

Matemaattinen Analyysi

4. harjoitus, viikko 45

R1	ke	14-16	F104	(7.11.)
R2	ke	16-18	F104	(7.11.)

1. a) Olkoon

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tutki matriisien B , C ja D definiittisyydet pääminoreiden avulla. (Menettely on selitetty opetusmonisteen sivuilla 43-46.)

b) Onko neliömuoto $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$ positiivisesti definiitti?

2. Olkoon $f(x, y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$

a) Määritä osittaisderivaatat f_x ja f_y .

b) Kirjoita gradienttivektorin $\nabla f(x, y)$ ja Hessin matriisin H lausekkeet.

c) Laske gradienttivektorin ja Hessin matriisin arvot pisteissä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun $f(x, y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$

(Ohje: Laske pisteet (x_i, y_i) , joissa $\nabla f = \vec{0}$ ja tutki Hessin matriisin definiittisyys näissä pisteissä.)

4. Yritys valmistaa kahta tuotetta T1 ja T2. Valmistusmäärät ovat q_1 ja q_2 (kpl/kk). Kysyntä- ja kustannus-funktiot ovat

$$\begin{aligned} p_1 &= 60 - 0,010q_1 + 0,001q_2 \\ p_2 &= 100 + 0,004q_1 - 0,020q_2 \\ C &= 20q_1 + 40q_2 + 0,01q_1q_2 \end{aligned}$$

Yrityksen voittofunktio on nyt

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2) \\ &= 40q_1 + 60q_2 - 0,01q_1^2 - 0,005q_1q_2 - 0,02q_2^2 \end{aligned}$$

Millä valmistusmäärillä voitto on suurin mahdollinen.

5. Maksimoi edellisen tehtävän voittofunktio ehdolla $q_1 + 2q_2 = 3000$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Matemaattinen Analyysi**4. harjoitus, viikko 45**

R1 ke 14-16 F104 (7.11.)

R2 ke 16-18 F104 (7.11.)

1. a) Olkoon

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tutki matriisien B , C ja D definiittisyydet pääminoreiden avulla. (Menettely on selitetty opetusmonisteen sivuilla 43-46.)

b) Onko neliömuoto $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$ positiivisesti definiitti?

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Pääminorit} \quad D_1 = 2 > 0 \\ D_2 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5 > 0 \\ \therefore \underline{B \text{ on positiivisesti definiitti}}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Pääminorit} \\ D_1 = -2 < 0 \\ D_2 = 3 > 0 \\ D_3 = -4 < 0$$

$$D_3 = +(-2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ = -2(4-1) - (-2-0) \\ = -6 + 2 \\ = -4$$

$\therefore \underline{C \text{ on negatiivisesti definiitti}}$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pääminorit} \\ D_1 = -1 < 0 \\ D_2 = -7 < 0$$

$\therefore \underline{D \text{ on indefiniitti}}$

b)

$$x^2 - 2xy + 4y^2 + 2xz + z^2$$

$$= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$D_3 = +1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-0) + (-1-0) + (0-4)$$

$$= 4 - 1 - 4 = -1$$

Pääminorit

$$D_1 = 1 > 0$$

$$D_2 = 4 - 1 > 0$$

$$D_3 = -1 < 0$$

$\underline{V \text{ ei ole pos. definiitti}}$

2. Olkoon $f(x,y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$

a) Määritä osittaisderivaatat f_x ja f_y .

b) Kirjoita gradienttivektorin $\nabla f(x,y)$ ja Hessin matriisin H lausekkeet.

c) Laske gradienttivektorin ja Hessin matriisin arvot pisteissä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ja } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) $f(x,y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$

$$\boxed{\begin{matrix} f_x = 4x^3 + y \\ f_y = x + y \end{matrix}}$$

$$\begin{matrix} f_{xx} = 12x^2 \\ f_{xy} = 1 \\ f_{yx} = 1 \\ f_{yy} = 1 \end{matrix}$$

b) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + y \\ x + y \end{pmatrix}$

$$H|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$H|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Tutki funktion f lokaalit ääriarvot, kun $f(x, y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$

(Ohje: Laske pisteet (x_i, y_i) , joissa $\nabla f = \vec{0}$ ja tutki Hessin matriisin definiittisyys näissä pisteissä.)

$$f(x, y) = x^4 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} D_1 = 0 \text{ ?!} \\ D_2 = -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{indeksiinitt} \\ \text{ei ääriarvokohde} \end{matrix}$$

$$H \Big|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} D_1 = 3 > 0 \\ D_2 = 3 - 1 = 2 > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{positiivisesti} \\ \text{definiitti} \\ \rightarrow \text{minimikohde} \end{matrix}$$

$$H \Big|_{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{posit. definiitti} \\ \rightarrow \text{minimikohde} \\ x=1, y=-1 \end{matrix}$$

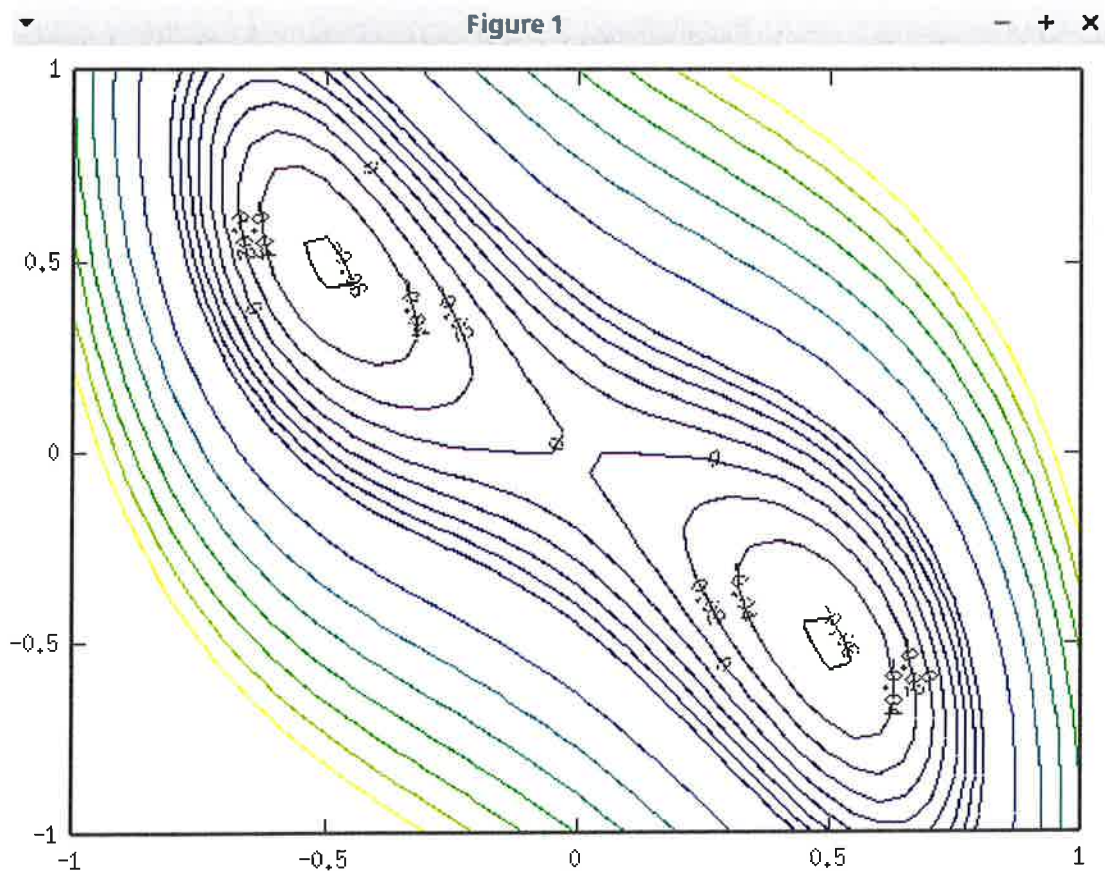
$$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1/16$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -1/16$$

Vastaus: funktiolla on lokaalit minimit $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -1/16$ ja $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -1/16$
Muuta ääriarvokohdetta ei ole

Harjoitus 4 tehtävä 3

```
#h4t3.m
graphics_toolkit("gnuplot")
hold off
x = linspace(-1,1,41);
y = linspace(-1,1,41);
[XX,YY] = meshgrid(x,y);
ZZ = XX.^4 + XX.*YY + 0.5*YY.^2;
[C,h] = contour(XX,YY,ZZ, -0.06:0.02:0.10);
clabel(C,h,-0.06:0.02:0.01);
hold on
contour(XX,YY,ZZ, 0.1:0.1:0.80);
```



4. Yritys valmistaa kahta tuotetta T1 ja T2. Valmistusmäärät ovat q_1 ja q_2 (kpl/kk). Kysyntä- ja kustannus-funktiot ovat

$$p_1 = 60 - 0,010q_1 + 0,001q_2$$

$$p_2 = 100 + 0,004q_1 - 0,020q_2$$

$$C = 20q_1 + 40q_2 + 0,01q_1q_2$$

Yrityksen voittofunktio on nyt

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2) &= p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1, q_2) \\ &= 40q_1 + 60q_2 - 0,01q_1^2 - 0,005q_1q_2 - 0,02q_2^2 \end{aligned}$$

Millä valmistusmäärillä voitto on suurin mahdollinen.

$$f(q_1, q_2) = 40q_1 + 60q_2 - 0,01q_1^2 - 0,005q_1q_2 - 0,02q_2^2$$

Välhieman löntön ehto

$$\begin{cases} f_{q_1} = 0 \\ f_{q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 - 0,02q_1 - 0,005q_2 = 0 \\ 60 - 0,005q_1 - 0,04q_2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-200) \\ \cdot (-200) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4q_1 + q_2 = 8000 \\ q_1 + 8q_2 = 12000 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-8) \\ + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -31q_1 & q_2 = 8000 - 4q_1 \\ & = -52000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_2 = 1290,32 \\ q_1 = 1677,42 \end{cases}$$

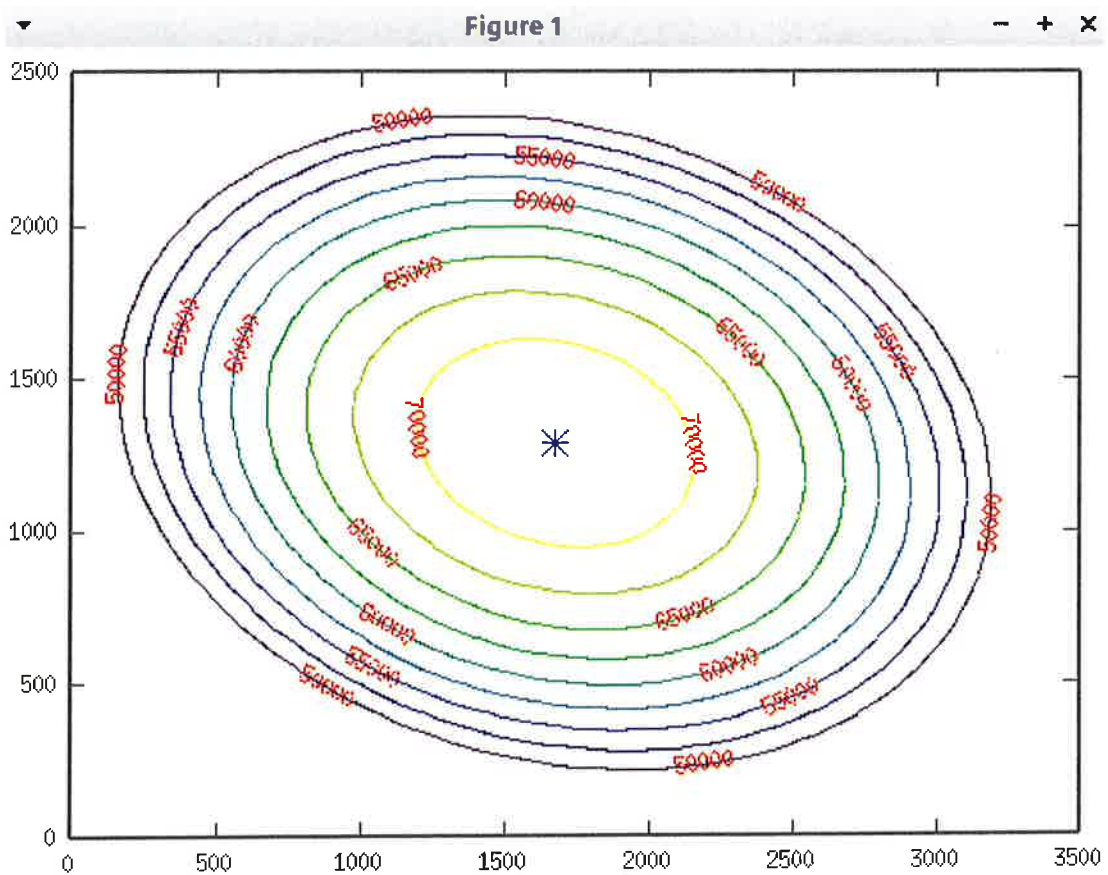
$$f(1677,42; 1290,32) = 72258$$

$$f(q_1, q_2) = (40 \ 60) \bar{q} + \bar{q}^T \begin{pmatrix} -0,01 & -0,0025 \\ -0,0025 & -0,02 \end{pmatrix} \bar{q}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{q}_{\text{optim}} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0,01 & -0,0025 \\ -0,0025 & -0,02 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Harjoitus 4 tehtävä 4

```
#h4t4.m
graphics_toolkit("gnuplot")
hold off
q1 = linspace(0,3500,51);
q2 = linspace(0,2500,51);
[Q1,Q2] = meshgrid(q1,q2);
ZZ = 40*Q1 + 60*Q2 - 0.01*Q1.^2 - 0.005*Q1.*Q2 - 0.02*Q2.^2;
[C,h] = contour(Q1,Q2,ZZ, 50000:2500:85000);
clabel(C,h,50000:5000:85000,'FontSize',12,'Color','red');
hold on
A = [0.02 0.005; 0.005 0.04];
b = [40 ; 60];
x = A\b;
plot(x(1),x(2),'b*')
hold off
```



5. Maksimoi edellisen tehtävän voittofunktio ehdolla $q_1 + 2q_2 = 3000$.

$$\begin{cases} \max f(q_1, q_2) = 40q_1 + 60q_2 - 0,01q_1^2 - 0,005q_1q_2 - 0,02q_2^2 \\ \text{ehdolla} \quad q_1 + 2q_2 = 3000 \end{cases}$$

Lagranzen funktio

$$L = 40q_1 + 60q_2 - 0,01q_1^2 - 0,005q_1q_2 - 0,02q_2^2 + \lambda(q_1 + 2q_2 - 3000)$$

$$\begin{cases} L_{q_1} = 0 \\ L_{q_2} = 0 \\ L_{\lambda} = 0 \end{cases} = \begin{cases} 40 - 0,02q_1 - 0,005q_2 + \lambda = 0 \\ 60 - 0,005q_1 - 0,04q_2 + 2\lambda = 0 \\ q_1 + 2q_2 - 3000 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,02q_1 + 0,005q_2 - \lambda = 40 \\ 0,005q_1 + 0,04q_2 - 2\lambda = 60 \\ q_1 + 2q_2 = 3000 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,005 & -1 \\ 0,005 & 0,04 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1300 \\ 850 \\ -9,75 \end{pmatrix}$$

optimissa

$$\therefore \begin{cases} q_1 = 1300 \\ q_2 = 850 \end{cases}$$

$$f(1300, 850) = 66125$$

Harjoitus 4 tehtävä 5

```
#h4t5.m
graphics_toolkit("gnuplot")
hold off
q1 = linspace(0,3500,51);
q2 = linspace(0,2500,51);
[Q1,Q2] = meshgrid(q1,q2);
ZZ = 40*Q1 + 60*Q2 - 0.01*Q1.^2 - 0.005*Q1.*Q2 - 0.02*Q2.^2;
[C,h] = contour(Q1,Q2,ZZ, 50000:2500:85000);
clabel(C,h,50000:5000:85000,'FontSize',12,'Color','red');
hold on
plot([0,3000],[1500,0],'g-')
A = [0.02 0.005 -1; 0.005 0.04 -2; 1 2 0];
b = [40 ; 60; 3000];
x = A\b;
plot(x(1),x(2),'b*')
hold off
```

