

# Matemaattinen Analyysi

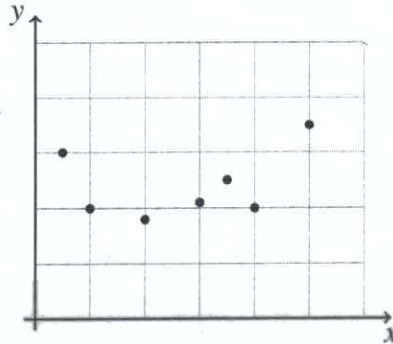
## 6. harjoitus, viikko 47

R1 ke 12-14 F104 (21.11.)

R2 ke 14-16 F104 (21.11.)

1. Approksimoi toisen asteen polynomilla  $P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$  oheisen taulukon mukaisia havaintoja. (Teorian löydät opetusmonisteen sivuilta 91-92.)

$x_i$	$y_i$
0,50	3,00
1,00	2,00
2,00	1,80
3,00	2,10
3,50	2,50
4,00	2,00
5,00	3,50



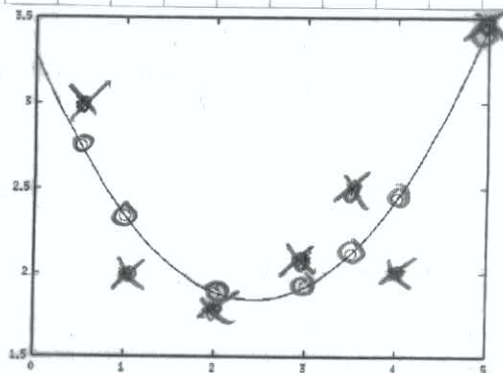
$$b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 \approx y_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0,50 & 0,25 \\ 1 & 1,00 & 1,00 \\ 1 & 2,00 & 4,00 \\ 1 & 3,00 & 9,00 \\ 1 & 3,50 & 12,25 \\ 1 & 4,00 & 16,00 \\ 1 & 5,00 & 25,00 \end{pmatrix}}_W \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} 3,00 \\ 2,00 \\ 1,80 \\ 2,10 \\ 2,50 \\ 2,00 \\ 3,50 \end{pmatrix}}_y$$

$$Wb \approx \bar{y} \rightarrow \bar{b} = W^+ \bar{y} = \begin{pmatrix} 3,27879 \\ -1,18178 \\ 0,24300 \end{pmatrix}$$

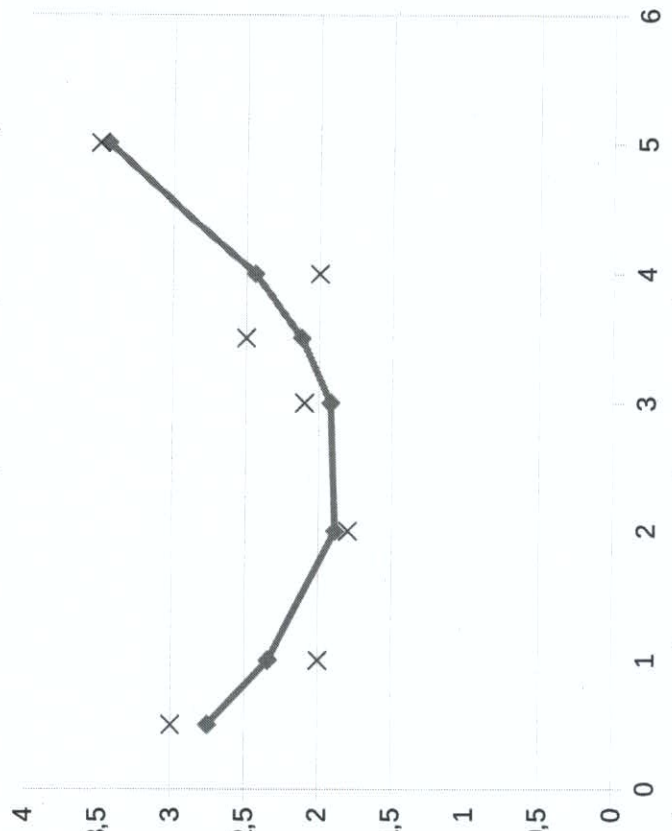
$$\therefore P(x) = 3,28 - 1,18x + 0,24x^2$$

$$W\bar{b} = \begin{pmatrix} 2,7487 \\ 2,3400 \\ 1,8872 \\ 1,9204 \\ 2,1193 \\ 2,4396 \\ 3,2148 \end{pmatrix}$$



Sheet1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		'=MMULT(MMULT(MINVERSE(MMULT(TRANSPPOSE(B14:D20);B14:D20));TRANSPPOSE(B14:D20));C5:C11)											
3													
4		x	y		b =		yhat =						
5		0,5	3		3,278793		2,75						
6		1,0	2,0		-1,181780		2,34						
7		2,0	1,8		0,242997		1,89						
8		3,0	2,1				1,92						
9		3,5	2,5				2,12						
10		4,0	2,0				2,44						
11		5,0	3,5				3,44						
12													
13		W =											
14		1	0,5	0,25									
15		1	1	1									
16		1	2	4									
17		1	3	9									
18		1	3,5	12,25									
19		1	4	16									
20		1	5	25									
21													



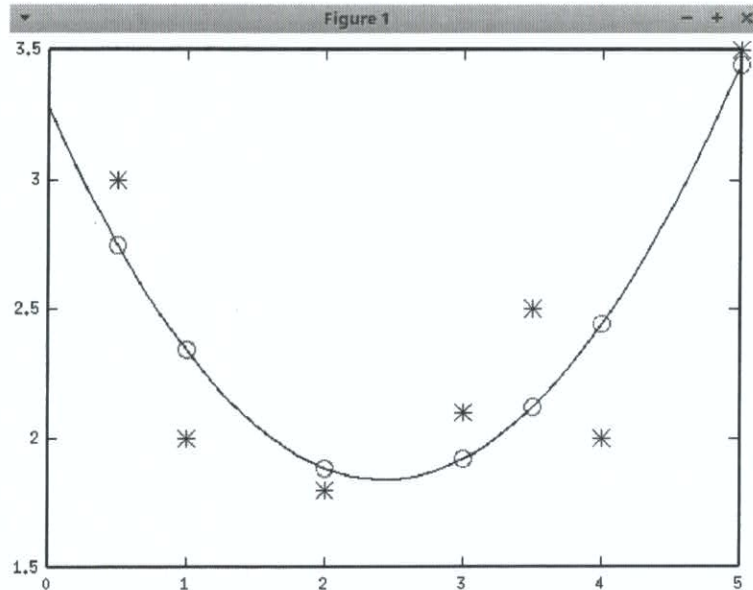
## Harjoitus 6 tehtävä 1

```
graphics_toolkit("gnuplot")
y = [3.0 2.0 1.8 2.1 2.5 2.0 3.5]';
x = [0.5 1.0 2.0 3.0 3.5 4.0 5.0]';
e = [ 1 1 1 1 1 1 1]';
W = [e x x.^2]
b = W\y

yhat = W*b;

xx = linspace(0,5,51)';
ee = linspace(1,1,51)';
yy = [ee xx xx.^2]*b;

plot(x,y,'b*', x,yhat,'ro', xx,yy,'k-')
```



2. Seuraavassa taulukossa on kolmen tuotteen myydyt määrät kymmenenä päivänä, sekä samojen tuotteiden keskihinnat samoina päivinä

- a) Määritä mallin  $p_1(t) = b_{01} + b_{11}q_1(t) + b_{21}q_2(t) + b_{31}q_3(t)$  kertoimet PNS-menetelmällä.  
 b) Määritä mallin  $p_2(t) = b_{02} + b_{12}q_1(t) + b_{22}q_2(t) + b_{32}q_3(t)$  kertoimet PNS-menetelmällä.  
 c) Määritä mallin  $p_3(t) = b_{03} + b_{13}q_1(t) + b_{23}q_2(t) + b_{33}q_3(t)$  kertoimet PNS-menetelmällä.

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
2	3	4	9.35	15.49	19.60
3	4	5	9.07	15.53	19.38
5	6	7	8.55	15.67	18.92
4	5	8	8.71	16.01	19.16
6	4	7	8.39	15.64	18.77
3	5	9	8.89	16.34	19.34
4	3	10	8.79	16.54	19.04
5	2	12	8.55	16.81	18.87
9	4	11	7.76	16.11	18.10
5	3	8	8.65	16.05	18.92

(Excel-taulukko löytyy tiedostosta [www.lipas.uwasa.fi/~mla/orms1010/data-h6t2.xls](http://www.lipas.uwasa.fi/~mla/orms1010/data-h6t2.xls))

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 10 \\ 5 & 2 & 12 \\ 9 & 4 & 11 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.35 & 15.49 & 19.60 \\ 9.07 & 15.53 & 19.38 \\ 8.55 & 15.67 & 18.92 \\ 8.71 & 16.01 & 19.16 \\ 8.39 & 15.64 & 18.77 \\ 8.89 & 16.34 & 19.34 \\ 8.79 & 16.54 & 19.04 \\ 8.55 & 16.81 & 18.87 \\ 7.76 & 16.11 & 18.10 \\ 8.65 & 16.05 & 18.92 \end{pmatrix}$$

$W \qquad B \qquad P$

$$B = W^+ P = \begin{pmatrix} 2,98 & 15,01 & 20,04 \\ -0,19 & -0,11 & -0,20 \\ -0,05 & -0,04 & 0,00 \\ -0,03 & 0,21 & -0,02 \end{pmatrix}$$

octave  
 excel

## Harjoitus 6 tehtävä 2

```
W = [1      2      3      4;
1      3      4      5;
1      5      6      7;
1      4      5      8;
1      6      4      7;
1      3      5      9;
1      4      3     10;
1      5      2     12;
1      9      4     11;
1      5      3      8];

P = [9.34589065082164 15.4865956073234 19.5960665322986
9.07209865064274 15.527876668499 19.3840238699178
8.5510047754254 15.6720988085564 18.9210884371935
8.71217121079111 16.0120351074352 19.1555477712808
8.39085125083782 15.636736865998 18.7707035650566
8.89179655730547 16.3444937185297 19.3432961815871
8.79214200157131 16.5372623721237 19.0405920223017
8.54993625684358 16.8133152332402 18.8709702543373
7.76250777433549 16.1137445182595 18.1020660676507
8.65326172194233 16.048184786564 18.9236312988334];

B = W\P

# output:
#>> h6t2
#
#B =
#
# 9.9805e+00 1.5012e+01 2.0045e+01
# -1.8972e-01 -1.0972e-01 -1.9690e-01
# -4.7483e-02 -3.8520e-02 3.6203e-03
# -3.0918e-02 2.0521e-01 -1.7541e-02
#
#>>
```

Sheet1

q1	q2	q3	p1	p2	p3
2	3	4	9,346	15,487	19,596
3	4	5	9,072	15,528	19,384
5	6	7	8,551	15,672	18,921
4	5	8	8,712	16,012	19,156
6	4	7	8,391	15,637	18,771
3	5	9	8,892	16,344	19,343
4	3	10	8,792	16,537	19,041
5	2	12	8,55	16,813	18,871
9	4	11	7,763	16,114	18,102
5	3	8	8,653	16,048	18,924

W =

1	2	3	4
1	3	4	5
1	5	6	7
1	4	5	8
1	6	4	7
1	3	5	9
1	4	3	10
1	5	2	12
1	9	4	11
1	5	3	8

B =

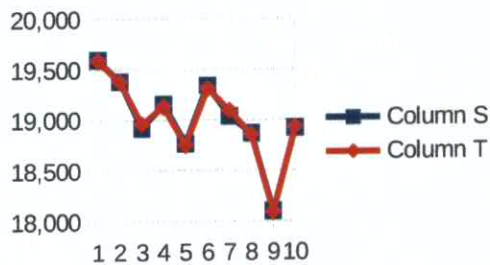
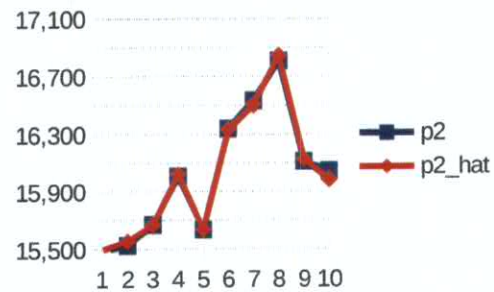
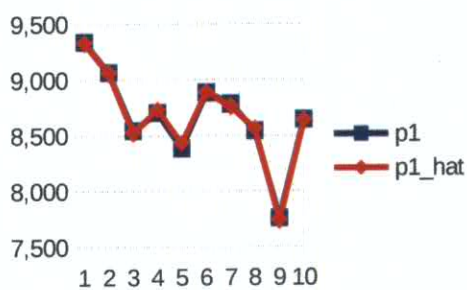
9,98	15,01	20,04
-0,19	-0,11	-0,20
-0,05	-0,04	0,00
-0,03	0,21	-0,02

P =

9,35	15,49	19,60
9,07	15,53	19,38
8,55	15,67	18,92
8,71	16,01	19,16
8,39	15,64	18,77
8,89	16,34	19,34
8,79	16,54	19,04
8,55	16,81	18,87
7,76	16,11	18,10
8,65	16,05	18,92

solualueessa G21:I24 on kaava:

=MMULT(MMULT(MINVERSE(MMULT(TRANPOSE(B18:E27);B18:E27));TRANPOSE(B18:E27));K18:M27)



3. Mikä on seuraavien funktioiden homogeenisuuden aste

a) tehtävän 1 tuotantofunktio  $z(K, L) = L^{3/8} K^{5/8}$ ,

b)  $f(x, y) = x^2 + 3xy$ ,

c)  $g(x, y, z) = x\sqrt{y} + 2\sqrt{xyz}$

(Teorian löydät opetusmonisteen sivuilta 99-100.)

$$\begin{aligned} a) \quad z(\alpha K, \alpha L) &= (\alpha L)^{3/8} (\alpha K)^{5/8} \\ &= \alpha^{3/8} L^{3/8} \alpha^{5/8} K^{5/8} \\ &= \alpha z = \alpha^1 z \end{aligned}$$

$\therefore$  homogeenisuuden aste on 1

$$\begin{aligned} b) \quad f(\alpha x, \alpha y) &= (\alpha x)^2 + 3 \cdot \alpha x \cdot \alpha y \\ &= \alpha^2 x^2 + 3 \alpha^2 xy \\ &= \alpha^2 (x^2 + 3xy) \end{aligned}$$

$\therefore$  homogeenisuuden aste on 2

$$\begin{aligned} c) \quad g(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= \alpha x \sqrt{\alpha y} + 2 \sqrt{\alpha x \alpha y \alpha z} \\ &= \alpha x \sqrt{\alpha} \sqrt{y} + 2 \sqrt{\alpha^3} \sqrt{xyz} \\ &= \alpha^{3/2} x \sqrt{y} + \alpha^{3/2} \cdot 2 \sqrt{xyz} \\ &= \alpha^{3/2} g(x, y, z) \end{aligned}$$

$\therefore$  homogeenisuuden aste on  $3/2$

4. Tuotantoyksikön tuotantofunktio on muotoa  $z(L, K) = L^{3/8}K^{5/8}$ , missä  $K$  on pääoman määrä ja  $L$  on työvoiman määrä. Jos pääoman hinta (=korke) on  $r = 5$  ja työvoiman hinta (=palkka) on  $w = 4$ , niin mikä työvoiman ja pääoman määrä tuottaa  $z = 400$  yksikköä minimikustannuksin?

$$\min 4L + 5K$$

$$\text{ehdolla } L^{3/8}K^{5/8} = 400$$

$$\text{Lagrange } \mathcal{L} = 4L + 5K + \lambda(L^{3/8}K^{5/8} - 400)$$

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dL} = 0 \\ \frac{d\mathcal{L}}{dK} = 0 \\ \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + \frac{3}{8}\lambda K^{5/8} L^{-5/8} = 0 \\ 5 + \frac{5}{8}\lambda L^{3/8} K^{-3/8} = 0 \\ L^{3/8} K^{5/8} = 400 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 5L \\ \cdot -3K \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20L + \frac{15}{8}\lambda K^{5/8} L^{-5/8} = 0 \\ -15K - \frac{15}{8}\lambda L^{3/8} K^{-3/8} = 0 \\ L^{3/8} K^{5/8} = 400 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20L + \frac{15}{8}\lambda \cdot 400 = 0 & (1) \\ 20L - 15K = 0 & (2) \\ L^{3/8} K^{5/8} = 400 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow L = \frac{15}{20}K = 0,75K \quad (4)$$

$$(4 \rightarrow 3) \rightarrow (0,75K)^{3/8} \cdot K^{5/8} = 400$$

$$\Leftrightarrow 0,75^{3/8} \cdot K = 400$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{400}{0,75^{3/8}} = \underline{\underline{445,6}} \quad (5)$$

$$(5 \rightarrow 4) \quad L = 0,75 \cdot 445,6 = \underline{\underline{334,2}}$$

$$(1) \rightarrow \lambda = -20L \cdot \frac{8}{15 \cdot 400}$$

$$= \frac{-20 \cdot 334,2 \cdot 8}{15 \cdot 400} = \underline{\underline{-8,91}}$$

V: optimin

$$L = 334,2$$

$$K = 445,6$$

$$4L + 5K = 3564,8$$

$$\lambda = -8,91$$

5. Tuotantokoneiston kokonaistuotanto riippuu pääomasta  $K$  ja työvoimasta  $L$ . Tällä hetkellä  $K = 8$  ja  $L = 10$ , ja  $z(8, 10) = 500$ . Työn hinta on  $w = 4$ , ja pääoman hinta on  $r = 5$ . Tuotantofunktio on homogeeninen astetta 1.10. Rajakorvaavuusasteen arvellaan olevan

$$MRS_{L,K} = 1.5$$

Muodosta Coubb-Douglas -tuotantofunktio, jolla on yllämainitut ominaisuudet:

Tuotantofunktio

$$z = a L^{b_1} K^{b_2}$$

Homogeenisuuden aste  $s = b_1 + b_2$

Rajakorvaavuusaste  $MRS_{L,K} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{K}{L}$

$$\text{Nyf} \begin{cases} b_1 + b_2 = 1,10 & (1) \\ \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{8}{10} = 1,5 & \rightarrow 8b_1 = 15b_2 & (2) \\ a \cdot 10^{b_1} \cdot 8^{b_2} = 500 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} b_1 + b_2 = 1,10 & \cdot 15 \\ 8b_1 - 15b_2 = 0 & \leftarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1,10 & \ominus \\ 23b_1 = 16,5 & \ominus \end{cases} \quad \begin{matrix} b_2 = 0,3826 \\ b_1 = 0,7174 \end{matrix}$$

$$a = \frac{500}{10^{0,7174} \cdot 8^{0,3826}} = 43,256$$

$$z = 43,256 \cdot L^{0,7174} K^{0,3826}$$


---