

Matemaattinen Analyysi

1. välikoe, 13.11.2017

Ratkaise 3 tehtävää.

Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!

1. a) Milloin vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton (eli vapaa)?

b) Lausu vektori $\vec{x} = (1 \ 0 \ -1)^T$ vektoreiden

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linearikombinaationa?

c) Onko neliömuoto $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + z^2$ positiivisesti definiitti?

2. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Osoita, että luvut $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 3$ ovat matriisin \mathbf{A} ominaisarvoja.

b) Määritä yksi matriisin ominaisvektori.

c) Onko matriisilla kolmas ominaisarvo kahden edellä mainitun lisäksi? (Perustele vastauksesi.)

3. a) Mikä on sileän monen muuttujan funktion rajoittamattoman minimointitehtävän *välttämätön* ehto, ja mikä on minimointitehtävän *riittävä* ehto

b) Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x$$

4. Ratkaise optimointitehtävä

$$\begin{cases} \max & xy + 3x \\ \text{ehdolla} & x + 2y = 10 \end{cases}$$

Kaavoja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

on minimipiste \mathbf{x}^* , niin on olemassa reaalityötöt $\lambda_j^*, j = 1, \dots, m$ siten, että pisteessä $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

(eli $\nabla L = \mathbf{0}$)

Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

on minimipiste \mathbf{x}^* , niin on olemassa reaalityötöt $\mu_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ ja $\lambda_j^*, j = 1, \dots, m$ siten, että optimipisteessä $(\mathbf{x}^*, \mu^*, \lambda^*)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$