Vaasan yliopisto, syksy 2016 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

4. harjoitus, viikko 45

R1	ke	14–16	F104	(7.11.)
R2	ke	16–18	F104	(7.11.)

1. a) Olkoon

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tutki matriisien $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ definiittisyydet pääminoreiden avulla. (Menettely on selitetty opetusmonisteen sivuilla 43–46.)
b) Onko neliömuoto $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$ positiivisesti definiitti?

2. Olkoon $f(x,y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$
a) Määritä osittaisderivaatat f_x ja f_y.
b) Kirjoita gradienttivektorin $\nabla f(x,y)$ ja Hessin matriisin $\boldsymbol{H}$ lausekkeet.
c) Laske gradienttivektorin ja Hessin matriisin arvot pisteissä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun $f(x,y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$
(Ohje: Laske pisteet (x_i, y_i), joissa $\nabla f = \overline{\mathbf{0}}$ ja tutki Hessin matriisin definiittisyys näissä pisteissä.)

4. Yritys valmistaa kahta tuotetta T1 ja T2. Valmistusmäärät ovat q_1 ja q_2 (kpl/kk). Kysyntä- ja kustannus-funktiotovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 60 - 0,010q_1 + 0,001q_2 \\ p_2 &= 100 + 0,004q_1 - 0,020q_2 \\ C &= 20q_1 + 40q_2 + 0,01q_1q_2 \end{aligned}$$

Yrityksen voittofunktio on nyt

$$\begin{aligned} f(q_1,q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1,q_2) \\ &= 40q_1 + 60q_2 - 0,01q_1^2 - 0,005q_1q_2 - 0,02q_2^2 \end{aligned}$$

Millä valmistusmäärillä voitto on suurin mahdollinen.

5. Maksimoi edellisen tehtävän voittofunktio ehdolla $q_1 + 2q_2 = 3000$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$