Vaasan yliopisto, syksy 2018 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

3. harjoitus, viikko 44

R1	ke	12–14	F104	(31.10.)
R2	ke	14–16	F104	(31.10.)

1. Olkoon $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ja $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ kaksi $\mathbb{R}^2$:n kantaa, joista tiedämme että

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}.$$

a) Kirjoita vektori $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ vektoreiden $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ lineaarikombinaationa.
b) Kirjoita vektori $\vec{b} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ vektoreiden $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ lineaarikombinaationa.

2. a) Tarkista ominaisarvoyhtälöön sijoittamalla, että matriisin

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja vastaavat normitetut ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = 4, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -2, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{missä} \quad a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Tarkista suoralla laskulla, että

$$\boldsymbol{VDV}^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

3. Laske matriisin $\boldsymbol{S}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Ohje: Tarkista saamasi arvot arvot λ_j, $\boldsymbol{v}_j$, $(j = 1, 2, 3)$ sijoittamalla ne ominaisarvoyhtälöön $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$.)

4. Lineaarikuvauksesta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiedetään, että $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ja $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Laske $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$

5. Onko matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

vapaa vai sidottu?