Vaasan yliopisto, syksy 2018 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

3. harjoitus, viikko 44

R1	ke	12–14	F104	(31.10.)
R2	ke	14–16	F104	(31.10.)

1. Olkoon $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ja $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ kaksi $\mathbb{R}^2$:n kantaa, joista tiedämme että

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}.$$

a) Kirjoita vektori $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ vektoreiden $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ lineaarikombinaationa.
b) Kirjoita vektori $\vec{b} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ vektoreiden $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ lineaarikombinaationa.

2. a) Tarkista ominaisarvoyhtälöön sijoittamalla, että matriisin

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja vastaavat normitetut ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = 4, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -2, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{missä} \quad a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Tarkista suoralla laskulla, että

$$\boldsymbol{VDV}^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

3. Laske matriisin $\boldsymbol{S}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Ohje: Tarkista saamasi arvot arvot λ_j, $\boldsymbol{v}_j$, $(j = 1,2,3)$ sijoittamalla ne ominaisarvoyhtälöön $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$.)

4. Lineaarikuvauksesta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiedetään, että $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ja $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Laske $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$

5. Onko matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

vapaa vai sidottu?

Vaasan yliopisto, syksy 2018 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

3. harjoitus, viikko 44

R1	ke	12–14	F104	(31.10.)
R2	ke	14–16	F104	(31.10.)

1. Olkoon $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ja $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ kaksi $\mathbb{R}^2$:n kantaa, joista tiedämme että

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}.$$

a) Kirjoita vektori $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ vektoreiden $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ lineaarikombinaationa.
b) Kirjoita vektori $\vec{b} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ vektoreiden $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ lineaarikombinaationa.

a) $\vec{a} = 3\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2$
$= 3(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + 2(2\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$
$= 3\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 4\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$
$= \underline{\underline{7\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2}}$

b) $U = V\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow U\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = V$

$\vec{b} = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 = V\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= U\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \underline{\underline{1 \cdot \bar{u}_1 + 1 \cdot \bar{u}_2}}$

2. a) Tarkista ominaisarvoyhtälöön sijoittamalla, että matriisin

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja vastaavat normitetut ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = 4, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = -2, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{missä} \quad a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Tarkista suoralla laskulla, että

$$\boldsymbol{VDV}^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

a) $B\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 4a \end{pmatrix}$ ok $B\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -2b \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}$ ok

b) $VDV^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4a & 4a \\ 2b & -2b \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4a^2 - 2b^2 & 4a^2 + 2b^2 \\ 4a^2 + 2b^2 & 4a^2 - 2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. Laske matriisin $\boldsymbol{S}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Ohje: Tarkista saamasi arvot arvot λ_j, $\boldsymbol{v}_j$, $(j = 1, 2, 3)$ sijoittamalla ne ominaisarvoyhtälöön $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$.)

Karakteristinen yhtälö

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2 \cdot 1}$$
$$x = 4 \text{ tai } x = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad +0 - 0 + (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda+1)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 6\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$\therefore$ $\lambda_1 = -1$ (kertaluku 2)
$\lambda_2 = 4$ (kertaluku 1)

Ominaisvektorit

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ $\quad S\bar{x} = -1 \cdot \bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -x_1 \\ 2x_1 + x_2 = -x_2 \\ -x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow x_2 = -x_1, \quad x_3 \text{ vapaa} \quad \rightarrow \bar{x}_I = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = 4}$ $\quad S\bar{x} = 4\bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4x_1 \\ 2x_1 + x_2 = 4x_2 \\ -x_3 = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x_1 = 3x_2$$

$$\bar{x}_{III} = \begin{pmatrix} 3c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vastaus: Ominaisarvot $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = 4$

Ominaisarvoon $\lambda_1 = -1$ liittyy ominaisvektorit

$$\bar{x}_I = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \bar{x}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \text{ ja}$$

ominaisarvoon $\lambda_2 = 4$ liittyy ominaisvektori

$$\bar{x}_{III} = \begin{pmatrix} 3c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$S\bar{x}_I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \bar{x}_I \quad ✓$$

$$S\bar{x}_{II} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} = -1 \cdot \bar{x}_{II} \quad ✓$$

$$S\bar{x}_{III} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12c \\ 8c \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = 4\bar{x}_{III} \quad ✓$$

4. Lineaarikuvauksesta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiedetään, että $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ja $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Laske $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 5 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

tai $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$

5. Onko matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

vapaa vai sidottu?

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 20 \\ 16 & 18 & 14 \\ 20 & 14 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^TA) = \begin{vmatrix} 18 & 16 & 20 \\ 16 & 18 & 14 \\ 20 & 14 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= +18 \begin{vmatrix} 18 & 14 \\ 14 & 26 \end{vmatrix} - 16 \cdot \begin{vmatrix} 16 & 14 \\ 20 & 26 \end{vmatrix} + 20 \cdot \begin{vmatrix} 16 & 18 \\ 20 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 18(18 \cdot 26 - 14 \cdot 14) - 16 \cdot (16 \cdot 26 - 14 \cdot 20) + 20(16 \cdot 14 - 18 \cdot 20)$$
$$= 18(468 - 196) - 16 \cdot (416 - 280) + 20(224 - 360)$$
$$= 18 \cdot 272 - 16 \cdot 136 + 20 \cdot (-136)$$
$$= 4896 - 2176 - 2720$$
$$= 0$$

$\therefore$ Matriisi on sidottu eli lineaarisesti riippuva.

(Matriisin sarakkeissa on lineaarista riippuvuutta)