Vaasan yliopisto, syksy 2017 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

1. välikoe, 13.11.2017

Ratkaise 3 tehtävää.

Mukana saa olla laskin ja matemaattiset taulukot!

1. a) Milloin vektorijoukko on lineaarisesti riippumaton (eli vapaa)?
b) Lausu vektori $\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T$ vektoreiden

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

lineaarikombinaationa?
c) Onko neliömuoto $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + z^2$ positiivisesti definiitti?

a) Vektorijoukko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, jos

(I) nollavektoria ei voida lausua vektoreiden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ lineaarikombinaationa muuten kuin nolla-kertoimilla

$\Leftrightarrow$ (II) $(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n = \vec{0}) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0)$

$\Leftrightarrow$ (III) Mitään vektoreista $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ei voida lausua muiden lineaarikombinaationa

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 1 & (1) \\ 2y + 2z = 0 & (2) \\ -4z = -2 & (3) \end{cases}$$

$(3) \rightarrow z = \frac{1}{2}$, $(2) \rightarrow 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$(1) \rightarrow x - \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = 0$

$$\therefore \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

1c) $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + z^2$

$$= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pääminorit

$D_1 = 1 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - (-1)\cdot(-1) = 3 > 0$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 1 + 0 > 0$$

$\therefore$ neliömuoto on positiivisesti definiitti

Vastaus:

a) $\uparrow$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\bar{u}_1 - \frac{1}{2}\bar{u}_2 + \frac{1}{2}\bar{u}_3$

c) ON

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Osoita, että luvut $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 3$ ovat matriisin $\boldsymbol{A}$ ominaisarvoja.
b) Määritä yksi matriisin ominaisvektori.
c) Onko matriisilla kolmas ominaisarvo kahden edellä mainitun lisäksi? (Perustele vastauksesi.)

2) Karakteristinen polynomi: $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

a)

$$P(1) = \begin{vmatrix} 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot(1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(3) = \begin{vmatrix} 2-3 & -1 & 0 \\ -1 & 2-3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) $\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & x_1 = x_2 \\ -x_1 + x_2 = 0 & \\ 2x_3 = 0 & \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_I = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, a \neq 0$$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 & \rightarrow x_2 = -x_1 \\ -x_1 - x_2 = 0 & \\ 0 = 0 & \rightarrow x_3 \text{ on vapaa} \end{cases} \rightarrow \bar{x}_{II} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$b \neq 0$ $c \neq 0$

c) koska ominaisvektoreita on jo kolme,
ei muita ominaisarvoja voi enää olla
$\lambda = 3$ on kertalukua 2, joten kertalukujen
summa on jo 3 $(1+2=3)$

2c) toinen tapa: vaatii karakteristisen yhtälön

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad +0 - 0 + (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda-3)\left[(2-\lambda)(2-\lambda)-1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 3 \text{ tai } \lambda = 1$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2\cdot 1}$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1$

∴ On vain kaksi ominaisarvoa

3. a) Mikä on sileän monen muuttujan funktion rajoittamattoman minimointitehtävän *välttämätön* ehto, ja mikä on minimointitehtävän *riittävä* ehto

b) Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x$$

a) Välttämätön ehto $\nabla f = \vec{0}$

Riittävä ehto $\begin{cases} \nabla f = \vec{0} \\ H \text{ on positiivisesti definiitti} \end{cases}$

missä H on Hessen matriisi

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 4y = 0 \quad \cdot(-1) \ :(2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -4 \\ x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad D_1 = 2 > 0$, $\quad D_2 = 8 - 4 > 0$

positiivisesti definiitti $\rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ on lokaali minimi

$f(-4,2) = (-4)^2 + 2\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot(2)^2 + 4\cdot(-4) = 0$

4. Ratkaise optimointitehtävä

$$\begin{cases} \max & xy+3x \\ \text{ehdolla} & x+2y = 10 \end{cases}$$

(I) Lagrangen funktio

$$L(x,y,\lambda) = xy + 3x + \lambda(x+2y-10)$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3 + \lambda = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = -3 & \cdot(-2) \\ x + 2\lambda = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = -3 \\ x - 2y = 6 & \cdot(-1) \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = -3 & (1) \\ x - 2y = 6 & (2) \\ 4y = 4 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow y = 1$, $(2) \rightarrow x - 2 = 6 \Rightarrow x = 8$

$(1) \Rightarrow 1 + \lambda \overset{!}{=} -3 \Rightarrow \lambda = -4$

$f(8,1) = 8\cdot 1 + 3\cdot 8 = 32$

Vast: maksimi $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ f(8,1) = 32 \end{cases}$

(II) ehdosta $y = 5 - \frac{1}{2}x$ sijoitetaan tavoitefunktioon

$$f(x,y) = \tilde{f}(x) = x(5 - \tfrac{1}{2}x) + 3x = 8x - \tfrac{1}{2}x^2$$

$\tilde{f}'(x) = 8 - x$

$\tilde{f}''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ maksimi $\tilde{f}$:n nollakohdassa.

$\tilde{f}'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - x = 0 \Leftrightarrow x = 8$

$y = 5 - \frac{1}{2}\cdot 8 = 1$

$\tilde{f}(8) = 8\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 8^2 = 64 - \frac{1}{2}\cdot 64 = 32$

Vast. maksimi $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ f(8,1) = 32 \end{cases}$