole helppo nähdä kaikkia riippumattomuuden ominaisuuksia.
Jotta voisimme perustella joitakin hyviä asioita annamme myös toisen muodon lineaarisen riippumattomuuden määritelmälle.

Määritelmä (1) Vektorijono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$, $\mathbf{v}_j \subset \mathbb{R}^n$ on *lineaarisesti riippuva (sidottu)* (linearly dependent), jos on olemassa reaaliluvut $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, joista ainakin yksi ei ole nolla, niin että

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_m \mathbf{v}_m = 0$$

(2) Vektorijono $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ on *lineaarisesti riippumaton (vapaa)* (linearly independent), jos se ei ole sidottu, eli

$$(x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_m \mathbf{v}_m = 0) \Rightarrow (x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0)$$

Huomautus

Monessa oppikirjassa on määritelmän (2) ehto on kirjoitettu ekvivalenssina $LHS \Leftrightarrow RHS$. Ylläolevassa määritelmässä on implikaatio vasemmalle ("$\Leftarrow$") jätetty pois, sillä se on itsestään selvästi aina totta. Määritelmä korostaa implikaatiota oikealle ("$\Rightarrow$") sillä se ei ole aina totta. Täsmälleen silloin, kun "$\Rightarrow$" on voimassa vektorit muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon.

Toinen määritelmä

Vektorijonon lineaarista riippumattomuutta kannattaa usein tutkia siten, että vektorijonon vektoreista muodostetaan matriisi, jonka sarakkeina tutkittavat vektorit ovat. Esimerkiksi

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad \longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tulemme jatkossa tekemään tämän vektorijonosta matriisiin tai matriisista vektorijonoon siirtymisen ilman suuria selittelyjä. Jonkin aikaa kannattaa ajatella, että matriisi on sarakejono!

Määritelmä: (1) Matriisi $\boldsymbol{V}$ on *lineaarisesti riippuva (sidottu)* (linearly dependent), jos on olemassa nollavektorista eroava vektori $\boldsymbol{x} \neq 0$, niin että

$$\boldsymbol{Vx} = 0$$

(2) Matriisi $\boldsymbol{V}$ on *lineaarisesti riippumaton (vapaa)* (linearly independent), jos se ei ole sidottu, eli

$$(\boldsymbol{Vx} = 0) \Rightarrow (\boldsymbol{x} = 0)$$

Esimerkki Olkoon kuten edellä

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\longleftrightarrow \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vektorijono on sidottu koska

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matriisi on sidottu koska

$$\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & + & 3\cdot(-1) & + & (-1)\cdot(-1) \\ 2\cdot 2 & + & 0\cdot(-1) & + & 4\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Lause

Jos yhtälöryhmällä $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ on kaksi ratkaisua, niin kerroinmatriisi $\boldsymbol{A}$ on lineaarisesti riippuva (eli sidottu).

Todistus.

Olkoon $\boldsymbol{x}_1$ ja $\boldsymbol{x}_2$ kaksi erisuurta yhtälöryhmän ratkaisua. Silloin ratkaisuvektoreiden erotus eroaa nollavektorista $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \neq 0$ ja

$$\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{Ax}_1 - \boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = 0.$$

□

Lauseen tulos on käytännössä tärkeä, koska käytännössä lähes aina ratkaistessamme yhtälöryhmää toivomme, että on olemassa yksi ja vain yksi ratkaisu. Tämä on mahdollista vain jos yhtälöryhmän kerroimatriisi on vapaa.