Vaasan yliopisto, syksy 2018 / ORMS1010

Matemaattinen Analyysi

8. harjoitus, viikko 49

R1	ke	12–14	F104	(5.12.)
R2	ke	14–16	F104	(5.12.)

1. Määritä funktion $f(x) = (10+3x)^{-2}$ MacLaurinin sarjan viisi ensimmäistä termiä.

2. Määritä funktion $h(x) = \sqrt{1+4x} = (1+4x)^{1/2}$ Taylorin sarjan viisi ensimmäistä termiä, kun kehityskeskus on $a = 2$.

3. Ratkaise seuraavien diff.-yhtälöiden yleiset ratkaisut: a) $xy' + y = 0$, b) $xy' + y = x^2$. (Huom. Ratkaisufunktio ei ole määritelty kaikilla x:n arvoilla. Oletamme nyt, että $x \geq 1$.)

4. Ratkaise $2y'' + 6y' - 8y = 160$, kun $y(0) = 9$ ja $y'(0) = 2$
Ohje: opetusmonisteen sivut: 144-150
(1) Kirjoita karakteristinen yhtälö (s. 146) ja ratkaise karakteristisen yhtälön juuret r_1 ja r_2.
(3) Kirjoita homogeeniyhtälön $2y'' + 6y' - 8y = 0$ yleinen ratkaisu $y_0(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
(4) Etsi yritteellä erityisratkaisu $y_1(x)$, joka toteuttaa alkuperäisen differentiaaliyhtälön $2y'' + 6y' - 8y = 160$ [yritä vakiota]
(5) Kirjoita alkuperäisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$ ja määritä kertoimet C_1 ja C_2 niin, että alkuarvot $y(0) = 9$ ja $y'(0) = 2$ toteutuvat.

5. Tuotteen hinta on p ja määrä varastossa on q. Tuotteen kysyntä on $D = a_1 - b_1 p$ ja tarjonta on $S = -a_2 + b_2 p$. Varaston muutosnopeus on $q' = S - D$. Varastoja pyritään pitämään keskimäärin suunnitellun kokoisena q^e samoin hintaa pyritää ohjaamaan tavoitearvoonsa p^e. Hintaa ohjataan tätä varten niin, että

$$dp/dt = p' = \alpha(q^e - q) + \beta(p^e - p)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow p'' = -\alpha q' - \beta p' \\
&\Leftrightarrow p'' + \beta p' = -\alpha(S - D) \\
&\Leftrightarrow p'' + \beta p' = -\alpha((-a_2 + b_2 p) - (a_1 - b_1 p)) \\
&\Leftrightarrow p'' + \beta p' + \alpha(b_1 + b_2)p = \alpha(a_1 + a_2)
\end{aligned}$$

Oletamme, että kaikki edellä esiintyneet vakiot $a_1, b_1, a_2, b_2, q^e, p^e, \alpha, \beta$ ovat positiivisia. Voidaan osoittaa todeksi lause: Toisen kertaluvun vakiokertoimisen lineaarisen DY:llä $ay'' + by' + cy = d$ stabiili tasapainoratkaisu, jos ja vain jos $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$.
Edellä olevan lauseen perusteella on selvää, että mallin tasapaino on stabiili ja tasapainohinta on

$$p_1(t) = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

Miten malli muuttuu ja miten mallin stabiilisuus muuttuu, jos asiakkaat lykkäävät ostojaan hinnan ollessa laskussa ja aientavat ostojaan hinnan ollessa nousussa. Mallinnamme asian muuttamalla mallin kysynnän hintariippuvuuden seuraavan kaltaiseksi

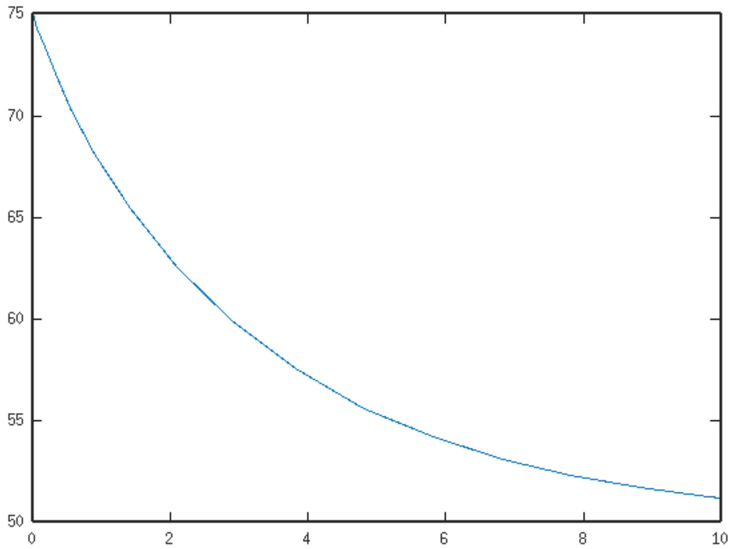
$$D = a_1 - b_1 p + c_1 p',$$

missä $c_1 > 0$.

Voit tehtävää 5 ratkaistessa tehdä kokeiluja seuraavalla Octave koodilla:

```
#h8t5esim.m
graphics_toolkit("gnuplot");
# mallin parametrit
a1 = 10;
b1 = 0.2;
a2 = 15;
b2 = 0.3;
alpha = 1;
beta = 2;
# piirrettava aika-ikkuna
xmin = 0;
xmax = 10;
# alkuarvot
p0 = 75;
dp0 = -10;

fun = @(x,y) [y(2), -beta*y(2)-alpha*(b1+b2)*y(1) + alpha*(a1+a2)];
[x,y] = ode45(fun, [xmin,xmax], [p0, dp0]);
plot(x,y(:,1))
```



Koodissa x on $N \times 1$ vektori ja $y = N \times 2$ matriisi.
Rivin i arvot ovat x_i ja $y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} & y_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_i) & p'(x_i) \end{pmatrix}$.
Funktio `fun` laskee y.n derivaatan

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dx}y)_i &= \left(\tfrac{d}{dx}y_{i1}, \quad \tfrac{d}{dx}y_{i2}\right) = \left(\tfrac{d}{dx}p(x_i), \quad \tfrac{d}{dx}p'(x_i)\right) = \left(p'(x_i), \quad p''(x_i)\right) \\
&= \left(p'(x_i), \quad -\beta p'(x_i) - \alpha(b_1+b_2)p(x_i) + \alpha(a_1+a_2)\right) \\
&= \left(y_{i2}, \quad -\beta y_{i2} - \alpha(b_1+b_2)y_{i1} + \alpha(a_1+a_2)\right)
\end{aligned}
$$

Rutiini `ode45` ratkaisee DY:n kun sille kerrotaan miten y' riippuu x:stä ja y:stä, ja missä rajoissa x on ja mitkä ovat y:n alkuarvot.