

TMA.101 Operaatioanalyysi

© Matti Laaksonen

Vaasan Yliopisto, 2002
Informaatioteknologian tiedekunta
Matemaattisten tieteiden laitos
PL 700 (Wolffintie 34)
65101 VAASA

Vaasan yliopisto

Operaatioanalyysi 2002, sisältö:

1. Johdanto	1
1.1. käsitteitä ja historiaa	1
1.2. OA:n luonteesta	5
1.3. OA:n tekniikoista	7
2. Lineaarinen optimointi	10
2.1. Johdatteleva esimerkki	10
2.2. LP-mallin oletukset	12
2.3. LP-mallin graafinen ratkaiseminen	14
2.3.1 Optimiratkaisun olemassaolo	15
2.4. Optimin paikka, yleinen tarkastelu	22
2.4.1 Käyvän alueen ominaisuuksia	27
2.4.2 Puuttuvat todistukset	31
2.5. Simplex-algoritmi	33
2.5.1 Yhtälöryhmän ratkaiseminen	33
2.5.2 Yhtälöryhmän kantaratkaisu	36
2.5.3 LP-mallin standardimuoto	37
2.5.4 Simplex-algoritmi	39
2.6. Simplex-algoritmin erikoistapauksia	45
2.6.1 Minimointitehtävä	45
2.6.2 Useita optimeja	46
2.6.3 Rajoittamaton optimi	52
2.6.4 Big M menetelmä	53
2.7. Matriisiesitys	59
2.7.1 Kertausta	59
2.7.2 Simplex-taulun matriisiesitys	61
2.7.3 Optimaalisuus- ja käypyysehto	64

2.8. Herkkyysanalyysi	66
2.8.1 Varjohinta ja redusoitu kustannus	66
2.8.2 Perustapaukset graafisesti ja simplexillä	72
2.8.3 Herkkyysanalyysiä matriisitekniikalla	78
2.9. Duaalitehtävä	xx
2.10. DEA-analyysi	xx
2.11. LP-mallin erikoistapauksia	xx
3. Kuljetus- ja kohdistusongelmat	xx
3.1. kuljetusongelma	xx
3.2. kuljetusalgoritmi	xx
3.3. kauttakuljetusongelma	xx
3.4. kohdistusongelma	xx
4. Verkkomallit	xx
4.1. verkkoteoriaa	xx
4.2. toimintaverkko	xx
4.3. CPM (Critical Path Method)	xx
4.4. PERT (Probabilistic Evaluation Review Technique)	xx
4.5. yleistetyt verkkomallit	xx
5. Kokonaislukuoptimointi	xx
5.1. kokonaislukumalli	xx
5.2. 0–1-mallit	xx
5.3. kokonaislukuoptimoinnin kompleksisuus	xx
6. Muita optimoinnin osa-alueita	xx
6.1. epälineaarinen optimointi	xx
6.2. tavoiteoptimointi	xx
6.3. dynaaminen optimointi	xx
Kirjallisuutta	x

1. Johdanto

1.1 Käsitteitä ja historiaa

Operaatioanalyysi (OA) liittyy osana johtamistieteeseen (Management Science, MS), joka sai alkunsa 1920-luvulla. Aluksi tutkimus oli akateemista ja erossa käytännöstä. Toisen maailmansodan aikana joukko tiedemiehiä sai tehtäväkseen tutkia sotilaallisten operaatioiden parasta suoritustapaa. Erityisesti tutkittiin tutkan käyttöä ja rajallisten resurssien käyttöä ilmasuojelussa ja laivasaattueiden suojauksessa.

Niukkojen resurssien paras mahdollinen käyttötapa on paitsi sodan, myös kaiken luovan ja rakentavan toiminnan arkiongelma. Sodan jälkeen nuoret tutkijat alkoivatkin soveltaa oppimiaan tehokkaita menetelmiä siviilielämän ongelmiin.

Uusi lähestymistapa oli hyvin käytännöllinen, operaatio-keskeinen ja vaati numeerista laskentatehoa. Rinnan tietokoneiden kehityksen kanssa OA:n sovellusten alue laajeni mutta kaikille sovelluksille on yhteistä ongelmien matemaattinen muotoilu ja tehokkaiden tietokonealgoritmien käyttö. (On jopa käytetty termiä 'matemaattinen ohjelmointi'.)

<p>Johtamistiede (Management Science, MS) on tieteenhaara, joka tutkii luonnontieteessä käytettävien ratkaisumenetelmien soveltamista liike-elämässä ja julkishallinnon ongelmissa.</p>
--

<p>Operaatioanalyysi (OA) on johtamistieteen osa-alue, jossa keskitytään tarkasteltavan operaation optimaalisen suoritustavan määrittämiseen.</p>
--

OA:sta käytetään englanninkielisiä termejä **'Operations Research'** ja **'Operational Research'** ja niistä kummastakin lyhennettä **'OR'** Suomenkielessä käytetään **'operaatiotutkimus'**-sanan sijasta matemaattisemmalta kuulostavaa **'operaatioanalyysi'**-sanaa.

Yllä oleva määritelmä ei juuri rajaa tutkimusaluetta. Seuraavassa luettelossa on ne sektiot, joihin Wienissä 1990 pidetty operaatioanalyysin konferenssi jakautui.

(1) **Linear and Stochastic Optimization.** (2) Non-linear Optimization. (3) **Discrete Optimization** and Complexity theory (4) *Stochastic Models of OR: Dynamic Programming, Queueing, Reliability, Maintenance.* (5) *Decision Theory and Multicriteria Decision-Making.* (6) Control Theory and Differential Games. (7) *Mathematical Economics* and Game Theory. (8) *Macroeconomics.* (9) *Econometrics and Statistics.* (10) Supercomputing and Simulation. (11) **Transporting and Routing.** (12) Non-linear Systems: Cycles, Chaos, Synergetics, Catastrophe Theory. (13) Artificial Intelligence and Foundations of Knowledge Processing. (14) *Expert systems, Decision Support and Information Systems.* (15) Fuzzy Sets and Systems. (16) Connectionism, Neural Nets, Parallel and Distributed Computing. (17) Production: Flexible Manufacturing, CIM, Sheduling. (18) *Marketing.* (19) R&D and **Project Management.** (20) **Logistics and Inventory.** (21) *Banking, Finance and Insurance.* (22) *Industrial Mathematics.* (23) Public Services. (24) Resources, Energy and Environment Planning. (25) Application Reports. (26) Degeneration Problems in Mathematical Programming. (27) Other Aspects of OR and Last Minute Papers.

1.1.1 Esimerkkejä

Seuraavissa esimerkeissä tarkastelemme ongelman muotoilua, emme sen ratkaisun yksityiskohtaista suoritustapaa. Opimme pian ratkaisemaan tämän kaltaisia ongelmia.

Esimerkki 1.1.1 Tehdas tuottaa kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen maksaa 40.00 mk/yksikkö ja tuotteen B valmistaminen maksaa 60.00 mk/yksikkö. Tuotteen A myynnistä saadaan voittoa 30.00 mk/yksikkö ja tuotteen B myynnistä saadaan voittoa 20.00 mk/yksikkö. Kumpaa tuotetta yrityksen kannattaa valmistaa?

Ratkaisu: Ongelma on triviaali, sillä tietenkin jokainen liikenevä markka kannattaa sijoittaa tuotteen A valmistamiseen. Ongelma syntyykin yleensä siitä, että jokin tai jotkin resurssit ovat rajalliset.

Esimerkki 1.1.2 Edellisen esimerkin tehdas voi sijoittaa tuotantoon 40,000 mk ja se voi käyttää tuotteiden valmistukseen 85 työtuntia = 5100 minuuttia. Tuotteen A valmistaminen kestää 15 minuuttia ja tuotteen B valmistaminen kestää 9 minuuttia.

Ratkaisu: Kaikkea rahaa ei voi sitoa A:n valmistamiseen, sillä aika ei riitä. Jos merkitsemme valmistettavien tuotteiden määriä muuttujilla x_A ja x_B , niin tehtävän tiedot voidaan tiivistää seuraaviin yhtälöihin.

$$\begin{array}{rcl} \text{voitto} & = & 30x_A + 20x_B \\ \text{raharajoite:} & & 40x_A + 60x_B \leq 40000 \\ \text{aikarajoite:} & & 15x_A + 9x_B \leq 5100 \end{array}$$

Yhtälöt voidaan sieventää muotoon

$$(1.1) \quad \begin{array}{rcl} \max z & = & 30x_A + 20x_B \\ & & 2x_A + 3x_B \leq 2000 \\ & & 5x_A + 3x_B \leq 1700 \\ & & x_A \geq 0 \\ & & x_B \geq 0 \end{array}$$

Normaalimenettely (jonka pian opimme) antaa optimiksi:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ x_B = 566.667 \\ z = 11333.333 \end{cases}$$

Normaalisti saatu tulos tulkitaan siten, että yrityksen tulee tuottaa vain tuotetta B. Pienellä kokeilulla havaitsee, että (1.1):n optimaalinen kokonaislukuratkaisu on

$$\begin{cases} x_A = 1 \\ x_B = 565 \\ z = 11330 \end{cases}$$

Tehtävän sanamuodosta ei käy ilmi onko yhden A-tuotteen valmistaminen mahdollista. Yleensä ei ole järkevää valmistaa yhtä tuotetta.

Esimerkki 1.1.3 Olkoon edellisen esimerkin tehtaalla kolmaskin tuotevaihtoehto C, jonka valmistaminen maksaa 200 mk/yksikkö, vie aikaa 4 minuuttia/yksikkö ja tuottaa voittoa 30 mk/yksikkö. Mitä tuotteita tehtaan nyt kannattaa tuottaa?

Ratkaisu: Uuden tuotteen valmistuskustannukset ovat niin suuret ettei sen valmistaminen tunnu houkuttelevalta. Toisaalta aiemmassa optimissa rahaa jäi käyttämättä.

Jos rahaa olisi käytettävissä määrättömästi, tehtaalla kannattaisi valmistaa C-tuotetta, sillä sen voiton suhde valmistusaikaan on paras. Uusi malli on

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_A + 20x_B \\ 2x_A + 3x_B + 10x_C &\leq 2000 \\ 5x_A + 3x_B + 4x_C &\leq 1700 \\ x_A, x_B, x_C &\geq 0 \end{aligned}$$

Josta saadaan optimiksi

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ x_B = 500 \\ x_C = 50 \end{cases}$$

1.2 Operaatioanalyysin luonteesta

Edellä olleet esimerkit ovat osin triviaaleja, mutta jo esimerkki 1.1.3 on melko hankala ratkaista ilman matemaattisia menetelmiä. Kun muuttujien määrä kasvaa tulee ongelman ratkaiseminen 'peukalotuntumalla' entistä vaikeammaksi.

Operaatioanalyysille on ominaista, että

- ongelma kuvataan mallilla, joka eri tilanteissa voi olla eri tyyppinen
- mallin avulla selvitetään toimintavaihtoehtot
- tarkastelu tapahtuu päätöksentekijän näkökulmasta
- paras toimintavaihtoehto valitaan hyvyyskriteerillä, joka useimmiten on taloudellinen tehokkuus
- analyysi suoritetaan yleensä tietokoneilla

Edelläsanoittuun liittyy joitakin ongelmia.

(1) Malli on suljettu siinä mielessä, että sen muuttujien määrä on rajoitettu ja niiden väliset riippuvuudet ja rajoitteet ovat täsmällisesti ilmaistuja. Todellisuus taas on avoin siinä mielessä, että muuttujia on lähes rajattomasti ja niiden väliset riippuvuudet ovat osittain satunnaisia ja saattavat muuttua ajan kuluessa. Malli on siis avoimen ongelman suljettu kuvaus. Analyysi ei onnistu, jos malli ei pysty kuvaamaan todellisuuden oleelliset piirteet.

(2) Jos malliin liittyy useita erillisiä hyvyyskriteerejä, voi niiden keskinäinen painotus olla ongelmallista. Helpoimmillaan OA on maksimoitaessa voittoa tuotannonohjauksessa. Esimerkki hankalasta ongelmasta on tilanne, jossa sodanjohto yrittää maksimoida vihollisen tappiot ja minimoida omat materiaali- ja miestappiot.

(3) Päätäjien hyvyyskriteeri voi olla ristiriidassa muiden sidosryhmien kriteerien kanssa. (Tuottavuus \leftrightarrow luonnonsuojelu, tuottavuus \leftrightarrow työllisyys, ...)

Ongelmanratkaisuprosessin vaiheet:

1. Ongelman formulointi

- havainnoidaan ja analysoidaan mallinnettavaa systeemiä
- identifioidaan keskeiset vaikutettavissa olevat tekijät (pätös­muuttujat) sekä vaikuttamattomissa olevat tekijät (parametrit)

- muodostetaan mitta ratkaisun hyvyydelle
- määritellään systeemin tilaa koskevat rajoitteet

2. Mallin muodostaminen

- määritellään mallin muuttujat
- estimoidaan mallin parametrit
- muodostetaan mallin tavoitefunktio
- muodostetaan mallin rajoitteet

3. Mallin ratkaiseminen

- ratkaistaan malli soveltuvaa algoritmia käyttäen

4. Mallin ratkaisun testaus

- verrataan mallin ratkaisua todelliseen tilanteeseen
- tutkitaan mallin ratkaisun käyttäytymistä muuttujien ja/tai parametrien arvojen muuttuessa
- parannetaan tarvittaessa mallia

5. Ratkaisun toimeenpano ja kontrolli

- luodaan tarkat toimintaohjeet mallin ratkaisun käytännön toteuttamista varten
- verrataan toteutuvaa toimintaa mallin antamaan kuvaan
- korjataan mallia tarvittaessa

Käytännön toiminnassa vaiheet 4 ja 5 ovat ongelmallisia, sillä työyhteisöillä on taipumus palata vanhoihin rutiineihinsa pian kehitysprojektin päätyttyä.

Jatkossa tulemme kuitenkin keskittymään vaiheeseen 3. Useimmat esimerkkimme liittyvät resurssien käyttöön lyhytaikaisissa prosesseissa, jolloin vaiheet 4 ja 5 ovat yleensä tarpeettomat.

1.3 Operaatioanalyysin tekniikoista

On tärkeää ymmärtää, ettei matemaattinen malli koskaan ole kuvailemansa ilmiön täydellinen kuva. Täydellistä mallia on turha yrittää konstruoida. Vaikka malli toimii aina 'vähän väärin', se silti voi olla hyödyllinen ja käyttökelpoinen (varsinkin, jos mallin heikkoudet ymmärretään ja osataan tarvittaessa ottaa huomioon). Operaatioanalyysissä käytettäviä malleja voidaan mm. luokitella seuraavasti

Käyttötarkoitus:

Optimointimalli laaditaan, jotta jokin toiminto saadaan tehtyä optimaalisella tavalla. Yleensä edellytetään, että optimointimalli antaa tarkkoja ja virheettömiä tuloksia.

kuvailevan mallin ei tarvitse olla tarkka, kunhan sen avulla saa ilmiöstä käsityksen.

Satunnaisuuden käyttö:

Stokastinen malli kuvaa ilmiötä, johon liittyy satunnaisuutta. Mallin ei odoteta ennustavan tarkasti yksittäistä tapausten kulkua, mutta sen avulla pitää voida tutkia odotusarvoja.

deterministinen malli ei sisällä satunnaisuutta. mallin tila määräytyy täydellisesti sen aikaisemmista tiloista. Useat hyödyllisistä malleista ovat deterministisiä vaikka ne ilmiöt, joita malleilla kuvataan ovatkin osittain satunnaisia.

Analyysin tyyppi:

Analyyttinen malli tutkitaan sellaisella yleisyyden tasolla, että tutkittavasta ilmiöstä voidaan tehdä yleistä tasoa olevia päätelmiä (esim: tietyn oletuksen yrityksen arvo ei riipu sen pääomarakenteesta [Modigliani–Miller].)

Numeerinen malli perustuu siihen, että ilmiötä jäljitellään tietokoneen avulla, jolloin ilmiön kulku voidaan erräessä yksityistapauksessa selvittää, mutta yleistysten teko on hankalaa ja epävarmemmalla pohjalla.

Heuristinen malli tiivistää ilmiötä koskevaa kokemustietoa niin, että löydetään todennäköisesti hyvä ratkaisu. Eräät sovellukset perustuvat siihen, että asiantuntijan 'arvausta' käytetään osana muuta perinteisempää analyysiä. Tietotekniikan avulla voidaan asiantuntijoiden päättelykaavioita koota tietämuskannoiksi, joita sitten hallitaan tekoälyohjelmistoilla (tietämuskannat ja asiantuntijajärjestelmät). Uusimmissa sovelluksissa heuristisia päättelykaavioita (osittain ristiriitaisia) käytetään tavalla, jolle on vakiintumassa nimitys '**sumeä säätö**'.

Aikatekijän käyttö:

Staattinen malli kuvaa tasapainoa.

Dynaaminen malli kuvaa ilmiötä, jota leimaa muutos. Useimmat talouden ilmiöt ovat dynaamisia, mutta silti monet perinteiset mallit tyytyvät kuvaamaan kuviteltua tasapainoa.

Klassisia OA:n malleja (malliperheitä):

lineaarinen optimointi

kokonaislukuoptimointi

dynaaminen optimointi

varastomallit

kohdistus- ja kuljetusmallit

jonomallit

peliteoria

Uusia ideoita:

epälineaariset mallit

itseorganisoituvat systeemit, synergia

kompleksiset systeemit

soluautomaatit (life game)

murtumisen rajalla olevat systeemit (kaaoksen reuna)

Monia ongelmia on vaikeata ja joskus mahdotonta ratkaista täydellisesti. Ratkaisun etsimisessä on kolme päätyyppiä:

algoritminen ratkaisu: ratkaisu saadaan toistamalla ennalta määrätyn säännön mukaisia operaatioita.

enumeraatio: kokeillaan kaikkia mahdollisia vaihtoehtoja ja valitaan niistä paras.

heuristinen ratkaisu: kokemuksen, päättelyn ja intuition avulla muodostetaan säännöt, joiden avulla ongelmalle haetaan todennäköisesti hyvä ratkaisu.

Tällä luennolla keskitytään optimointiin. Matemaattisessa optimoinnissa (matemaattisessa ohjelmoinnissa) kuvataan ongelman oleelliset piirteet muuttujien x_1, x_2, \dots, x_n avulla. Hyvyyskriteerinä on maksimoitava tai minimoitava tavoitefunktio (kohdefunktio)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maksimoinnissa (minimoinnissa) huomioidaan rajoitteet

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m$$

Linearisessa ohjelmoinnissa (LP) tarkastellaan tilanteita, joissa sekä tavoitefunktio f että rajoitteet g_j ovat lineaarisia ts. ensimmäisen asteen funktioita. Linearisella ohjelmoinnilla saadaan algoritminen ratkaisu suureen määrään erilaisia ongelmia.

2. Lineaarinen optimointi

2.1 Johdatteleva esimerkki

Esimerkki 2.1.1 Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa kahdenlaisia puuleluja: sotilaita ja junia. Sotilaan myyntihinta on 27€, ja siihen kuuluu materiaalia 10€ edestä. Jokainen valmistettu sotilas aiheuttaa lisäksi muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksiakeskimäärin 14€ edestä. Junan myyntihinta on 21€, ja siihen kuuluu 9€ edestä materiaalia. Muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksia jokainen juna aiheuttaa keskimäärin 10€.

Sotilaiden ja junien valmistus tapahtuu kahdella osastolla: puutyöosastolla ja viimeistelyosastolla. Yksi sotilas vaatii 1 tunnin puutyötä ja 2 tuntia viimeistelyä. Vastaavasti yksi juna vaatii 1 tunnin puutyötä ja 1 tunnin viimeistelyä.

Yritys pystyy hankkimaan kaiken tarvitsemansa materiaalin, mutta puutyö- ja viimeistelyosastojen kapasiteetti on rajallinen. Käytettävissä on 80 tuntia puutyötä per viikko, ja 100 tuntia viimeistelytyötä per viikko. Lelujen kysynnästä tiedetään, että junien kysyntä on käytännössä rajoittamaton, mutta sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 per viikko. Miten yritys voi maksimoida katetuottonsa? Muodostetaan ongelmasta LP-malli.

Päätösmuuttujat

Valitaan päätösmuuttujiksi muuttujat, jotka vaikuttavat katetuoton muodostumiseen ja joiden arvoon yritys kykenee vaikuttamaan. Yritys voi itse määrätä miten paljon

sotilaita ja junia valmistetaan.

x_1 : kpl sotilaita / viikko

x_2 : kpl junia / viikko

Tavoitefunktio

Määritetään optimointitehtävässä tarvittava maksimoitava tai minimoitava tavoitefunktio. Yritys maksimoi katetuottoaan. Viikottainen katetuotto tulee esittää päätösmuuttujien x_1 ja x_2 funktiona.

myyntituotot / viikko	$27x_1$	+	$21x_2$
materiaalikust. / viikko	$-10x_1$	-	$9x_2$
palkka- ja yleiskust./viikko	$-14x_1$	-	$10x_2$
katetuotto / viikko	$3x_1$	+	$2x_2$

Yritys pyrkii maksimoimaan (lineaarista) funktiota:

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

Tavoitefunktion kertoimet kuvaavat ko. muuttujien kontribuutiota yrityksen katetuottoon.

Rajoitteet

Viimeistelytyöihin on käytettävissä 100 h/vko. Puutöihin on käytettävissä 80 h/vko. Sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 kpl/vko. Siis

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 100 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 80 \\ 1x_1 &\leq 40 \end{aligned}$$

Merkkirajoite

Sotilaita tai junia ei voida valmistaa negatiivisia määriä, joten

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

LP-malli

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ratkaisemme mallin pian, mutta ensin toteamme joukon yleisiä asioita.

2.2 LP-mallin oletukset

LP-mallia rakennettaessa tehdään seuraavat oletukset. Oletukset tehdään, jotta malli olisi yksinkertainen. Jos oletukset johtavat liian paljon todellisuudesta poikkeavaan malliin, ei ongelmaa voida lähestyä LP-mallilla. Pieni ero todellisuuden ja mallin välillä ei yleensä haittaa.

1. **Suhteellisuusoletus:** jokaisen muuttujan x_i vaikutus tavoitefunktion arvoon ja rajoitettujen resurssien kulutukseen on suoraan verrannollinen ko. muuttujan arvoon.
2. **Additiivisuusoletus:** jokaisen muuttujan x_i vaikutus tavoitefunktion arvoon ja rajoitettujen resurssien kulutukseen on riippumaton muiden muuttujien x_j ($j \neq i$) saamista arvoista.
3. **Jaollisuusoletus:** Muuttujat x_i voivat saada kokonaislukuista poikkeavia arvoja.
4. **Varmuusoletus:** kaikki mallin parametrit tunnetaan varmuudella.

Oletukset 1 ja 2 johtavat siihen, että tavoitefunktio on lineaarinen ts.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

ja rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j, j = 1, \dots, m$$

Sanomme, että malli on Lp-malli, jos

- a) tavoitefunktio on lineaarinen
- b) rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä
- c) $x_i \geq 0$ (kaikki muuttujat saavat vain ei-negatiivisia arvoja)

Muuttujien arvot muodostavat vektorin $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Usein (varsinkin kun $n = 2$) vektoria sanotaan pisteeksi. Vektori on ratkaisu (solution), jos se toteuttaa rajoitteet. Ratkaisu on käypä (kelpaava, feasible), jos se lisäksi toteuttaa ehdon $x_i \geq 0$ kaikilla i . Maksimointitehtävän (minimointitehtävän) optimiratkaisu on se käypä ratkaisu, jolla tavoitefunktio saa suurimman (pienimmän) arvonsa.

Esimerkiksi lelumallissa piste $(x_1, x_2) = (40, 20)$ on käypä ratkaisu koska se toteuttaa kaikki rajoitteet.

$$\begin{array}{rcl|l} 2x_1 + x_2 & \leq & 100 & \text{sillä } 2 \cdot 40 + 20 = 100 \leq 100 \\ x_1 + x_2 & \leq & 80 & \text{sillä } 40 + 20 = 60 \leq 80 \\ x_1 & \leq & 40 & \\ & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Piste $(40, 20)$ ei kuitenkaan ole optimiratkaisu.

2.3 LP-mallin graafinen ratkaiseminen

Kun muuttujia on kaksi, saadaan ongelmasta havainnollinen esitys piirtämällä.

1. Piirretään koordinaatisto. Vaaka-akseli on x_1 -akseli ja pystyakseli on x_2 -akseli (katso kuvaa).
2. Piirretään rajoitteiden yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon.
3. Määritetään käypien ratkaisujen alue (feasible region).
4. Etsitään optimiratkaisu tutkimalla tavoitefunktion tasa-arvosuoria käypien ratkaisujen alueella.

Esimerkki 2.3.1 Tutkimme seuraavaksi puuleluesimerkkiä 2.1.1 graafisesti. Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa puusotilaita (x_1 kpl/viikko) ja puujunia (x_2 kpl/viikko). Katteen optimointi rajoitteet huomioiden johtaa seuraavaan LP-malliin:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ennen koordinaatiston piirtämistä laskemme, missä rajoitteita vastaavat suorat leikkaavat koordinaattiakselit. Tämä auttaa meitä valitsemaan akselien mittakaavat järkevästi.

1. rajoite: $2x_1 + x_2 \leq 100$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{ll} \text{suoran yhtälö:} & 2x_1 + x_2 = 100 \\ & \Leftrightarrow x_2 = -2x_1 + 100 \quad (\text{jyrkästi}) \text{ laskeva suora} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & 2x_1 + 0 = 100 \\ & \Leftrightarrow x_1 = 50 \quad \longrightarrow A = (50, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + x_2 = 100 \\ & \Leftrightarrow x_2 = 100 \quad \longrightarrow B = (0, 100) \end{array}$$

2. rajoite: $x_1 + x_2 \leq 80$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad x_1 + x_2 &= 80 \\ &\Leftrightarrow x_2 = -x_1 + 80 \quad (\text{loivasti}) \text{ laskeva suora} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} \quad x_1 + 0 &= 80 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 80 \quad \longrightarrow C = (80, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} \quad 0 + x_2 &= 80 \\ &\Leftrightarrow x_2 = 80 \quad \longrightarrow D = (0, 80) \end{aligned}$$

3. rajoite: $x_1 \leq 40$ käypä alue vasemmalla puolella

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad x_1 &= 40 \quad \text{pystysuora!} \\ &\longrightarrow E = (40, 0) \end{aligned}$$

Seuraavaksi piirretään koordinaatisto ja rajoitesuorat.

$$\begin{aligned} \text{Tavoitefunktio:} \quad 3x_1 + 2x_2 &= z \\ 2x_2 &= -3x_1 + z \\ x_2 &= -1.5x_1 + 0.5z \quad \text{laskeva suora} \end{aligned}$$

Siis ne ratkaisut joilla tavoitefunktio saa saman arvon (z) muodostavat laskevan suoran, jonka kulmakerroin on $-3/2$. Mitä suurempi on z , sitä ylempänä suora on. Kuvaan on piirretty z :n arvoja 60, 100 ja 180 vastaavat tasa-arvosuorat. Kuvasta näkee helposti, että ylin käypää aluetta koskettava tasa-arvosuora pisteessä G.

Optimi (G): 1. ja 2. rajoitesuoran leikkauspiste

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + x_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 60 \\ z = 180 \end{cases}$$

2.3.1 Optimiratkaisun olemassaolo, esimerkkejä

Tarkastellaan puuleluesimerkin käyvän alueen sisäpistettä ($x_1 = 20, x_2 = 20$). Mikään rajallisista resursseista (1. rajoite: ”viimeistelytyöhön käytetty aika”, 2. rajoite: ”puutöihin käytetty aika” ja 3. rajoite: ”markkinoiden ostovoima”) ei ole loppuunkäytetty. Kumpaakin muuttujaa (x_1 ja x_2) voidaan siis kasvattaa tai pienentää. Tavoitefunktion muodosta

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

näemme, että kasvattamalla hiukan muuttujan x_1 ja/tai muuttujan x_2 arvoa tavoitefunktio saa suuremman arvon. Piste (20, 20) ei siis ole optimiratkaisu. Sama päättely

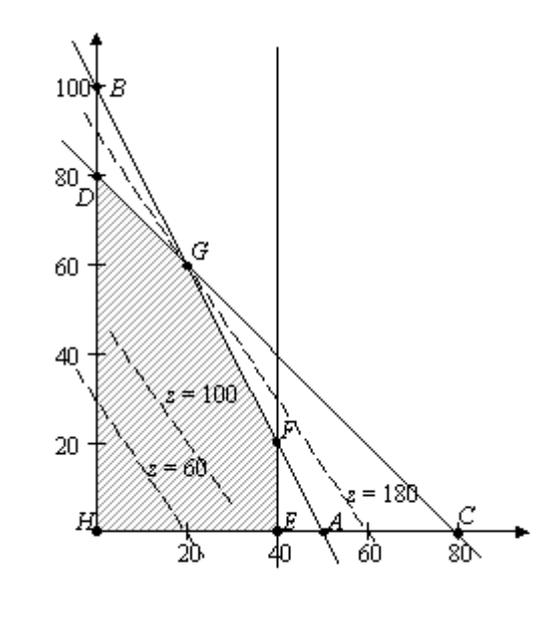


Figure 2.1: Leluesimerkin graafinen ratkaisu.

voidaan toistaa mille tahansa käyvän alueen sisäpisteelle. Voimme siis päätellä seuraavasti.

Jos optimiratkaisu on olemassa, niin se on käyvän alueen reunapiste.

Edellisen puoleluesimerkkiin löytyi yksikäsitteinen optimiratkaisu käyvän alueen nurkkapisteestä. Tämä on hyvin yleinen, mutta ei ainoa mahdollinen, lopputulos.

Seuraavissa kolmessa esimerkissä käydään läpi muut mahdolliset tulokset. Esimerkeissä ei ole mitään taustakertomusta, vaan lähdemme suoraan valmiina annetuista lp-malleista.

Esimerkki 2.3.2 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -6x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ratkaisu: Huomaa, että kyseessä on minimointitehtävä. (Vertaa laskuja kuvaan .)

1. rajoite: $2x_1 + 4x_2 \leq 9$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad 2x_1 + 4x_2 &= 9 \\ 4x_2 &= -2x_1 + 9 \\ x_2 &= -0.5x_1 + 2.5 \quad (\text{loivasti}) \text{ laskeva suora} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} \quad 2x_1 + 0 &= 9 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 4.5 \quad \longrightarrow A = (4.5, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} \quad 0 + 4x_2 &= 9 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 2.25 \quad \longrightarrow B = (0, 2.25) \end{aligned}$$

2. rajoite: $3x_1 + x_2 \leq 6$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad 3x_1 + x_2 &= 6 \\ x_2 &= -3x_1 + 6 \quad (\text{jyrkästi}) \text{ laskeva suora} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} \quad 3x_1 + 0 &= 6 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 2 \quad \longrightarrow C = (2, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} \quad 0 + x_2 &= 6 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 6 \quad \longrightarrow D = (0, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tavoitefunktio:} \quad z &= -6x_1 - 2x_2 \\ \Leftrightarrow 2x_2 &= -6x_1 - z \\ \Leftrightarrow x_2 &= -3x_1 - 0.5z \quad \text{laskeva suora} \end{aligned}$$

z pienenee, eli tavoitefunktion arvo paranee, kun x_1 tai x_2 kasvavat. z siis pienenee, kun tasa-arvosuora siirtyy oikealle ja ylöspäin. Koska tasa-arvosuora ja 2. rajoitesuora ovat yhdensuuntaiset (samat kulmakertoimet), ovat kaikki janan CE pisteet optimiratkaisuja (katso kuva). Tavoitefunktion optimiarvo on kaikissa näissä pisteissä sama

$$z(C) = -6x_1(C) - 2x_2(C) = -6 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = -12$$

Pisteen E koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1.5 \\ x_2 = 1.5 \end{cases}$$

Optimiratkaisu saadaan siis, kun $1.5 \leq x_1 \leq 2$ ja $x_2 = 6 - 3x_1$. Optimiratkaisuja on siis useita, mutta tavoitefunktion optimiarvo on yksikäsitteinen, $z_{\min} = -12$.

Esimerkki 2.3.3 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{aligned} \max \quad z &= x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad x_1 - x_2 &\geq 1 \\ &x_2 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

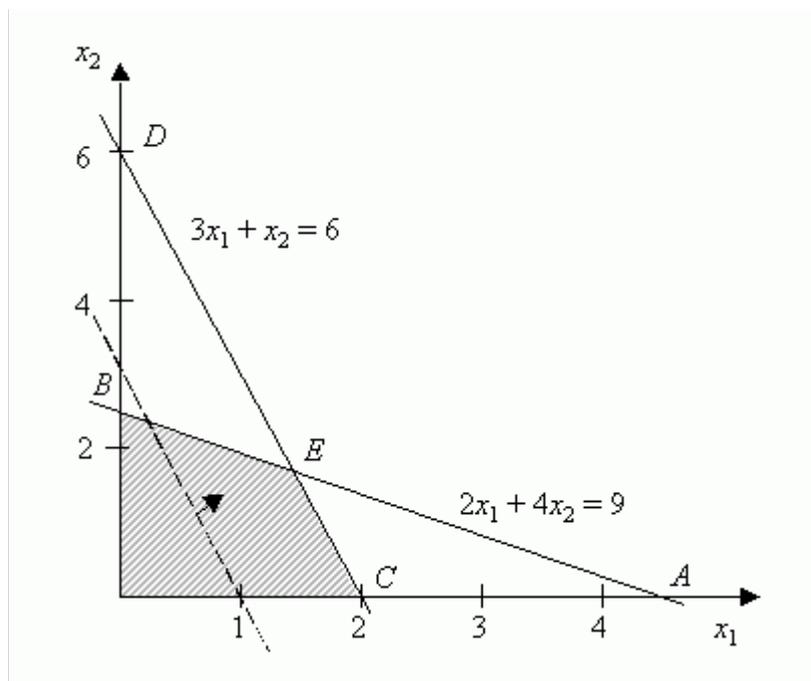


Figure 2.2: Esimerkin 2.3.2 graafinen ratkaisu.

Ratkaisu: Huomaa, että kyseessä on maksimointitehtävä. (Vertaa laskuja kuvaan .)

1. rajoite: $x_1 - x_2 \geq 1$ käypä alue on suoran alapuolella

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_2 &= -x_1 + 1 \\ x_2 &= x_1 - 1 \quad \text{nouseva suora} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} \quad x_1 + 0 &= 1 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 1 \quad \longrightarrow A = (1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} \quad 0 - x_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -1 \quad \longrightarrow B = (0, -1) \\ & \quad B \text{ ei siis ole käypä!!} \end{aligned}$$

2. rajoite: $x_2 \leq 2$ käypä alue vaakasuoran alapuolella

$$\text{suoran yhtälö:} \quad x_2 = 2 \quad \text{vaakasuora}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste C)} \quad 0 + x_2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 2 \quad \longrightarrow C = (0, 2) \end{aligned}$$

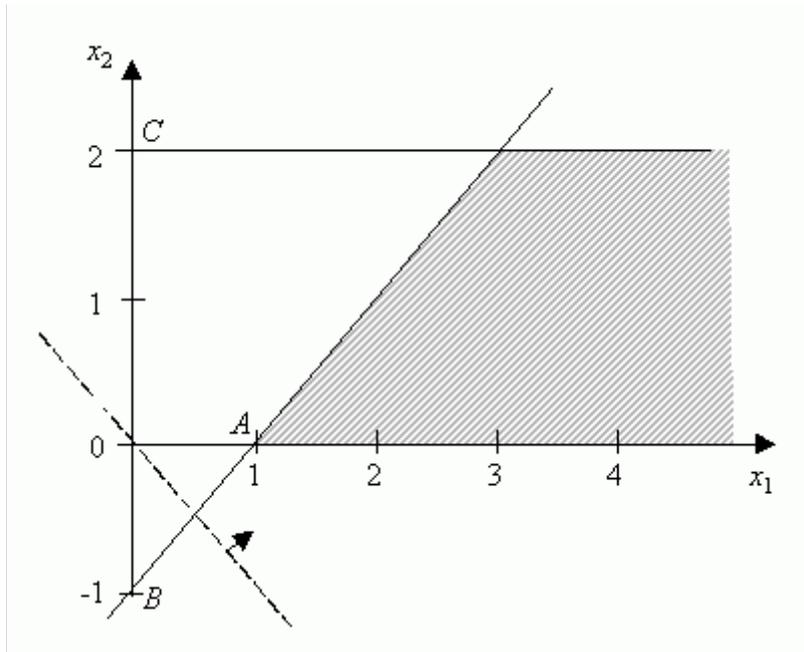


Figure 2.3: Esimerkin graafinen ratkaisu.

$$\begin{aligned} \text{Tavoitefunktio:} \quad z &= x_1 + x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -x_1 + z \quad \text{laskeva suora} \end{aligned}$$

Optimiratkaisu: Tavoitefunktion arvo paranee (z kasvaa), kun x_1 tai x_2 kasvavat, eli tasa-arvosuora siirtyy oikealle ja ylöspäin. Koska muuttujaa x_1 voidaan kasvattaa rajatta, voidaan myös tavoitefunktion arvoa kasvattaa rajatta, eikä optimiratkaisua siis ole olemassa. Se, että mikään rajallinen resurssi ei rajoita muuttujan x_1 arvoa, on poikkeuksellista. Mahdollisesti lp-malli on väärin muodostettu.

Esimerkki 2.3.4 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{aligned} \min \quad z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad x_1 + x_2 &\geq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ratkaisu: (Vertaa laskuja kuvaan.)

1. **rajoite:** $x_1 + x_2 \geq 10$ käypä alue on suoran yläpuolella

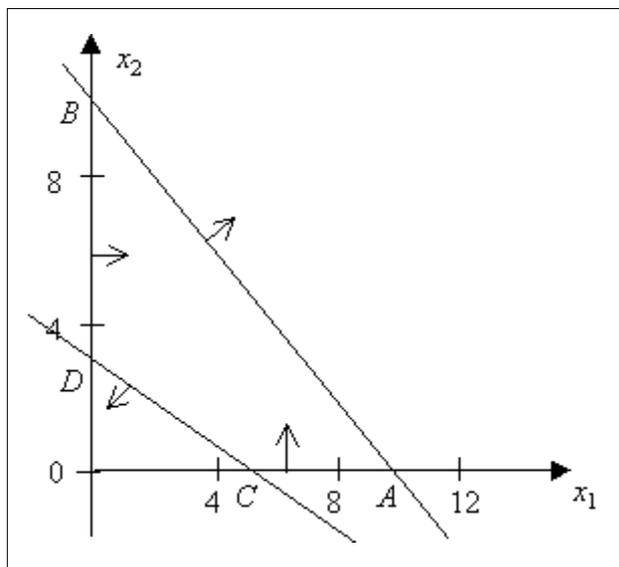


Figure 2.4: Esimerkin graafinen ratkaisu.

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad x_1 + x_2 &= 10 \\ x_2 &= -x_1 + 10 \quad \text{laskeva suora} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} \quad x_1 + 0 &= 10 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 10 \quad \longrightarrow A = (10, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} \quad 0 + x_2 &= 10 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 10 \quad \longrightarrow B = (0, 10) \end{aligned}$$

2. rajoite: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad 3x_1 + 5x_2 &= 15 \\ 5x_2 &= -3x_1 + 15 \\ x_2 &= -0.6x_1 + 3 \\ \text{laskeva suora} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} \quad 3x_1 + 0 &= 15 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 5 \quad \longrightarrow C = (5, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} \quad 0 + 5x_2 &= 15 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 3 \quad \longrightarrow D = (0, 3) \end{aligned}$$

Kun rajoitesuorat piirretään koordinaatistoon nähdään, että käypä alue on tyhjä. Rajoitteet ovat ristiriitaiset, eikä ongelmalle ole olemassa ratkaisua.

Edellisten esimerkkien perusteella voimme yleistää, että on neljä perustapausta:

1. LP-mallilla on yksikäsitteinen optimiratkaisu.

★ Optimiratkaisu on käyvän alueen nurkkapiste.

2. LP-mallilla on useita optimiratkaisuja.

★ Optimiratkaisu on käyvän alueen reunan osa.

★ Tavoitefunktio saa kaikissa optimipisteissä saman arvon. Tavoitefunktion optimiarvo on siis yksikäsitteinen.

3. LP-mallilla on rajoittamaton optimi.

★ Tavoitefunktion arvo saadaan miten hyväksi tahansa.

★ Mallilla on ratkaisuja, mutta ei optimiratkaisua.

4. LP-mallilla ei ole ratkaisuja.

★ Käypä alue on tyhjä. (Eli ratkaisujoukko on tyhjä.)

★ Rajoitteet ovat ristiriitaiset.

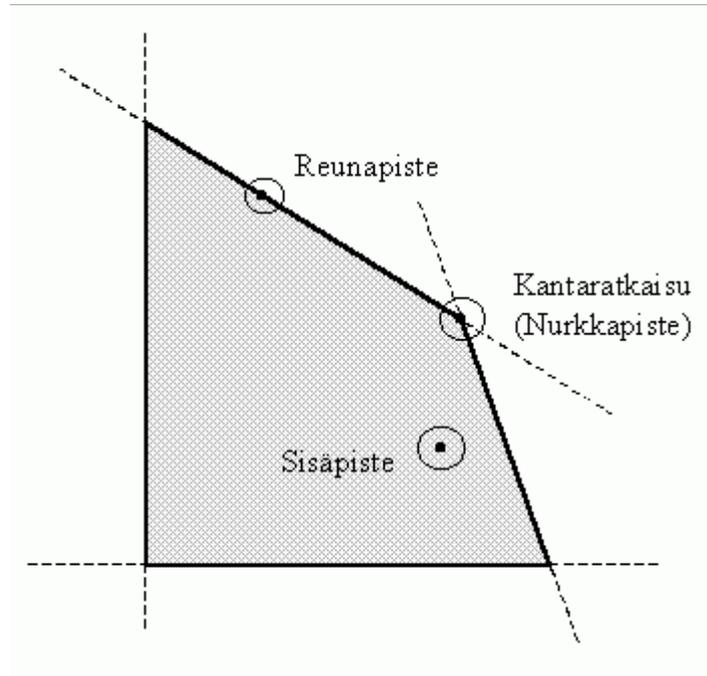


Figure 2.5: Käyvän alueen reuna.

Rajoite on *aktiivinen* pisteessä \mathbf{x} , jos rajoite toteutuu yhtälömuodossa.

$$\begin{aligned} j\text{:s resurssirajoite on aktiivinen, jos} & \quad \mathbf{a}_j \bullet \mathbf{x} = b_j \\ k\text{:s merkkirajoite on aktiivinen, jos} & \quad x_k = 0 \end{aligned}$$

Käypä ratkaisu $\mathbf{x} \in K$ on *käyvän alueen reunapiste*, jos jokin rajoitteista on siinä aktiivinen. Käypä ratkaisu $\mathbf{x} \in K$ on *käyvän alueen sisäpiste*, jos mikään rajoitteista ei ole siinä aktiivinen.

Käypä ratkaisu $\mathbf{x} \in K$ on *kantaratkaisu* eli (K :n *nurkkapiste*), jos siinä on vähintään n lineaarisesti riippumatonta aktiivista rajoitetta.

Vertaa tehtyjä määritelmiä kuvaan (2.2). Pisteet B, C, E ja origo ovat kantaratkaisuja. Pisteet A ja D eivät ole kantaratkaisuja sillä ne eivät ole käypiä.

Metrisen määritelmän mukaan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sisäpiste, jos on olemassa \mathbf{x} -keskinen ja r -säteinen ($r > 0$) pallo $B_r = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\| < r\}$ joka kokonaan sisältyy A :han. Vastaavasti $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ reunapiste, jos jokainen \mathbf{x} -keskinen ja r -säteinen ($r > 0$) pallo sisältää sekä A :n pisteitä että A :han kuulumattomia pisteitä. LP-mallin käyvän alueen tapauksessa edellä annettu reunan määritelmä antaa saman reunapistejoukon kuin metrisen määritelmä.

Kun muuttujia on kaksi tai kolme, voimme piirtää käyvän alueen ja toteamme, että määritelmän mukaiset termit ovat osuvia ja kuvaavia. Käytämme termejä myös, kun muuttujia on enemmän kuin 2 tai 3.

Lineaarisessa optimoinnissa reunapisteet ovat tärkeitä seuraavan tuloksen vuoksi:

Lause 2.4.1 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ lineaarinen funktio. Jos $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{x}^* \in A$ on optimointitehtävän

$$\begin{array}{ll} \max & z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{ehdolla} & \mathbf{x} \in A \end{array}$$

optimiratkaisu, niin \mathbf{x}^* on A :n reunapiste.

Todistus: Tehdään vasta oletus: \mathbf{x}^* on A :n sisäpiste. On siis olemassa $r > 0$ siten, että r -säteinen pallo keskipisteenä \mathbf{x}^* sisältyy kokonaan A :han. Erityisesti

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}^* + \frac{r\mathbf{c}}{2\|\mathbf{c}\|} \in A$$

ja

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + \frac{r\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2\|\mathbf{c}\|} = f(\mathbf{x}^*) + \frac{r}{2}\|\mathbf{c}\| > f(\mathbf{x}^*)$$

Tämä on ristiriita, sillä funktio ei voi saada missään A :n pisteessä suurempaa arvoa kuin pisteessä \mathbf{x}^* . ///

Jos siis LP-mallilla (2.1-2.3) on optimiratkaisu, niin se on käyvän alueen reunapiste. Voimme jopa sanoa enemmän.

Lause 2.4.2 Jos siis LP-mallilla (2.1) on optimiratkaisu, niin jokin kantaratkaisu (nurkkapiste) on optimiratkaisu.

Todistus: Väitte on ilmeinen edellisen kappaleen esimerkkien tapauksessa. Yleinen todistus väitteelle johtaa helposti pikkutarkkaan saivarteluun, joten tyydymme nyt kappaleen lopussa esitettyyn perusteluluonnokseen. Perustelua ei tentissä vaadita, joten sen voi sivuuttaa, jos tyytyy annettuun tulokseen. ///

Periaatteessa voimme siis laskea kaikki kantaratkaisut ja valita niistä parhaan. Jos mallissa on n muuttujaa ja $n+m$ rajoitetta, niin kantaratkaisujen läpikäynti edellyttää

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

yhtälöryhmän ratkaisua. Tämä voi olla erittäin iso työ. Onneksi optimaalinen kantaratkaisu voidaan tunnistaa laskematta kaikkia muita kantaratkaisuja.

Lause 2.4.3 (LP-mallin optimin Karush–Kuhn–Tucker -ehdot) Olkoon $\mathbf{x}^P \in \mathbb{R}^n$ LP-mallin

$$(2.4) \quad \begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{ehdoin} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

nurkkapistettä P vastaava käypä kantaratkaisu. Jos on olemassa ei-negatiiviset vektorit (sarakematriisit) $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ siten, että seuraavat neljä ehtoa ovat voimassa

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathbf{Ax}^P + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ (2) & \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ (3) & \mathbf{u}^T \mathbf{x}^P + \mathbf{v}^T \mathbf{s} = 0 \\ (4) & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

niin \mathbf{x}^P on LP-mallin optimiratkaisu.

Todistus: Lauseen todistus on melkein triviaali, mutta lykkäämme senkin kappaleen loppuun. ///

Esimerkki 2.4.1 Jotta lauseen merkitys avautuisi meille paremmin tarkastelemme esimerkkinä LP-mallia:

$$(2.5) \quad \begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{ehdoin} & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3.5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

eli LP-mallia

$$(2.6) \quad \begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{ehdoin} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

missä

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kuvaan 2.6 on piirretty mallin käypä alue sekä nurkkapisteesiin aktiivisten rajoitusten normaalivektorit.

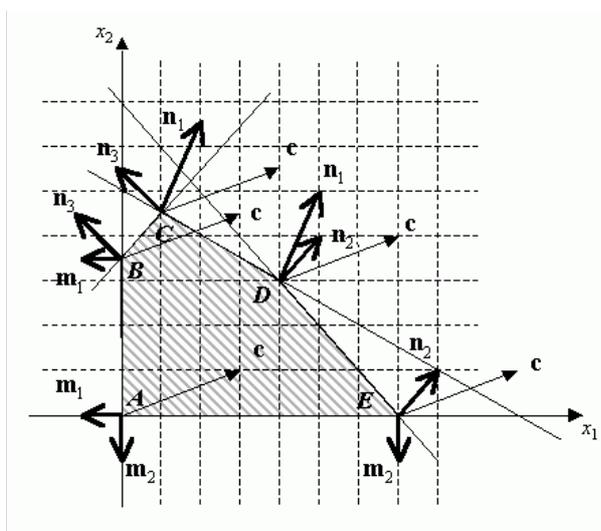


Figure 2.6: Käypä alue.

Rajoitteiden normaalivektorit ovat

	rajoite	normaalivektori
1. resurssi:	$x_1 + 2x_2 \leq 10$	$\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}_1^T = (1 \ 2)^T$
2. resurssi:	$x_1 + x_2 \leq 7$	$\mathbf{n}_2 = \mathbf{a}_2^T = (1 \ 1)^T$
3. resurssi:	$-x_1 + x_2 \leq 3.5$	$\mathbf{n}_3 = \mathbf{a}_3^T = (-1 \ 1)^T$
1. merkki:	$-x_1 \leq 0$	$\mathbf{m}_1 = -\mathbf{e}_1 = (-1 \ 0)^T$
2. merkki:	$-x_2 \leq 0$	$\mathbf{m}_2 = -\mathbf{e}_2 = (0 \ -1)^T$

Jokaisessa nurkkapisteessä aktiivisten rajoitteiden normaalivektorit muodostavat nurkkaa vastaavan nurkkakannan, jonka avulla \mathbf{c} -vektori voidaan esittää. Suoraan kuvasta voimme lukea, että

nurkka	nurkkakanta	\mathbf{c} :n esitys kannassa
$\mathbf{x}^A = (0 \ 0)^T$	$\{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$	$\mathbf{c} = -3\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$
$\mathbf{x}^B = (0 \ 3.5)^T$	$\{\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_3\}$	$\mathbf{c} = -4\mathbf{m}_1 + \mathbf{n}_3$
$\mathbf{x}^C = (1 \ 4.5)^T$	$\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3\}$	$\mathbf{c} = (4/3)\mathbf{n}_1 - (5/3)\mathbf{n}_3$
$\mathbf{x}^D = (4 \ 3)^T$	$\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$	$\mathbf{c} = -2\mathbf{n}_1 + 5\mathbf{n}_2$
$\mathbf{x}^E = (7 \ 0)^T$	$\{\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2\}$	$\mathbf{c} = 2\mathbf{m}_2 + 3\mathbf{n}_2$

Merkitään

$$\mathbf{c} = u_1\mathbf{m}_1 + u_2\mathbf{m}_2 + v_1\mathbf{n}_1 + v_2\mathbf{n}_2 + v_3\mathbf{n}_3,$$

missä ei-aktiivisen rajoitteen normaalivektorin kerroin asetetaan nolllaksi. Silloin

nurkka	$\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$	$\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$	$\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ s_3)^T$
\mathbf{x}^A	$\mathbf{u} = (-3 \ -1)^T$	$\mathbf{v} = (0 \ 0 \ 0)^T$	$\mathbf{s} = (10 \ 7 \ 3.5)^T$
\mathbf{x}^B	$\mathbf{u} = (-4 \ 0)^T$	$\mathbf{v} = (0 \ 0 \ 1)^T$	$\mathbf{s} = (3 \ 3.5 \ 0)^T$
\mathbf{x}^C	$\mathbf{u} = (0 \ 0)^T$	$\mathbf{v} = (4/3 \ 0 \ -5/3)^T$	$\mathbf{s} = (0 \ 1.5 \ 0)^T$
\mathbf{x}^D	$\mathbf{u} = (0 \ 0)^T$	$\mathbf{v} = (-2 \ 5 \ 0)^T$	$\mathbf{s} = (0 \ 0 \ 4.5)^T$
\mathbf{x}^E	$\mathbf{u} = (0 \ 2)^T$	$\mathbf{v} = (0 \ 3 \ 0)^T$	$\mathbf{s} = (3 \ 0 \ 10.5)^T$

Jokaisessa nurkkapisteessä pätee

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= u_1 \mathbf{m}_1 + u_2 \mathbf{m}_2 + v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2 + v_3 \mathbf{n}_3 \\
&= -u_1 \mathbf{e}_1 - u_2 \mathbf{e}_2 + v_1 \mathbf{a}_{1\bullet}^T + v_2 \mathbf{a}_{2\bullet}^T + v_3 \mathbf{a}_{3\bullet}^T \\
&= -\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 a_{11} \\ v_1 a_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 a_{21} \\ v_2 a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 a_{31} \\ v_3 a_{32} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{A}^T \mathbf{v} - \mathbf{u}
\end{aligned}$$

Nyt voimme tulkita lauseen 2.4.3 merkityksen. Konstruoidaan esimerkin tapaan jokaiseen LP-mallin käyvän alueen nurkkapisteeseen vektorit \mathbf{u} ja \mathbf{v} . Jos $s_k > 0$, niin k :s resurssirajoite ei ole aktiivinen ja siis $v_k = 0$. Vastaavasti jos $x_j > 0$, niin j :s merkkirajoite ei ole aktiivinen ja siis $u_j = 0$. Siis

$$\mathbf{u}^T \mathbf{x}^P + \mathbf{v}^T \mathbf{s} = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n + v_1 s_1 + \dots + v_m s_m = 0$$

ja lauseen ehto (3) on tosi jokaisessa nurkkapisteessä. Vastaavasti kuin esimerkin yhteydessä voidaan suoralla laskulla osoittaa, että myös ehto (2) on tosi jokaisessa nurkkapisteessä. Lause siis sanoo varsinaisesti sen, että se nurkkapiste, jota vastaavat vektorit \mathbf{u} ja \mathbf{v} ovat ei-negatiiviset, on LP-mallin optimiratkaisu.

2.4.1 Käyvä alueen ominaisuuksia

Lause 2.4.4 LP-mallin kahta käypää pistettä yhdistävän janan kaikki pisteet ovat käypiä.

Katselemalla esimerkkien 2.3.1–2.3.4 graafisia ratkaisuja tulee nopeasti tunne, että lauseen väite on tosi. Jotta osaisimme perustella väitteen, kun muuttujia on enemmän kuin kaksi, laskemme yhden numeerisen esimerkin ja samalla totumme matriisimerkintään.

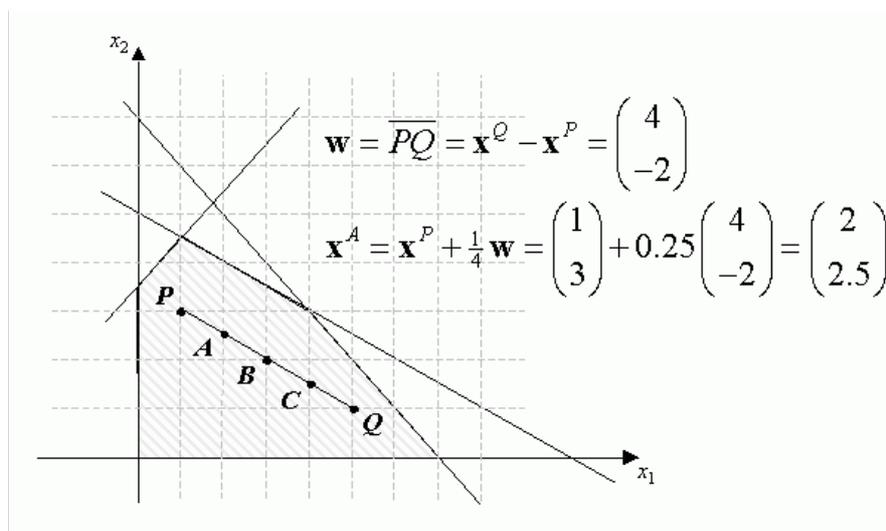


Figure 2.7: Kahta käypää pistettä yhdistävä jana.

Esimerkki 2.4.2 Tarkastellaan taas LP-mallia

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3.5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pisteet

$$\mathbf{x}^P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}^Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovat kumpikin käypää, sillä ne toteuttavat kaikki rajoitteet

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 \cdot 3 \leq 10 \\ 1 + 3 \leq 7 \\ -1 + 3 \leq 3.5 \\ 1 \geq 0 \\ 3 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 + 2 \cdot 1 \leq 10 \\ 5 + 1 \leq 7 \\ -5 + 1 \leq 3.5 \\ 5 \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{array} \right.$$

Pisteitä \mathbf{x}^P ja \mathbf{x}^Q yhdistävällä janalla olevat pisteet

$$\mathbf{x}^A = \mathbf{x}^P + 0.25(\mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.25 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^B = \mathbf{x}^P + 0.50(\mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.50 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^C = \mathbf{x}^P + 0.75(\mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.75 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

toteuttavat myös kaikki rajoitteet

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2 \cdot 2.5 \leq 10 \\ 2 + 2.5 \leq 7 \\ -2 + 2.5 \leq 3.5 \\ 2 \geq 0 \\ 2.5 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{ja} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 + 2 \cdot 2 \leq 10 \\ 3 + 2 \leq 7 \\ -3 + 2 \leq 3.5 \\ 3 \geq 0 \\ 2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 + 2 \cdot 1.5 \leq 10 \\ 4 + 1.5 \leq 7 \\ -4 + 1.5 \leq 3.5 \\ 4 \geq 0 \\ 1.5 \geq 0 \end{array} \right.$$

Perustellaan seuraavaksi edellinen lause vähän yleisemmin ja täsmällisemmin.

Lause 2.4.5 Okoon $\mathbf{x}^P \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}^Q \in \mathbb{R}^n$ kaksi LP-mallin

$$\begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} & n \text{ kpl muuttujia} \\ \text{ehdoin} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & m \text{ kpl resurssirajoitteita} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & n \text{ kpl merkkirajoitteita} \end{array}$$

käypää ratkaisua ja olkoon vastaavat tavoitefunktion arvot $z_P = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^P$ ja $z_Q = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^Q$. Merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P$. Jos $\beta \in \mathbb{R}, 0 \leq \beta \leq 1$, niin piste

$$\mathbf{x}^\beta = \mathbf{x}^P + \beta \mathbf{w} = (1 - \beta) \mathbf{x}^P + \beta \mathbf{x}^Q$$

on käypä ratkaisu ja tavoitefunktion arvo siinä on

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^\beta = z_P + \beta \mathbf{c}^\top \mathbf{w} = (1 - \beta) z_P + \beta z_Q$$

Todistus: \mathbf{x}^β on käypä, jos se toteuttaa kaikki rajoitteet. Tarkistetaan ne kaikki:

(i :s resurssirajoite:)

$$\mathbf{a}_{i \bullet} \mathbf{x}^\beta = (1 - \beta) \underbrace{\mathbf{a}_{i \bullet} \mathbf{x}^P}_{\leq b_i} + \beta \underbrace{\mathbf{a}_{i \bullet} \mathbf{x}^Q}_{\leq b_i} \leq b_i$$

$\Rightarrow \mathbf{x}^\beta$ toteuttaa i :nnen resurssirajoitteen

(k :s merkkirajoite:)

$$x_k^\beta = \mathbf{e}_k^\top \mathbf{x}^\beta = \mathbf{e}_k^\top ((1 - \beta) \mathbf{x}^P + \beta \mathbf{x}^Q) = (1 - \beta) \underbrace{\mathbf{e}_k^\top \mathbf{x}^P}_{=x_k^P \geq 0} + \beta \underbrace{\mathbf{e}_k^\top \mathbf{x}^Q}_{=x_k^Q \geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow \mathbf{x}^\beta$ toteuttaa k :nnen merkkirajoitteen

Siis \mathbf{x}^β on käypä ratkaisu. Lasketaan vielä tavoitefunktion arvo tässä pisteessä

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^\beta &= \mathbf{c}^\top (\mathbf{x}^P + \beta \mathbf{w}) = z_P + \beta \mathbf{c}^\top \mathbf{w} \\ &= z_P + \beta \mathbf{c}^\top (\mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P) = z_P + \beta(z_Q - z_P) = (1 - \beta)z_P + \beta z_Q\end{aligned}$$

///

Kahden pisteen rajaaman janan yleistyksenä voimme määritellä kolmen tai useamman pisteen rajaama monikulmio seuraavasti. Merkitään pisteiden P_1, P_2, \dots, P_N rajaamaa monikulmiota merkinnällä $[P_1, P_2, \dots, P_N]$ ja määritellään

$$[P_1, P_2, \dots, P_N] = \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^P = \sum_{k=1}^N \beta_k \mathbf{x}^{P_k}, \sum_{k=1}^N \beta_k = 1 \text{ ja } \forall k : 0 \leq \beta_k \leq 1 \right\}$$

Pienin muutoksin edelliseen, voidaan helposti todistaa seuraava yleistys.

Lause 2.4.6 Jos pisteet P_1, P_2, \dots, P_N ovat LP-mallin käyvän alueen pisteitä, niin

(1) kaikki monikulmion $[P_1, P_2, \dots, P_N]$ pisteet ovat käypiä ja

(2)

$$\text{jos } P \in [P_1, P_2, \dots, P_N], \mathbf{x}^P = \sum_{k=1}^N \beta_k \mathbf{x}^{P_k} \text{ niin } z_P = \sum_{k=1}^N \beta_k z_{P_k}$$

///

Nyt on helppo perustella seuraavat väitteet:

Lause 2.4.7 Olkoon LP-mallin käyvän alueen nurkkapistet P_1, P_2, \dots, P_N . Oletamme, että nurkkapistet on järjestetty paremmuusjärjestykseen siten, että $z_{P_1} \geq z_{P_2} \geq \dots \geq z_{P_N}$. Silloin

(1) P_1 on optimipiste monikulmiossa $[P_1, P_2, \dots, P_N]$.

(2) Jos k parasta nurkkapistettä ovat yhtä hyviä (ts. $z_{P_1} = z_{P_2} = \dots = z_{P_k}$), niin kaikki monikulmion $[P_1, P_2, \dots, P_k]$ pisteet ovat optimipisteitä monikulmiossa $[P_1, P_2, \dots, P_N]$.

Todistus: (1) Etsittäessä parasta pistettä P^* , eli parasta arvoa $z_{P^*} = \sum_{k=1}^N \beta_k z_{P_k}$ kannattaa tietenkin antaa suurin mahdollinen paino parhaalle arvolle, eli $\beta_1 = 1$ ja $\beta_k = 0, k > 1$. Siis optimipisteen koordinaatit ovat

$$\mathbf{x}^{P^*} = 1 \cdot \mathbf{x}^{P_1} + 0 \cdot \mathbf{x}^{P_2} + \dots + 0 \cdot \mathbf{x}^{P_N} = \mathbf{x}^{P_1}$$

(2) Olkoon $z_{P_1} = z_{P_2} = \dots = z_{P_k} = z^*$ ja $\mathbf{x}^P = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{x}^{P_j}$. Silloin

$$z_P = \sum_{j=1}^k \beta_j z_{P_j} = \sum_{j=1}^k \beta_j z^* = z^* \left(\sum_{j=1}^k \beta_j \right) = z^*$$

///

Huomautus: Edellä läpikäyty pohdiskelu ei kata kaikkia tilanteita, sillä LP-mallin käypä alue ei aina ole nurkkapisteen rajaama monikulmio. (Ks. esimerkin 2.3.3 käypää aluetta (kuva 2.3) jolla on kaksi nurkkapistettä, mutta silti käypä alue on laajempi kuin jana.)

2.4.2 * Puuttuvat todistukset *

Tässä alakappaleessa esitettyjä todistuksia ei kysytä tentissä, joten voit halutessasi sivuuttaa koko kappaleen.

Lauseen 2.4.3 (Karush–Kuhn–Tucker) todistus: Oletamme nyt, että $\mathbf{x}^P \in \mathbb{R}^n$ on LP-mallin

$$(2.7) \quad \begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{ehdoin} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

pistettä P vastaava käypä ratkaisu ja että on olemassa ei-negatiiviset vektorit (sarake-matriisit) $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ siten, että seuraavat neljä ehtoa ovat voimassa

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathbf{Ax}^P + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ (2) & \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ (3) & \mathbf{u}^T \mathbf{x}^P + \mathbf{v}^T \mathbf{s} = 0 \\ (4) & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Olkoon Q mikä tahansa toinen käyvän alueen piste ja \mathbf{x}^Q sitä vastaava ratkaisuvektori. Lause on todistettu, kun osoitamme että $z_P \geq z_Q$.

Koska \mathbf{x}^Q on käypä ratkaisu, eli $\mathbf{Ax}^Q \leq \mathbf{b}$, on olemassa ei-negatiivinen sarakematriisi \mathbf{t} siten että $\mathbf{Ax}^Q + \mathbf{t} = \mathbf{b}$. Merkitään $\mathbf{w} = \mathbf{x}^Q - \mathbf{x}^P$. Silloin

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Ax}^P + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ax}^Q + \mathbf{t} = \mathbf{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Aw} = \mathbf{Ax}^Q - \mathbf{Ax}^P = \mathbf{s} - \mathbf{t} \quad (5)$$

Nyt voimme laskea tavoitefunktion arvon pisteessä Q seuraavasti. (Muista, että matriisit \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{t} ja \mathbf{x}^Q eivät sisällä negatiivisia alkioita.)

$$\begin{aligned} z_Q &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}^Q = \mathbf{c}^T (\mathbf{x}^P + \mathbf{w}) = z_P + \mathbf{c}^T \mathbf{w} \\ &\stackrel{(2)}{=} z_P + \mathbf{v}^T \mathbf{Aw} - \mathbf{u}^T \mathbf{w} \\ &\stackrel{(5)}{=} z_P + \mathbf{v}^T \mathbf{s} - \mathbf{v}^T \mathbf{t} - \mathbf{u}^T \mathbf{w} \\ &= z_P + \mathbf{v}^T \mathbf{s} - \mathbf{v}^T \mathbf{t} - \mathbf{u}^T \mathbf{x}^Q + \mathbf{u}^T \mathbf{x}^P \\ &\stackrel{(3)}{=} z_P - \mathbf{v}^T \mathbf{t} - \mathbf{u}^T \mathbf{x}^Q \leq z_P \end{aligned}$$

///

Esimerkki 2.4.3 Sovelletaan edellisen todistuksen lopussa olevaa kaavaa esimerkin 2.4.1 pisteisiin E ja D . Ratkaisu $\mathbf{x}^E = (7 \ 0)^\top$ on selvästi optimiratkaisu ja $z_E = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^E = 3 \cdot 7 + 1 \cdot 0 = 21$. Vastaavasti $z_D = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^D = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 15$. Esimerkin 2.4.1 taulukoista voimme lukea, että

$$\text{pisteessä } \mathbf{x}^E = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ovat } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 10.5 \end{pmatrix} \text{ ja}$$

$$\text{pisteessä } \mathbf{x}^D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ on } \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Siis

$$\begin{aligned} z_D &= z_E - \mathbf{v}^\top \mathbf{t} - \mathbf{u}^\top \mathbf{x}^D \\ &= 21 - (0 \ 3 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} - (0 \ 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 21 - 0 - 6 = 15 \quad (\text{kuten pitikin olla}) \end{aligned}$$

Lauseen 2.4.2 perustelu: Olkoon \mathbf{x}^* LP-mallin optimiratkaisu ja $z^* = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^*$ tavoitefunktion optimiarvo. Aiemmasta tiedämme, että \mathbf{x}^* on käyvän alueen reunalla, joten ainakin yksi rajoite on aktiivinen. Oletamme, että aktiivisten rajoitteiden normaalivektorit virittävät \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen aliavaruuden V . Jos $k = n$, niin \mathbf{x}^* on kantaratkaisu. Jos $k < n$, niin jaetaan \mathbf{c} kahteen komponenttiin, V :hen sisältyvään ja V :tä vastaan kohtisuoraan, $\mathbf{c} = \mathbf{c}_V + \mathbf{c}_\perp$ siten, että $\mathbf{c}_V \in V$ ja $\mathbf{c}_\perp \perp V$.

Osoitamme seuraavaksi, että $\mathbf{c} \in V$. Teemme vasta oletuksen: $\mathbf{c}_\perp \neq \mathbf{0}$. Silloin valitsemalla riittävän pieni $\beta > 0$ saamme aikaan käyvän ratkaisun $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^* + \beta \mathbf{c}_\perp$ mutta nyt $z^+ = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^+ = \mathbf{c}^\top (\mathbf{x}^* + \beta \mathbf{c}_\perp) = z^* + (\mathbf{c}_V^\top + \mathbf{c}_\perp^\top) \beta \mathbf{c}_\perp = z^* + \beta \|\mathbf{c}_\perp\|^2 > z^*$ mikä on ristiriita.

Koska $k < n$ voidaan löytää vektori $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w} \perp V$. Tarvittaessa vaihtamalla \mathbf{w} vastavektorikseen löytyy kerroin β' siten, että ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \beta \mathbf{w}$ on käypä, kun $\beta \leq \beta'$ ja ei ole käypä, kun $\beta > \beta'$. Pisteessä $\mathbf{x}^{*'} = \mathbf{x}^* + \beta' \mathbf{w}$ tulee ainakin yksi uusi rajoite aktiiviseksi ($\dim(V') > \dim(V)$). Uusi piste on yhtä hyvä kuin \mathbf{x}^* , sillä koska $\mathbf{c} \perp \mathbf{w}$

$$z^{*'} = \mathbf{c}^\top (\mathbf{x}^* + \beta' \mathbf{w}) = z^* + \beta' \mathbf{c}^\top \mathbf{w} = z^*$$

Toistamalla äskeitä menettelyä löydämme lopulta kantaratkaisun, joka on täsmälleen yhtä hyvä kuin \mathbf{x}^* . ///

2.5 Simplex-algoritmi

Simplex-algoritmin idea on lähteä liikkeelle LP-mallin käyvästä kantaratkaisusta. Normaalityapauksessa joka askeleella siirrytään uuteen parempaan kantaratkaisuun ja askelta toistetaan kunnes saavutaan optimiratkaisuun ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$). Algoritmin kuluessa LP-malli esitetään taulukkona tavalla, josta menossa oleva kantaratkaisu voidaan helposti lukea. Siirryttäessä yhdestä kantaratkaisusta toiseen muutetaan LP-mallin taulukkoesitystä tavalla, joka on meille entuudestaan tuttu yhtälöryhmien ratkaisemisesta (Gaussin menetelmä). Seuraavassa kerrataan Gaussin menetelmä.

2.5.1 Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Seuraavassa ratkaistaan yhtälöryhmä toistamalla kahta perusaskelta

1. Yhtälö voidaan kertoa tai jakaa nolasta eroavalla luvulla.
2. Yhtälöön voidaan lisätä luvulla kerrottu toinen yhtälö.

Tavoite, kun perusaskelia suoritetaan, on saada yhtälöryhmä muotoon, jossa jokaisella rivillä on vain yksi muuttuja jäljellä, ja toisaalta jokainen muuttuja löytyy yhdeltä riviltä. Kun tulkitsemme tavoitteen vasemman puolen kerroinkaavion (matriisin) avulla, niin tavoite on siis se, että jokaisessa kerroinkaavion sarakkeessa on tasan yksi ykkönen ja loput kertoimet ovat nollia, ja nämä ykköset ovat eri riveillä.

Tavoitetta kohden edetään muokkaamalla yhtä saraketta kerrallaan. Tavallisesti aloitamme vasemman puoleisesta sarakkeesta, mutta tämä ei ole pakollista (Voi edetä muussakin järjestyksessä.) Työstettävänä olevaa saraketta sanomme *pivot*-sarakkeeksi ja sitä riviä, jolle aiomme järjestää ykkösen sanomme *pivot*-riviksi. Pivot-rivin ja pivot-sarakkeen leikkauskohdassa on *pivot*-alkio. Pivot-alkio saadaan ykköseksi jakamalla pivot-rivi pivot-alkiolla. Loput pivot-sarakkeen alkioit saadaan nolliksi helposti. (Ks. alla oleva esimerkki.)

Esimerkki 2.5.1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [x_1] + 2x_2 - 2x_3 = -1 & | \text{pivot} \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 & | -\text{pivot} \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 & | +\text{pivot} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 & | \\ + [2x_2] + 4x_3 = 16 & | /2 \\ + 3x_2 - 3x_3 = -3 & | \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 & | -2 \cdot pivot \\ [x_2] + 2x_3 = 8 & | pivot \\ 3x_2 - 3x_3 = -3 & | -3 \cdot pivot \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & 6x_3 = -9 & | \\ x_2 + 2x_3 = 8 & | \\ - [9x_3] = -27 & | /(-9) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & 6x_3 = -17 & | +6 \cdot pivot \\ x_2 + 2x_3 = 8 & | -2 \cdot pivot \\ [x_3] = 3 & | pivot \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & & = 1 \\ x_2 & & & = 2 \\ & & x_3 & = 3 \end{cases}$$

Edellisen laskun läpiviennissä on noudatettu muutamaa periaatetta. (1) Ei ole tehty liian montaa asiaa yhdellä kerralla. (2) Ensin on tehty pivot-alkio ykköseksi ja tässä vaiheessa ei ole muutettu muita rivejä. Toisessa vaiheessa on pivot-sarakkeen muut alkion saatu nolliksi lisäämää riviin sopivalla luvulla kerrottu pivot-rivi ja tässä operaatioissa ei pivot-riviä muuteta.

Huomautus: Kun lasketaan kynällä ja paperilla, on usein syytä hieman poiketa edellisestä. On mahdollista muuttaa pivot-alkiot ykkösiksi vasta aivan lopussa. Usein on mahdollista lykätä murtolukukertoimien ilmaantumista suosimalla rivien yhteenlaskua kertomisen sijasta. (Menettelyä on turha tiivistää algoritmiksi. Luento-esimerkki riittää.)

Seuraavassa esimerkissä lähestymme tietokoneen esitystä esittämällä yhä löyrymä kerroinkaaviona. Huomaa, että kerroinmatriisitaulukkomme sisältää kaiken tarvittavan tiedon. Myös rivioperaatiot on nyt toteutettu tietokonemaisen mekaanisesti seuraavasti. Samassa askeleessa ensin kerrotaan tai jaetaan pivot-rivi luvulla niin, että pivot-alkio tulee ykköseksi, sitten muihin riveihin lisätään sopivalla luvulla kerrottuna edellä saatu muuttunut pivot-rivi. Kaavion oikealle puolelle on tehty lisämerkinnät, joiden avulla on jälkepäin mahdollista tulkita tehtyjä ratkaisuja.

Esimerkki 2.5.2 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

x1	x2	x3	RHS	
[2]	-1	1	3	pivot*(1/2)
-1	1	-1	-2	+1*pivot
1	2	-1	2	-1*pivot
1	-1/2	1/2	3/2	+(1/2)*pivot
0	[1/2]	-1/2	-1/2	pivot*2
0	5/2	-3/2	1/2	-(5/2)*pivot
1	0	0	1	
0	1	-1	-1	+1*pivot
0	0	[1]	3	pivot
1	0	0	1	
0	1	0	2	
0	0	1	3	

Askelta, jossa kokonainen sarake saadaan haluttuun muotoon kutsutaan *pivotoinniksi*. Pivotoinnissa saattaa tulla ongelmia, jos kaikki mahdolliset jäljellä olevat pivot-alkiot ovat nollia. Tällöin yhtälöryhmällä joko ei ole ratkaisua tai niitä on ääretön määrä.

Pienen tutkimisen jälkeen huomaa, että edellisen esimerkin jokainen vaihe on erinomaisen mekaaninen. Sen jälkeen, kun pivot-alkio on valittu, ovat tarpeelliset rivioperaatiot helppoja. Koska käytännön ongelmat yleensä johtavat desimaalilukuihin ja tarvittavia laskutoimituksia ei enää kannata laskea päässä, käytetään seuraavassa taulukkolaskinta, jolloin vastaavan laskutoimituksen ”kirjanpito” näyttää seuraavalta.

Esimerkki 2.5.3 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 17x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 33 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 102 \\ -8x_1 + 12x_2 + 56x_3 = 21 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä on ratkaistu EXCEL-ohjelmalla. Pivot-rivi ja sarake on merkitty #-merkillä. Rivioperaatioiden kertoimia ei ole merkitty, sillä ne nähdään joka tapauksessa suoraan pivot-sarakkeelta.

	#				
	17	-6	2	33	#
	5	4	-1	102	
	-8	12	56	21	
		#			
	1	-0.3529	0.11765	1.94118	
	0	5.76471	-1.5882	92.2941	#
	0	9.17647	56.9412	36.5294	
			#		
	1	0	0.02041	7.59184	
	0	1	-0.2755	16.0102	
	0	0	59.4694	-110.39	#
	1	0	0	7.62972	
	0	1	0	15.4988	
	0	0	1	-1.8562	

2.5.2 Yhtälöryhmän kantaratkaisu

Tarkastellaan yhtälöryhmää, jossa on

n muuttujaa ja m yhtälöä

Tapaus $n = m$ Yhtälöryhmä ratkaistaan alkeisrivioperaatioiden avulla. Jos jokin rivioperaatio johtaa riviin, jonka vasen puoli kuihtuu nolaksi ja rivin $RHS \neq 0$, niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Jos jokin rivioperaatio johtaa yhtälöön $0 = 0$, voidaan tämä yhtälö poistaa ryhmästä ja joudutaan tilanteeseen $n > m$. Jos alkeisrivioperaatiot eivät johda edellämäinnittuihin erikoistapauksiin on yhtälöryhmällä yksikäsitteinen ratkaisu.

Tapaus $n > m$ Yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja. Erikoisessa asemassa ovat ns. kantaratkaisut, jotka saadaan seuraavasti.

Valitaan muuttujien joukosta m kappaletta kantamuuttujia (**BV**, *Basic Variables*, joskus myös *Basis Variables*). Kantaan kuulumattomat muuttujat (**NBV**, *Non Basic Variables*) asetetaan noliksi. Nyt yhtälöryhmän **NBV**-muuttujia sisältävät termit saavat arvon nolla, joten yhtälöryhmässä on m yhtälöä ja m vapaata muuttujaa. Saatu yhtälöryhmä voidaan ratkaista ja sen yksikäsitteistä ratkaisua sanotaan valittuun kantaan liittyväksi *kantaratkaisuksi*. Lp-analyysin yhteydessä sanotaan, että kantaratkaisu

on käypä kantaratkaisu (**BFS**, *Basic Feasible Solution*), jos kantamuuttujat saavat ei-negatiiviset arvot.

Koska kanta on m -alkiainen kombinaatio n :n muuttujan perusjoukosta, voidaan kanta valita

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

tavalla.

Esimerkki 2.5.4 Listataan seuraavan yhtälöryhmän kantaratkaisut

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 3 \\ -x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Valinnat	Yhtälöryhmä	Kantaratkaisu
$BV = \{x_2, x_3\}$ $NBV = \{x_1\}$	$0 + x_2 = 3$ $-x_2 + x_3 = -1$	$x_1 = 0$ $x_2 = 3$ $x_3 = 2$ BFS
$BV = \{x_1, x_3\}$ $NBV = \{x_2\}$	$x_1 + 0 = 3$ $-0 + x_3 = -1$	$x_1 = 3$ $x_2 = 0$ $x_3 = -1$ ei käypä
$BV = \{x_1, x_2\}$ $NBV = \{x_3\}$	$x_1 + x_2 = 3$ $-x_2 + 0 = -1$	$x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ BFS

2.5.3 LP-mallin standardimuoto

Lp-mallin käsittely on helpompaa, jos rajoitteet ovat yhtälömuotoisia. Tätä varten malli saatetaan nk. *standardimuotoon*, jossa

- kaikki rajoitteet ovat yhtälöitä
- jokaisen yhtälön RHS on ei-negatiivinen

Epäyhtälön muotoinen rajoite saadaan yhtälön muotoon lisäämällä malliin keinotekoinen *pelivaramuuttuja*.

Esimerkki: rajoitteet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 500 \\ x_1 + x_2 &\geq 100 \end{aligned}$$

muutetaan muotoon

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 500 \\ x_1 + x_2 - e_2 &= 100 \end{aligned}$$

missä s_1 (*slack variable*) kuvaa miten paljon resurssia jäi käyttämättä ja e_2 (*excess variable*) kuvaa miten paljon vähimmäismäärä ylitettiin.

Huomaa: (1) Pelivaramuuttujatkin saavat vain ei-negatiivisia arvoja. (2) Pelivaramuuttujien indeksi kertoo mihin resurssiin pelivara liittyy!

Esimerkki 2.5.5 Leather Limited valmistaa kahdenlaisia nahkavöitä: deluxe-mallia ja regular-mallia. Molempiin vöihin kuluu 1 metri nahkaremmiä per kappale. Regular-mallisen vöyn valmistaminen kestää yhden tunnin, kun taas deluxe vaatii kaksi tuntia. Väiden valmistamiseen on viikossa käytettävissä 40 metriä nahkaremmiä ja 60 työtuntia. Jokaisesta regular-vyöstä saadaan voittoa 3 € ja deluxe-vyöstä 4 €. Maksimoi voitto.

Ratkaisu: Olkoon

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{valmistetut delux-vyöt / vko} \\ x_2 &= \text{valmistetut regular-vyöt / vko} \end{aligned}$$

Lp-malli on

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{ehdoin} \quad x_1 + x_2 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Mallin graafiseen ratkaisemiseen liittyvät rajoitesuorat ja käypä alue on piirretty kuvaan 2.8. Täydennämme mallin pelivaramuuttujilla standardimuotoon.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{ehdoin} \quad x_1 + x_2 + s_1 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 60 \\ x_k, s_k &\geq 0 \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{käyttämättä jäänyt nahkamateriaali (metriä remmiä / vko)} \\ s_2 &= \text{käyttämättä jäänyt työresurssi (työtuntia / vko)} \end{aligned}$$

Rajoiteyhtälöitä on nyt kaksi ($m = 2$) ja muuttujia on neljä ($n = 4$). Ratkaisemme seuraavaksi kaikki

$$\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

kantaratkaisua. Taulukkoon on tällä kertaa lisätty käypien kantaratkaisujen kohdalle tavoitefunktion arvo sekä kirjain, joka viittaa kuvan 2.8 pisteisiin.

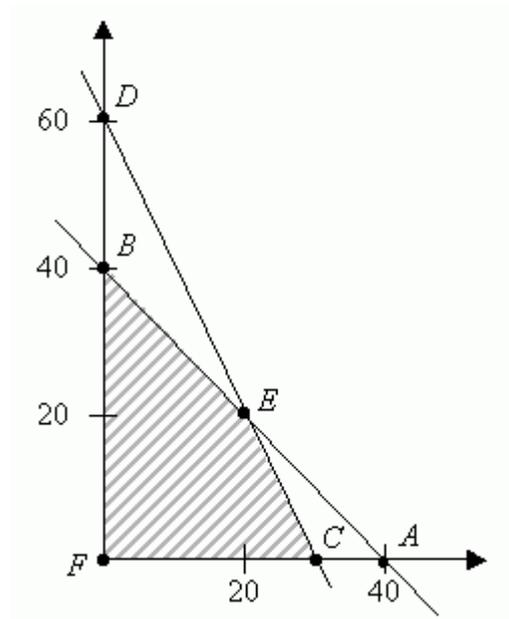


Figure 2.8: Esimerkin 2.5.5 kantaratkaisut.

Kanta	Yhtälöryhmä	x_1	x_2	s_1	s_2		z	piste
$\{s_1, s_2\}$	$0 + 0 + s_1 = 40$ $0 + 0 + \quad + s_2 = 60$	0	0	40	60	BFS	0	F
$\{x_2, s_2\}$	$0 + x_2 + 0 = 40$ $0 + x_2 + \quad + s_2 = 60$	0	40	0	20	BFS	120	B
$\{x_2, s_1\}$	$0 + x_2 + s_1 = 40$ $0 + x_2 + \quad + 0 = 60$	0	60	-20	0	-	-	D
$\{x_1, s_2\}$	$x_1 + 0 + 0 = 40$ $2x_1 + 0 + \quad + s_2 = 60$	40	0	0	-20	-	-	A
$\{x_1, s_1\}$	$x_1 + 0 + s_1 = 40$ $2x_1 + 0 + \quad + 0 = 60$	30	0	10	0	BFS	120	C
$\{x_1, x_2\}$	$x_1 + x_2 + 0 = 40$ $2x_1 + x_2 + \quad + 0 = 60$	20	20	0	0	BFS	140	E

2.5.4 SIMPLEX-algoritmi

Kun vertaamme edellisen esimerkin kantaratkaisujen antamia arvoja muuttujille x_1 ja x_2 graafisen ratkaisun käyvän alueen nurkkapisteisiin, havaitsemme niiden vastaavan toisiaan. Kun muuttujien määrä kasvaa suureksi voidaan kanta valita hyvin monella tavalla, jolloin kaikkien kantaratkaisujen tutkiminen käy työlääksi.

Georg Dantzig kehitti 1940-luvun lopulla LP-mallin ratkaisualgoritmin, joka tun-

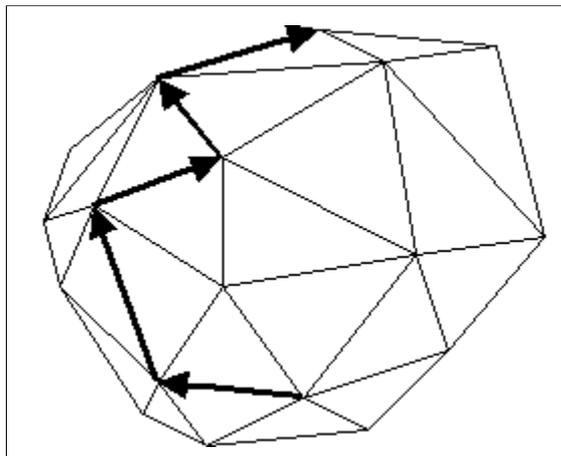


Figure 2.9: Käypä alue, kun muuttujia on paljon.

netaan SIMPLEX-menetelmän nimellä.

SIMPLEX-menetelmä on tehokas, koska se ei tutki kaikkia kantaratkaisuja. Simplex algoritmin periaate voidaan lyhyesti kuvata seuraavasti

1. Valitaan jokin BFS (käypä kantaratkaisu)
2. Selvitetään, onko kyseinen BFS optimiratkaisu
3. Jos se ei ole optimiratkaisu, niin siirrytään sellaiseen viereiseen BFS:ään, johon siirtyminen parantaa eniten tavoitefunktion arvoa. Palataan kohtaan 2.

Siirtyminen viereiseen käypään kantaratkaisuun tapahtuu tuomalla uusi muuttuja kantaan ja poistamalla yksi vanha kantamuuttuja pois kannasta.

Seuraavassa esittelemme simplex-algoritmin yksinkertaisen esimerkin avulla. Esimerkissämme ensimmäinen ns. kanoonisessa muodossa oleva taulu löytyy helposti. Tämä ei aina ole yhtä helppoa ja myöhemmin pohdimme asiaa uudelleen.

Esimerkki 2.5.6 Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rcll}
 \max z = & 60x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & & \\
 \text{ehdoin} & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 48 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 8 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 5 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
 \end{array}$$

1) Muutetaan malli standardimuotoon siten, että tavoitefunktion määrittelevä yhtälö on mukana:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 z & - & 60x_1 & - & 30x_2 & - & 20x_3 & & & & = & 0 \\
 & & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & = & 48 \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & & + & s_2 & = & 20 \\
 & & 2x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & & & + & s_3 & = & 8 \\
 & & & & x_2 & & & & & & + & s_4 & = & 5
 \end{array}$$

Yhtälöryhmän jokaisessa yhtälössä on muuttuja, jonka kerroin on 1 ja joka ei esiinny muissa yhtälöissä (z, s_1, s_2, s_3, s_4). Tällaista muotoa sanotaan *kanooniseksi*. Valitaan mainitut muuttujat kantamuuttujiksi ja laaditaan seuraava taulu.

rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS
0	1	-60	-30	-20	0	0	0	0	z =	0
1	0	8	6	1	1	0	0	0	s1=	48
2	0	4	2	1,5	0	1	0	0	s2=	20
3	0	2	1,5	0,5	0	0	1	0	s3=	8
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5

Taulun kahdesta oikeanpuoleisimmasta sarakkeesta voidaan välittömästi lukea kantaan $\mathbf{BV} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ liittyvä kantaratkaisu. Ensimmäinen taulu kuvaa siis käypää kantaratkaisua. Tällainen tulo löytyi nyt koska LP-mallin rajoitteet ovat tyyppiä " \leq " ja RHS on ei-negatiivinen.

2) Onko esitetty käypä ratkaisu optimiratkaisu?

Ratkaisu ei ole optimiratkaisu, sillä 0-rivillä on NBV-muuttujan x_1 kerroin negatiivinen. Tämä päättely saa perustelunsa kohdassa 4)

3) Valitaan kantaan tuotava muuttuja:

Valitaan kantaan tuotavaksi muuttujaksi x_1 , koska sen kerroin 0-rivillä on pienin.

4) Valitaan kannasta poistuva muuttuja:

Poikkeuksellisesti näemme nyt hieman ylimääräistä vaivaa ja kirjoitamme uudelleen taulun mukaiset yhtälöt. jätämme kuitenkin kirjoittamatta ne termit, jotka tiedämme nolliksi (kerroin on nolla tai muuttujan arvo on nolla).

$$\begin{array}{rcc}
 \hline
 z & -60x_1 & = & 0 \\
 & 8x_1 & +s_1 & = & 48 \\
 & 4x_1 & +s_2 & = & 20 \\
 & 2x_1 & +s_3 & = & 8 \\
 & 0x_1 & +s_4 & = & 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

Yhtälöistä näemme heti, että muuttujan x_1 arvoa voi ja kannattaa kasvattaa. Jos arvoa kasvattaa liikaa, menee jonkin vanhan kantamuuttujan arvo negatiiviseksi, mitä emme voi sallia. Jokainen riveistä 1-4 antaa oman ehtonsa x_1 :n kasvuväralle.

yhtälö		kasvuvara
$8x_1 + s_1 = 48$		$48/8 = 6$
$4x_1 + s_2 = 20$		$20/4 = 5$
$2x_1 + s_3 = 8$		$8/2 = 4 \leftarrow ***$
$0x_1 + s_4 = 5$		$5/0 = \text{ääretön}$

Siis muuttujan x_1 arvoa voidaan kasvattaa arvoon $x_1 = 4$, jolloin s_3 saa arvon $s_3 = 0$. Tämä merkitsee, että

x_1 tulee kantaan ja s_3 poistuu kannasta.

5) Vaihdetaan kanta:

Tehdään uusi kanooninen taulu, jossa kantana on $\mathbf{BV} = \{s_1, s_2, x_1, s_4\}$. Tähän päästään, kun alkeisrivioperaatioilla järjestetään x_1 -sarakkeen riville 3 kertoimeksi ykkönen ja saman sarakkeen muille riveille kertoimiksi nollat. Uusi SIMPLEX-taulu on

rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS
0	1	0	15	-5	0	0	30	0	z =	240
1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	s1=	16
2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	s2=	4
3	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	x1=	4
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5

2) Onko optimiratkaisu? Ei ole optimi, sillä x_3 :n kerroin 0-rivillä on -5 .

3) Tuodaan x_3 kantaan. Sillä on 0-rivillä itseisarvoltaan suurin negatiivinen kerroin.

4) Valitaan kannasta poistuva muuttuja. Lasketaan riveille 1-4 suhde RHS/(x_3 :n kerroin). Kun suhteet merkitään taulukon oikeaan reunaan, näyttää taulukko seuraavalta

*											
rivi	z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	BV	RHS	
0	1	0	15	-5	0	0	30	0	z =	240	
1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	s1=	16	$16/(-1) = --$
2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	s2=	4	$4/0.5 = 8 *$
3	0	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	x1=	4	$4/0.25 = 16$
4	0	0	1	0	0	0	0	1	s4=	5	$5/0 = --$

Koska $RHS > 0$ ja jokainen rajoite sai slack-muuttujan, saamme kanoonisessa muodossa olevan 1. simplex taulun vaivatta.

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-3	-2	0	0	0	z =	0
1	0	2	1	1	0	0	s1=	100
2	0	1	1	0	1	0	s2=	80
3	0	1	0	0	0	1	s3=	40

#

$100/2 = 50$
 $80/1 = 80$
 $40/1 = 40$

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	-2	0	0	3	z =	120
1	0	0	1	1	0	-2	s1=	20
2	0	0	1	0	1	-1	s2=	40
3	0	1	0	0	0	1	x1=	40

#

$20/1 = 20$
 $40/1 = 40$
 $40/0 = --$

#								
rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	2	0	-1	z =	160
1	0	0	1	1	0	-2	x2=	20
2	0	0	0	-1	1	1	s2=	20
3	0	1	0	0	0	1	x1=	40

#

$20/(-2) = --$
 $20/1 = 20$
 $40/1 = 40$

rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1	1	0	z =	180
1	0	0	1	-1	2	0	x2=	60
2	0	0	0	-1	1	1	s3=	20
3	0	1	0	1	-1	0	x1=	20

←

OPTIMI

Ratkaisuksi saamme, että puusotilaita valmistetaan 20 kappaletta viikossa ($x_1 = 20$) ja puujunia valmistetaan 60 kappaletta viikossa ($x_2 = 60$). Puutyöresurssi ja viimeistelytyöresurssi käytetään kokonaan ($s_1 = 0, s_2 = 0$). Markkinarajoite ei ole aktiivinen ($s_3 = 20$).

2.6 Simplex-algoritmin erikoistapauksia

2.6.1 Minimointitehtävä

Edellä kuvatusta maksimointialgoritmista on helppo muuntaa minimointialgoritmi. Minimointialgoritmi on niin lähellä maksimointialgoritmia, että tekniikat helposti sekaantuvat. Jos ei päivittäin sovelta näitä tekniikoita, niin onkin viisainta ajatella seuraavasti:

Jos haluan minimoida tavoitefunktiota z , niin maksimoinkin tavoitefunktiota $-z$.

Esimerkki 2.6.1 Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rcl} \min z & = & -4x_1 + x_2 \\ \text{ehdoin} & & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & & x_2 \leq 5 \\ & & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & & x_i \geq 0 \end{array}$$

Muutetaan malli maksimointimalliksi ja lisätään pelivaramuuttujat.

$$\begin{array}{rcl} \max -z & = & + 4x_1 - x_2 \\ \text{ehdoin} & & 2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \\ & & x_2 + s_2 = 5 \\ & & x_1 - x_2 + s_3 = 4 \\ & & x_i, s_i \geq 0 \end{array}$$

Koska $RHS > 0$ ja jokainen rajoiteyhtälö sisältää slack muuttujan, saamme kanoonisessa muodossa olevan 1. simplex taulun suoraan.

#								
rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-4	1	0	0	0	z =	0
1	0	2	1	1	0	0	s1=	8
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5
3	0	1	-1	0	0	1	s3=	4

$8/2 = 4$
 $5/0 = -$
 $4/1 = 4$

Suhdetesti antaa sekä s_1 :lle että s_3 :lle arvon 4, joten kumpikin on yhtä suurella syyllä kannasta poistuva muuttuja. Valitsemme kannasta poistuvaksi muuttujaksi s_1 :n, emmekä pohdi valintaa enempää. Niin kauan kun tavoitefunktion arvo kasvaa joka askeleella, olemme etenemässä kohden optimia.

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	3	2	0	0	z =	16
1	0	1	0,5	0,5	0	0	x1=	4
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5
3	0	0	-1,5	-0,5	0	1	s3=	0

<-- OPTIMI

Siis optimiratkaisu on $x_1 = 4$, ja $x_2 = 0$. Toista resurssia jää viisi yksikköä käyttämättä, mutta ensimmäinen ja kolmas resurssi kulutetaan kokonaan. Kokeilemme vielä miten algoritmi etenee, jos edellä tehty poistuvan muuttujan valinta tehdäänkin toisin.

#

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-4	1	0	0	0	-z=	0
1	0	2	1	1	0	0	s1=	8
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5
3	0	1	-1	0	0	1	s3=	4

8/2 = 4
5/0 = -
4/1 = 4

#

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	-3	0	0	4	z =	16
1	0	0	3	1	0	-2	s1=	0
2	0	0	1	0	1	0	s2=	5
3	0	1	-1	0	0	1	x1=	4

0/3 = 0
5/1 = 5
4/(-1) = -

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1	0	2	z =	16
1	0	0	1	0,3333	0	-0,666	x2=	0
2	0	0	0	-0,333	1	0,6666	s2=	5
3	0	1	0	0,3333	0	0,3333	x1=	4

<-- OPTIMI

Vaikka ensimmäisen optimitaulun kanta $\mathbf{BV} = \{x_1, s_2, s_3\}$ eroaa toisen optimitaulun kannasta $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_2\}$, niin kumpikin optimitaulu antaa täsmälleen saman \mathbb{R}^5 :n käyvän pisteen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Useita optimeja

Tutkiaksemme, miten simplex-algoritmi toimii usean optimiratkaisun tilanteessa, ratkaisemme esimerkin ?? uudelleen.

LP-mallin

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -6x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

standardimuoto on

$$\begin{aligned} \max \quad & -z \\ \text{ehdoin} \quad & -z - 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ & 2x_1 + 4x_2 + s_1 = 9 \\ & 3x_1 + x_2 + s_2 = 6 \\ & x_i, s_i \geq 0 \end{aligned}$$

Simplex-ratkaisun mukaiset taulut ovat

#							
rivi	-z	x1	x2	s1	s2	BV	RHS
0	1	-6	-2	0	0	-z	0
1	0	2	4	1	0	s1=	9
2	0	3	1	0	1	s2=	6

$9/2 = 4.5$
$6/3 = 2$

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	BV	RHS
0	1	0	0	0	2	-z	12
1	0	0	3,3333	1	-0,666	s1=	5
2	0	1	0,3333	0	0,3333	x1=	2

<-- OPTIMI

Saimme siis optimiratkaisun. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa optimiratkaisu, sillä kantaan kuulumattoman muuttujan x_2 kerroin toisen taulun 0-rivillä on 0. Tämä merkitsee sitä, että x_2 :n tuominen kantaan ei paranne mutta ei huonnakaan tavoitefunktion arvoa. Saamme siis toisen optimiratkaisun, kun tuomme x_2 :n kantaan.

rivi	-z	x1	x2	s1	s2	BV	RHS
0	1	0	0	0	2	-z	12
1	0	0	1	0,3	-0,2	x2=	1,5
2	0	1	0	-0,1	0,4	x1=	1,5

<-- OPTIMI

Ainoa kantaan kuulumaton muuttuja, joka nyt voidaan tuoda kantaan on s_1 , ja sen tuominen kantaan johtaa ensin saatuun optimiin. Optimaalisia kantaratkaisuja on siis

kaksi. Näitä kahta käyvän alueen optimaalista nurkkapistettä

$$\mathbf{x}^P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}^Q = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

yhdistävän janan kaikki pisteet ovat myös optimaalisia. Optimiratkaisuvektorit muodostavat siis joukon

$$(2.1) \quad \begin{aligned} [P, Q] &= \{ \lambda \mathbf{x}^P + (1 - \lambda) \mathbf{x}^Q \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda + 1.5(1 - \lambda) \\ 0 + 1.5(1 - \lambda) \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

$$(2.3) \quad = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 + 0.5\lambda \\ 1.5 - 1.5\lambda \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

$$(2.3) \quad = \{ \mathbf{x} \mid x_2 = 6 - 3x_1, 1.5 \leq x_1 \leq 2 \}$$

Kumpikin esityksistä (2.1) ja (2.3) ovat hyviä, ja valinta niiden väliltä on makuasia.

Esitys (2.3) saadaan seuraavasti

Suoran yhtälö: Eliminoidaan yhteenlaskukeinolla λ yhtälöparista

$$\begin{array}{r|l} 1.5 + 0.5\lambda = x_1 & \cdot 3 \\ 1.5 - 1.5\lambda = x_2 & \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{r|l} 4.5 + 1.5\lambda = 3x_1 & \\ + 1.5 - 1.5\lambda = x_2 & \\ \hline 6 & = 3x_1 + x_2 \end{array}$$

Rajat x_1 :lle:

$$\begin{aligned} 1.5 + 0.5\lambda &= x_1 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 3 + \lambda &= 2x_1 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 2x_1 - 3 & \Rightarrow \quad 0 \leq 2x_1 - 3 \leq 1 \\ & & \Leftrightarrow 3 \leq 2x_1 \leq 4 \\ & & \Leftrightarrow 1.5 \leq x_1 \leq 2 \end{aligned}$$

Jos optimaalisia kantaratkaisuja on useampia kuin kaksi, niin optimaaliset ratkaisut saadaan (lähes poikkeuksetta) painotettuna keskiarvona optimaalisista kantaratkaisuisista siten, että painojen summa on 1 ja kaikki painot ovat väliltä $[0, 1]$.

Optimiratkaisujen joukon täsmällinen ilmaiseminen on hankalaa ilman vektoreita tai monen muuttujan yhtälöitä. Asiaa ei kuitenkaan sovi sivuuttaa. Jos ongelmaan on monta ratkaisua, pitää analyytikon tietenkin kertoa se päättäjille. Päättäjien kyvystä ymmärtää matemaattista muotoilua riippuu miten asia voidaan esittää.

Eräs tapa hahmottaa asiaa on seuraava:

- Katso mitkä muuttujat eivät kuulu minkään optimaalisen kantaratkaisun kantaan. Missä tahansa optimiratkaisussa tällaisen muuttujan tulee saada arvo 0.
- Jos kyseinen muuttuja on x_j , sanomme päättäjille, että ”tuotetta j ei tule valmistaa” (tms.)
- Jos kyseinen muuttuja on s_j , sanomme päättäjille, että ” j :s resurssi tulee kuluttaa kokonaan” (tms.)

Edellä olevia lainausmerkein varustettuja ilmaisuja ei tule ottaa liian kaavamaisesti. Ne ovat esimerkkejä ilmaisuista, jotka päättäjää yleensä ymmärtää.

Lasketaan vielä lpi esimerkki, jossa viiden muuttujan LP-mallilla on kolme optimaalista kantaratkaisua.

Esimerkki 2.6.2 Olemme maksimoimassa lineaarista funktiota $f(x_1, x_2, x_3)$. Olkoon standardimuotoisen mallin muuttujat x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 ja optimaaliset kantaratkaisut

$$\mathbf{x}^A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}^C = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Miten tulos raportoidaan esimiehelle?

Ratkaisu \mathbf{x} on optimaalinen, jos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_1 & = 3 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 + x_2 & = 6 \\ -7\lambda_1 - 8\lambda_2 + x_3 & = 0 \\ & +s_1 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + s_2 & = 4 \end{cases}$$

”ratkaistaan pivotoimalla” λ :t, x_3 ja s ;t

$$\left\{ \begin{array}{l} \# \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_1 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 + x_2 \\ -7\lambda_1 - 8\lambda_2 + x_3 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + s_1 \\ + s_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 3 \# \\ = 6 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \# \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_1 \\ + 4\lambda_2 - x_1 + x_2 \\ + 6\lambda_2 + 7x_1 + x_3 \\ - 4\lambda_2 - 4x_1 + s_1 \\ + s_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 3 \\ = 3 \# \\ = 21 \\ = 0 \\ = -8 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 1.5x_1 - 0.5x_2 \\ \lambda_2 - 0.25x_1 + 0.25x_2 \\ + 8.5x_1 - 1.5x_2 + x_3 \\ - 5x_1 + x_2 + s_1 \\ + s_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 1.5 \\ = 0.75 \\ = 16.5 \\ = 0 \\ = -5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1.5x_1 + 0.5x_2 + 1.5 \\ \lambda_2 = 0.25x_1 - 0.25x_2 + 0.75 \\ x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 5x_1 - x_2 - 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq -1.5x_1 + 0.5x_2 + 1.5 \leq 1 \\ 0 \leq 0.25x_1 - 0.25x_2 + 0.75 \leq 1 \\ x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 5x_1 - x_2 - 5 \end{array} \right.$$

Siis $s_1 = 0$ joten ensimmäinen resurssi käytetään kokonaan. Päätösmuuttujia x_1 ja x_2 sitoo seuraavat ehdot (huomaa ehdot $x_3 \geq 0$ ja $s_2 \geq 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.5x_1 - 0.5x_2 \leq 1.5 \\ -1.5x_1 + 0.5x_2 \leq 0.5 \\ -0.25x_1 + 0.25x_2 \leq 0.75 \\ 0.25x_1 - 0.25x_2 \leq 0.25 \\ 8.5x_1 - 1.5x_2 \leq 16.5 \\ 5x_1 - x_2 \geq 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \leq 3 \\ -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 17x_1 - 3x_2 \leq 33 \\ 5x_1 - x_2 \geq 5 \end{array} \right.$$

Tutkimalla graafisesti epäyhtälöryhmän ratkaisuja nähdään, että kaikki epäyhtälöt toteutuvat, jos 1. 3. ja 6. epäyhtälö ovat tosia ja että käyvät $(x_1, x_2)^\top$ -pisteet muodostavat monikulmion, jonka kärkinä ovat pisteet $(1, 0)^\top$, $(2, 5)^\top$ ja $(3, 6)^\top$. Kärkipisteissä

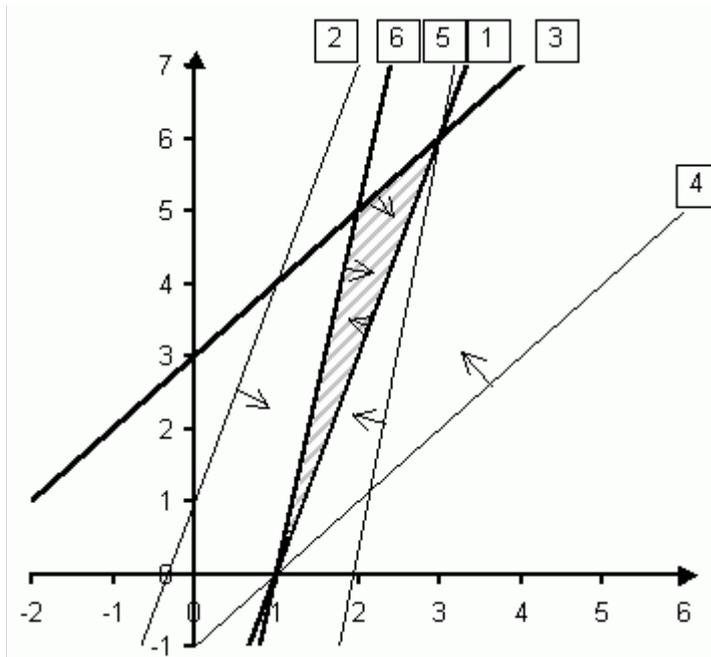


Figure 2.1: Epäyhtälöryhmän graafinen ratkaisu.

muut muuttujat saavat arvoja seuraavasti ($x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5$, $s_1 = 0$ ja $s_2 = 5x_1 - x_2 - 5$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vrt. } \mathbf{x}^B \text{ edellä!})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vrt. } \mathbf{x}^A \text{ edellä!})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\text{vrt. } \mathbf{x}^C \text{ edellä!})$$

Nyt voimme antaa esimiehelle raportin:

(1.) Optimissa $s_1 = 0$, joten ensimmäinen resurssi käytetään kokonaan.

(2.) Optimissa x_1 ja x_2 on valittava siten, että

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 5x_1 - x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

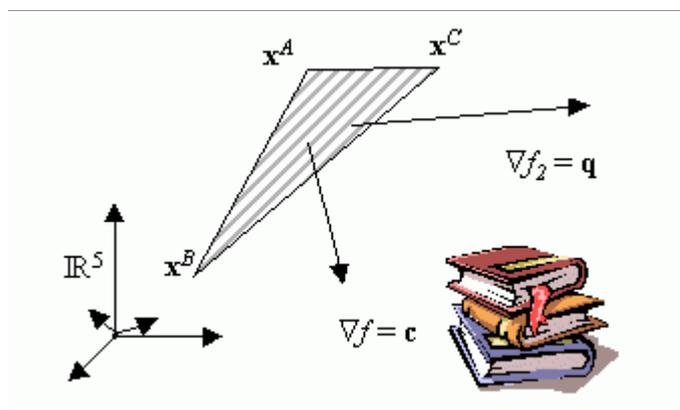


Figure 2.2: Analytikon sielunmaisema.

(3.) Optimipisteessä loput muuttujat saadaan laskettua kaavoista

$$x_3 = -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5 \quad \text{ja} \quad s_2 = 5x_1 - x_2 - 5$$

Tähän esimies vastaa: ” Jahah, vai on siis monta vaihtoehtoa. Sitten minä haluan, että näistä vaihtoehtoista valitaan se, joka maksimoi lausekkeen $f_2(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}$. Ilmoita tulos mahdollisimman pian! ”

Analytikon ajatukset: On siis ratkaistava LP-malli

$$\begin{array}{ll} \max & z = f_3(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2, -8.5x_1 + 1.5x_2 + 16.5) \\ \text{ehdolla} & \mathbf{x} \in K = [A, B, C] \subset \mathbb{R}^5 \end{array}$$

missä K on alkuperäisen LP-mallin optimipisteiden joukko. Mutta K on monikulmio ja lineaarinen funktio saa monikulmiossa suurimman arvonsa jossakin monikulmion kärkipisteessä. Siis analytikko laskee arvot

$$(2.4) \quad f_3(2, 5) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}^A, f_3(1, 0) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}^B \quad \text{ja} \quad f_3(3, 6) = \mathbf{q}^\top \mathbf{x}^C$$

ja ilmoittaa esimiehelleen parhaan pisteistä \mathbf{x}^A , \mathbf{x}^B , \mathbf{x}^C . (Huomaa, että esimiehen antaman lisätehtävän tavoitefunktio f_2 oli nyt lineaarinen. Jos f_2 ei olisi lineaarinen, lisätehtävä vaatisi NP-mallin 2.4 asianmukaisen ratkaisun.

2.6.3 Rajoittamaton optimi

Tutkiaksemme, miten simplex-algoritmi toimii rajoittamattoman optimin tapauksessa, ratkaisemme esimerkin ?? uudelleen. LP-malli on

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Teemme ensin LP-mallista standardi-muotoisen pelivaramuuttujilla ja sitten kanoonisen muodon yhdellä rivioperaatiolla

$$\begin{aligned} \max z, \quad & z - x_1 - x_2 = 0 \\ \text{ehdoin} \quad & x_1 - x_2 - e_1 = 1 \quad \# \\ & x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1, x_2, e_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z, \quad & z - 2x_2 - e_1 = 1 \\ \text{ehdoin} \quad & x_1 - x_2 - e_1 = 1 \\ & x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1, x_2, e_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

#

rivi	-z	x1	x2	e1	s2	BV	RHS
0	1	0	-2	-1	0	z =	1
1	0	1	-1	-1	0	x1=	1
2	0	0	1	0	1	s2=	2

1/(-1) = -1

2/1 = 2

#

rivi	-z	x1	x2	e1	s2	BV	RHS
0	1	0	0	-1	2	z =	5
1	0	1	0	-1	1	x1=	3
2	0	0	1	0	1	x2=	2

rajoittamaton optimi

3/(-1) = --

2/0 = --

Kun suhdetesti ei anna mitään kannasta poistuvaa muuttujaa, päättelemme kohdanneemme rajoittamattoman optimin.

Asian voi havainnollistaa itselleen kirjoittamalla viimeisen taulun mukaiset yhtälöt siten, että nollatermit jätetään pois.

$$\begin{cases} z - e_1 = 5 \\ x_1 - e_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 + e_1 \\ x_1 = 3 + e_1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Siis excess-muuttujaa e_1 voi kasvattaa rajatta ja samalla kasvavat z ja x_1 eikä x_2 muutu. Koska tavoitefunktion arvo saadaan miten suureksi tahansa, ongelmalla ei ole optimiratkaisua.

2.6.4 Big M mentelmä

Joskus on vaikeuksia muodostaa kanooninen muoto ($RHS > 0$, jokaisella kantamuuttujalla on yhden rivin kerroin 1 ja muiden rivien kertoimet 0 siten, että mainitut ykköset ovat eri riveillä).

Periaatteessa voimme aina järjestää raa'alla voimalla ykkösiä ja nollija haluamiimme kohtiin kerrointauluun, mutta RHS ei välttämättä pysy ei-negatiivisena. Silloin voimme menettellä seuraavasti.

Big M menetelmän vaiheet.

1. Muuta lp-mallin rajoitteiden RHS:t ei-negatiivisiksi. Jos rajoitteen oikea puoli on negatiivinen, vaihdetaan rajoitteen kaikkien termien merkit (kerrotaan -1 :llä).
2. Muuta yhtälöt standardimuotoon lisäämällä pelivaramuuttujat ($s = \text{slack}$, $e = \text{excess}$).
3. Jokaiselle rajoiteriville j (ei 0-riville), jolla ei ole slack-muuttujaa lisätään keinomuuttuja a_j (artificial variable). Keinomuuttuja lisätään siis, kun 1. vaiheen jälkeinen rajoite on tyyppiä " $>$ " tai " $=$ ".
4. Merkitään kirjaimella M hyvin suurta lukua. Jos olemme maksimoimassa (minimoimassa) tavoitefunktiota, lisätään tavoitefunktioon jokaista keinomuuttujaa a_j kohden termi $-Ma_j$ ($+Ma_j$). Tällainen termi on tavoitefunktion arvoa heikentävä, joten keinomuuttujat tulevat nopesti poistumaan kannasta.
5. Järjestetään nollat 0-rivin keinomuuttujasarakkeisiin. Tämä on välttämätöntä, jotta saisimme aikaan kanoonisen muodon, mutta myös hyvin suoraviivaista eikä se muuta RHS:n arvoja. Saamme näin kanoonisen ratkaisun.

6. Ratkaise saatu kanooninen muoto simplex-algoritmilla. Jos kaikki keinomuuttujat saavat optimiratkaisussa arvon 0, olemme löytäneet alkuperäisen LP-mallin optimiratkaisun. Jos jokin keinomuuttuja saa optimiratkaisussa positiivisen arvon, on alkuperäisen lp-mallin rajoitteet ritiriitaiset.

Esimerkki 2.6.3 Bevco valmistaa 'Oranj'-nimistä appelsiinijuomaa sekoittamalla kahta raaka-ainetta, appelsiinilimonaadia ja mehutiivistettä. Jokainen unssi (oz) limonaadia sisältää 0.5 oz sokeria ja 1 mg C-vitamiinia. Jokainen unssi mehutiivistettä sisältää 0.25 oz sokeria ja 3 mg C-vitamiinia. Bevcolle maksaa 2 ¢/oz valmistaa limonaadia ja 3 ¢/oz valmistaa mehutiivistettä. Bevcon markkinointiosasto vaatii, että jokaisen juomapullon (10 oz) tulee sisältää vähintään 20 mg C-vitamiinia ja korkeintaan 4 oz sokeria. Tutki, miten markkinointiosaston vaatimukset täytetään mahdollisimman pienin kustannuksin.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{muuttujat: } x_1 &= \text{limonaadin määrä Oranj-pullossa} \\ x_2 &= \text{mehutiivisteiden määrä Oranj-pullossa} \end{aligned}$$

LP-malli on nyt

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{ehdoin } 0.5x_1 + 0.25x_2 &\leq 4 \quad \text{sokeri rajoite} \\ x_1 + 3x_2 &\geq 20 \quad \text{vitamiinirajoite} \\ x_1 + x_2 &= 10 \quad \text{pullon sisältö} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pelivara- ja keinomuuttujilla täydennetty standardimalli on

$$\begin{aligned} \text{Max } -z, \quad -z + 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3 &= 0 \\ \text{ehdoin } 0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + a_3 &= 10 \\ x_1, x_2, s_1, e_2, a_2, a_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vähentämällä 2. ja 3. rajoiterivi M :llä kerrottuna 0-rivistä, saadaan käypä kanooninen simplex-taulu

										#
rivi	-z	x1	x2	s1	e2	a1	a2	BV	RHS	
0	1	-2M+2	-4M+3	0	0	0	0	-z=	-30M	
1	0	1/2	1/4	1	0	0	0	s1=	4	16
2	0	1	3	0	-1	1	0	a1=	20	# 6,6667
3	0	1	1	0	0	0	1	a2=	10	10

#									
rivi	-z	x1	x2	s1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	$-2M/3+1$	0	0	$-M/3+1$	$4M/3-1$	0	-z=	$-20-10M/3$
1	0	$5/12$	0	1	$1/12$	$-1/12$	0	s1=	$7/3$
2	0	$1/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	x2=	$20/3$
3	0	$2/3$	0	0	$1/3$	$-1/3$	1	a2=	$10/3$

5.6

20

5

rivi	-z	x1	x2	s1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	0	0	0	0,5	$M-0,5$	$4M/3-2$	-z=	-25
1	0	0	0	1	$-1/8$	$1/8$	$-5/6$	s1=	$1/4$
2	0	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	$-2/3$	x2=	5
3	0	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	2	x1=	5

<-- OPTIMI

Koska keinomuuttujat saavat optimissa arvon 0, löysimme alkuperäisen tehtävän optimiratkaisun. Kumpaakin raaka-ainetta pitää käyttää 5 oz /pullo, jolloin juomapullon valmistaminen maksaa 25 €. Koska $s_1 = 1/4$ alitetaan sokerirajoite $1/4$ unssilla. Koska e_2 ei ole kannassa, sen arvo on 0 ja C-vitamiinia on siis juomapullossa täsmälleen vaadittu määrä.

Esimerkki 2.6.4 Dorian Auto valmistaa urheiluautoja ja kuorma-autoja. Yhtiön johto uskoo, että yrityksen potentiaalisimpia asiakkaita ovat varakkaat miehet ja naiset. Saavuttaakseen mainitut kohderyhmät Dorian Auto suunnittelee laajaa TV-mainos-kampanjaa. Yhtiö on päättänyt ostaa minuutin mittaisia mainoksia kahta eri tyyppiä oleviin TV-ohjelmiin: perhesarjoihin ja jalkapallo-otteluihin.

Katsojatutkimusten perusteella yhtiö tietää, että perhesarjan keskelle sijoitetun mainoksen näkee keskimäärin 7 miljoonaa varakasta naista ja 2 miljoonaa varakasta miestä. Jalkapallo-ottelun keskelle sijoitetun mainoksen näkee puolestaan keskimäärin 2 miljoonaa varakasta naista ja 12 miljoonaa varakasta miestä.

Minuutin mittainen mainos keskellä perhesarjaa maksaa keskimäärin 50 000 €, kun taas jalkapallo-ottelun keskelle sijoitettu mainos maksaa keskimäärin 100 000 €.

Dorian Auto haluaa, että mainoksen näkee ainakin 28 miljoonaa varakasta naista ja 24 miljoonaa varakasta miestä. Miten yhtiö kykenee saavuttamaan tavoitteensa minimikustannuksin?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{perhesarjoihin sijoitettavien mainosten lukumäärä} \\ x_2 &= \text{jalkapallo-otteluihin sijoitettavien mainosten lukumäärä} \end{aligned}$$

LP-malli:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 5x_1 + 10x_2 && \text{kampanjan hinta (10,000 €)} \\ \text{ehdoin } 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 && \text{naisten määrä (milj.)} \\ &2x_1 + 12x_2 \geq 24 && \text{miesten määrä (milj.)} \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pelivara- ja keinomuuttujilla täydennetty standardimuoto:

$$\begin{aligned} (\text{Max } -z) \quad -z + 5x_1 + 10x_2 &+ Ma_1 &+ Ma_2 &= 0 \\ \text{ehdoin } &7x_1 + 2x_2 - e_1 + a_1 &&= 28 \\ &2x_1 + 12x_2 &- e_2 + a_2 &= 24 \\ &&&&x_i, e_i, a_i \geq 0 \end{aligned}$$

Kanooninen standardimuoto saadaan vähentämällä rajoitteet M :llä kerrottuina 0-rivistä:

$$\begin{aligned} \text{Max } -z & \\ -z + (-9M + 5)x_1 + (-14M + 10)x_2 + Me_1 &+ Me_2 &= -52M \\ \text{st } &7x_1 + 2x_2 - e_1 + a_1 &= 28 \\ &2x_1 + 12x_2 - e_2 + a_2 &= 24 \\ &&&x_i, e_i, a_i \geq 0 \end{aligned}$$

Ensimmäinen Simplex-taulu on nyt

#									
rivi	-z	x1	x2	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	-9M+5	-14M+10	M	M	0	0	-z =	-52M
1	0	7	2	-1	0	1	0	a1=	28
2	0	2	12	0	-1	0	1	a2=	24

2

 x_2 tulee kantaan ja a_2 poistuu kannasta.

#									
rivi	-z	x1	x2	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	3,3333	0	M	0,8333	0	-0,8333	-z =	-20
		-6,667M			-0,1667M		+1,1667M		-24M
1	0	6,6667	0	-1	0,1667	1	-0,167	a1=	24
2	0	0,1667	1	0	-0,083	0	0,0833	x2=	2

3.6
12

 x_1 tulee kantaan ja a_1 poistuu kannasta.

rivi	-z	x1	x2	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	0	0	0,5	0,75	-0,5	-0,75	-z =	-32
						+M	+M		
1	0	1	0	-0,15	0,025	0,15	-0,025	x1=	3,6
2	0	0	1	0,025	-0,0875	-0,025	0,0875	x2=	1,4

<-- OPTIMI

Saamme siis optimaalisen ratkaisun, jonka mukaan Dorian Auton tulee sijoittaa 3.6 kappaletta mainoksia perhesarjoihin ja 1.4 kappaletta mainoksia jalkapallo-otteluihin. Näin kampanjan hinnaksi tulee 320 000 € . On kyseenalaista kelpaako tämä vastaus johtoryhmälle. Päätösmuuttujien arvot ovat desimaalilukuja, mikä ei nyt oikein tunnu luonteelta. Myöhemmin haemme Dorian Auton ongelmaan ratkaisun, jonka muuttujan arvot ovat kokonaislukuja.

SIMPLEX-muistilista:

1. Jos ongelma on tyyppiä ”Min z ”, niin muuta se muotoon ”Max $-z$ ”. (ks. esimerkki 2.4.)
2. Jos jonkin rajoitteen *RHS* on negatiivinen, muuta se positiiviseksi kertomalla koko rajoite(-epä)yhtälö -1 :llä. (Huomaa, että jokainen kyseisen rivin kerroin vaihtaa merkkiä ja erisuuruusmerkki kääntyy.)
3. Tee LP-mallista standardimuoto, eli muuta epäyhtälöt yhtälöiksi lisäämällä malliin pelivaramuuttujat.

$$\dots \leq b_j \rightarrow \dots + s_j \dots = b_j$$

ja

$$\dots \geq b_j \rightarrow \dots - e_j \dots = b_j$$

4. Tee LP-mallista kanooninen muoto.
 - (4.1) Jos j :nnessä rajoitteessa ei ole slack-muuttujaa s_j , niin lisää siihen keinomuuttuja a_j ja lisää tavoitefunktion lausekkeeseen termi $-Ma_j$.
 - (4.2) Poista keinomuuttujat 0-riviltä.
5. Tee kanoonisen muodon mukainen Simplex-taulu. Taulun kanta sisältää slackit ja keinomuuttujat ja taulu on käypä.
6. Suorita SIMPLEX-algoritmi
 - (6.1) **Valitse kantaan tuleva muuttuja** (pienin negatiivinen kerroin 0-rivillä).

Jos 0-rivillä ei ole negatiivisia kertoimia, niin

(6.1.a) Jos kannassa on jäljellä keinomuuttuja

→ **KÄYPÄ ALUE ON TYHJÄ**

(6.1.b) Jos kannassa ei ole keinomuuttujaa → löytyi optimi.

(6.1.b.1) Jos jokaisen kantaan kuulumattoman muuttujan kerroin 0-rivillä on > 0 , niin löytynyt optimi on ainoa

→ **YKSIKÄSITTEINEN OPTIMI**

(6.1.b.2) Jos löytyy kantaan kuulumaton muuttuja, jonka kerroin 0-rivillä on $= 0$, niin mallilla on

→ **USEITA OPTIMIRATKAISUJA**

(6.2) **Valitse kannasta poistuva muuttuja suhdetestillä**

Jos suhdetestillä epäonnistuu niin, ettei poistuvaa muuttujaa saada, niin → **RAJOITTAMATON OPTIMI**

(6.3) **Vaihda kanta ja palaa kohtaan 6.1**

2.7 Matriisiesitys

Tässä kappaleessa luodaan perusta herkkyysoanalyysin ja duaalimallin oppimiselle. Ensimmäinen alakappale kertoo matriisilaskentaa. Jos osaat laskea matriiseilla, voit sivuttaa kappaleen 2.7.1.

2.7.1 Kertausta

Matriisi on lukutaulukko, jossa luvut on järjestetty riveiksi ja sarakkeiksi. Sanomme, että matriisi on $m \times n$ -matriisi, jos siinä on m riviä ja n saraketta. Esimerkiksi matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on 2×3 -matriisi. Kun haluamme sanoa jotakin yleistä matriiseista, käytämme $m \times n$ -matriisille merkintää

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriisin \mathbf{A} *transpoosi* \mathbf{A}^\top eli transponoitu matriisi, saadaan muuttamalla rivit sarakkeiksi.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esimerkki:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriisin \mathbf{A} i :nnettä vaakariviä merkitsemme $\mathbf{a}_{i\bullet}$ ja j :nnettä pystysarakea merkitsemme $\mathbf{a}_{\bullet j}$. Siis

$$\mathbf{a}_{i\bullet} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}) \quad \text{ja} \quad \mathbf{a}_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{1j} \quad a_{2j} \quad \dots \quad a_{mj})^\top$$

Matriisien kertolasku. Jos \mathbf{A} on $m \times n$ -matriisi ja \mathbf{B} on $n \times p$ -matriisi, niin tulo $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ määritellään $m \times p$ -matriisiksi asettamalla,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{b}_{\bullet j}$$

Matriisin \mathbf{C} rivillä i sarakkeessa j oleva luku on siis matriisin \mathbf{A} i :nnen rivin ja matriisin \mathbf{B} j :nnen sarakkeen pistetulo.

Esimerkki:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 13 & 33 \\ 21 & -14 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

sillä esimerkiksi

$$c_{23} = \mathbf{a}_{2\bullet} \cdot \mathbf{a}_{\bullet 3} = (0 \quad 3 \quad -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 5$$

Käänteismatriisi. $n \times n$ -yksikkömatriisi on matriisi, jonka diagonaalilla ($i = j$) on ykkösiä ja muualla nollia. Siis

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ jne.}$$

Yksikkömatriisin nimitys johtuu siitä, että $\mathbf{I}_n \mathbf{A} = \mathbf{A}$ aina, kun kertolasku on mielekäs. Yksikkömatriisi toimii siis kuten ykkönen normaalissa kertolaskussa. Neliömatriisin ($n \times n$)-matriisin \mathbf{A} käänteismatriisi \mathbf{A}^{-1} on matriisi, jolle pätee

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_n \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Kaikilla neliömatriiseilla ei ole käänteismatriisia. Käänteismatriisi löytyy siten, että kirjoitetaan \mathbf{A} ja \mathbf{I} rinnakkain. Tehdään kumpaankin yhtäaikaan samoja rivioperaatioita siten, että \mathbf{A} muuttuu \mathbf{I} :ksi. Silloin \mathbf{I} muuttuu \mathbf{A}^{-1} :ksi. (Kääntö ei aina onnistu, mutta tähän emme nyt syvenny.)

Esimerkki 1: Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

silloin edellä kuvattu algoritmi johtaa rivioperaatioihin (pivot-alkio merkitty suluilla)

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{I}) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} [1] & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & [1] & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}) \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tarkistus:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Esimerkki 2: Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

kaikki informaatio sisältyy seuraaviin matriiseihin

$$\begin{aligned}\text{kerroinmatriisi} \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{muuttujavektori} \quad \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{(Right Hand Side) RHS} \quad \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Matriisi merkinnöin

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.7.2 Simplex-taulun matriisiesitys

Tarkastelemme uudelleen puuleluesimerkkiä (2.1.1). LP-malli on

$$\begin{aligned}\max \quad z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 2x_1 + x_2 + s_1 &= 100 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 80 \\ x_1 + s_3 &= 40\end{aligned}$$

Merkitsemme

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix}$$

jolloin LP-malli voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.12) \quad \begin{aligned}\text{Max} \quad z &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{ehdoin} \quad \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ensimmäinen simplex-taulu on

rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-3	-2	0	0	0	z =	0
1	0	2	1	1	0	0	s1=	100
2	0	1	1	0	1	0	s2=	80
3	0	1	0	0	0	1	s3=	40

 \sim

	1	$-\mathbf{c}^\top$		0
	0	A		b

Viimeinen (optimaalinen) simplex-taulu on

rivi	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1	1	0	z =	180
1	0	0	1	-1	2	0	x2=	60
2	0	0	0	-1	1	1	s3=	20
3	0	1	0	0	-1	0	x1=	20

 \sim

	1	?		0
	0			?

Optimitauluun liittyy siis kanta $\mathbf{BV} = \{x_1, x_2, s_3\}$. Kuvataksemme vastaavaa kantaratkaisua matriisien avulla merkitsemme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{BV} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \text{optimiratkaisun kantamuuttujien arvot} \\ \mathbf{x}_{NBV} &= \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \text{o.r.:n kantaan kuulumattomien muuttujien arvot} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}:n \mathbf{BV}\text{-sarakkeet} \\ \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}:n \mathbf{NBV}\text{-sarakkeet} \\ \mathbf{c}_{BV} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{c}:n \mathbf{BV}\text{-osa} \\ \mathbf{c}_{NBV} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{c}:n \mathbf{NBV}\text{-osa} \end{aligned}$$

Nyt LP-malli (2.12) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \text{Max} \quad z &= \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV} + \mathbf{c}_{NBV}^\top \mathbf{x}_{NBV} \\ \text{ehdoin} \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{NBV} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{BV}, \mathbf{x}_{NBV} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Yhtälöiden mielekkyys näkyy, kun sijoitamme esimerkkimatriisit niihin

$$z = (3 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 100 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 80 \\ x_1 + s_3 = 40 \end{cases}$$

Seuraavaksi kerromme mallin (2.13) matriisimuotoisen rajoiteyhtälön vasemmalta matriisilla \mathbf{B}^{-1} . Saamme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{NBV} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{NBV} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Koska kantaan kuulumattomien muuttujien arvot asetetaan nolliksi, saamme kantaratkaisun

$$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \text{ ja } \mathbf{x}_{NBV} = 0$$

Esimerkkimme tapauksessa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Saamme siis samat arvot kuin viimeisestä simplex-tilusta, mutta vektorissa $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ luvut ovat yleensä eri järjestyksessä kuin viimeisen simplex-tilun RHS:ssa.

Seuraavaksi konstruoiimme viimeisen simplex-tilun 0-rivin. Aloitamme yhtälöryhmästä, jossa on alkuperäinen 0-rivi ja viimeisen tilun rajoiteyhtälöt

$$\begin{cases} z - \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \mathbf{x}_{NBV} = 0 \\ \mathbf{x}_{BV} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + s_1 - s_2 = 20 \\ x_2 - s_1 + 2s_2 = 60 \\ s_3 - s_1 + s_2 = 20 \end{cases}$$

Kerrotaan rajoiteyhtälöt sopivilla luvuilla ja lasketaan ne yhteen

$$\begin{cases} z - \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \mathbf{x}_{NBV} = 0 \\ \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV} + \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_1 + s_2 = 180 \end{cases}$$

Lasketaan vielä näin syntyneet yhtälöt yhteen

$$z + (\mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top) \mathbf{x}_{NBV} = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow z + s_1 + s_2 = 180$$

Saatu yhtälö on viimeisen simplex-taulun esittämä yhtälö! Lasketaan vielä havainnollisuuden vuoksi sulkeiden sisällä oleva matriisilauseke

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top &= (3 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (0 \ 0) \\ &= (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 1) \end{aligned}$$

missä on täsmälleen kantaan kuulumattomien muuttujien kertoimet viimeisen simplex-taulun 0-rivillä!

Nyt voimme tiivistää saamamme tulokset kaavoiksi. Kaavoissa useammassa paikassa esiintyvää termiä $\mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$ merkitsemme symbolilla π ja kutsumme sitä *varjohinnaksi* (shadow price). Merkintätapa on laajalti käytössä, joten noudatamme sitä (vaikka se aluksi saattaa tuntua oudolta).

Jos \mathbf{BV} on LP-mallin kanta, niin kantaan kuuluvien muuttujien arvot \mathbf{x}_{BV} sekä tavoitefunktion arvo z kantaratkaisussa saadaan kaavoista

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{BV} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ z &= \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV} = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \pi \mathbf{b} \end{aligned}$$

Kantaa vastaavan simplex-taulun 0-rivin \mathbf{NBV} -osa saadaan kaavasta

$$(\text{nollarivi})_{NBV} = \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top$$

2.7.3 Optimaalisuus- ja käypyysehto

Edellä johdimme kaavoja, niin että samalla laskimme lausekkeitä auki esimerkkimallin optimikannassa. Lausekkeet voidaan kuitenkin laskea missä kannassa tahansa. Voimekin tulkita saamiemme kaavoja seuraavasti

Olkoon \mathbf{BV} LP-mallin kanta ja matriisit \mathbf{B} , \mathbf{N} , \mathbf{c}_{BV} ja \mathbf{c}_{NBV} kantaan liittyvät osamatriisit ja $\pi = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$. Silloin

kanta \mathbf{BV} on käypä, jos $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq 0$

kanta \mathbf{BV} on optimaalinen, jos se on käypä ja $\pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \geq 0$

2.9 Herkkyysanalyysi

Kun LP-mallin optimiratkaisu on löydetty (Simplexillä tai jollakin tietokoneohjelmalla), halutaan yleensä myös tietää miten herkkä saatu ratkaisu on mallin kertoimissa tapahtuville muutoksille. Tämän asian tutkimista sanotaan *herkkyysanalyysiksi*. Tyyppisiä herkkyysanalyysin kysymyksiä ovat esimerkiksi:

- ”Miten paljon tavoitefunktion optimiarvo kasvaa, jos niukka resurssi b_j kasvaa yhdellä yksiköllä” (Huom: niukkuus tarkoittaa, että $s_j = 0$.) Arkisemmin ilmaistuna:
 ”Mitä yhdestä lisäkuormasta b_j :tä kannattaa enintään maksaa?”
- ”Miten paljon tulee kantaan kuulumattoman muuttujan x_i kertoimen tavoitefunktiossa (c_i) kasvaa, jotta muuttuja kannattaa tuoda kantaan?” (Eli optimikanta vaihtuu.) Arkisemmin ilmaistuna:
 ”Hilanippeliä ei ole viime aikoina kannattanut valmistaa, kun sen myyntihinta on liian pieni. Miten paljon hinnan pitäisi kasvaa, että hila-nippeliä kannattaisi taas valmistaa?”
- ”Miten paljon tulee kantaan kuuluvan muuttujan x_i kertoimen tavoitefunktiossa vähetä, jotta optimikanta vaihtuu?” Arkisemmin ilmaistuna:
 ”Kiertokangen myyntihinta on jatkuvasti laskenut. Missä vaiheessa sen valmistaminen kannattaa lopettaa?”
- Seuraava ei ole oikeastaan kysymys, vaan herkkyysanalyysin aikana esiin tuleva ajatus:
 ”Ei-kriittisen resurssin b_j kasvattaminen ei laajenna käypää aluetta, eikä siis muuta optimiratkaisua!” (Ei-kriittisyys: $s_j > 0$.) Arkisemmin ilmaistuna:
 ”Käyttämätöntä kuorihaketta on jo nyt kaikki nurkat täynnä? Mitä järkeä ostaa lisää!?”

2.9.1 Varjohinta ja redusoitu kustannus

Simplex-algoritmin aikana tutkitaan simplex-taulun 0-riviä, jotta saataisiin selville parantaako kannan vaihto tavoitefunktion arvoa. Kun on löydetty optimikanta, ei kannanvaihto enää kannata.

Jaetaan seuraavassa kantaratkaisuun (ei välttämättä optimikantaan) liittyvän simplex-taulun 0-rivi kahteen osaan

$$\mathbf{u} = \text{nollarivi}_X = \text{päättömuuttujien kertoimet 0-rivillä}$$

$$\mathbf{v} = \text{nollarivi}_S = \text{pelivaramuuttujien kertoimet 0-rivillä}$$

Simplex-algoritmista ja edellisen kappaleen kaavoista tiedämme, että

$$\text{Kun } x_j \in \mathbf{BV}, \text{ niin } u_j = 0$$

$$\text{Kun } x_j \in \mathbf{NBV}, \text{ niin } u_j = \pi \mathbf{a}_{\bullet j} - c_j$$

$$\text{Kun } s_i \in \mathbf{BV}, \text{ niin } v_i = 0$$

$$\text{Kun } s_i \in \mathbf{NBV}, \text{ niin } v_i = \pi \mathbf{a}_{\bullet(n+i)} = \pi_i$$

Viimeisen simplex-taulun 0-rivi voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.1) \quad z + \sum_{j=1}^n u_j x_j + \sum_{i=1}^m v_i s_i = z^*$$

Tehdää seuraavaksi optimiratkaisuun muutos siten, että optimikantaan kuulumaton muuttuja x_k saa arvon $x_k = 1$. Tämä tietenkin edellyttää kantaan kuuluvien muuttujien arvojen muuttamista, mutta oletamme nyt tämän olevan mahdollista. 0-rivi (2.1) ottaa nämä muutokset huomioon sillä se on konstruoitu lisäämällä rajoiteyhtälöiden lineaarikombinaatio alkuperäiseen 0-riviin. Jos nyt jätämme 0-rivistä (2.1) pois kaikki termit, joiden arvo on 0, niin saamme

$$(2.2) \quad z + u_k x_k = z^*$$

eli tavoitefunktion arvo pienenee optimista määrällä u_k .

Määritelmä 2.9.1 *Redusoitu kustannus* (Reduced Cost) u_j ilmoittaa miten monta yksikköä tavoitefunktion arvo huononee, kun optimikantaan kuulumattoman päätösmuuttujan x_j arvoa kasvatetaan yhdellä yksiköllä (eli $u_j = |\partial z / \partial x_j|$).

Seuraavaksi tutkimme tilannetta, jossa resurssia b_k on onnistuttu saamaan yksi ylimääräinen yksikkö ($b_k^{uusi} = b_k^{alkup} + 1$). Koska \mathbf{c}_{BV} ja \mathbf{B}^{-1} eivät ole muuttuneet, on myös $\pi = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$ muuttumaton. Siis

$$z^{uusi} = \pi \mathbf{b}^{uusi} = z^{alkup} + \pi_k = z^{alkup} + v_k$$

Tavoitefunktion arvo kasvaa siis määrällä $v_k = \pi_k$.

Määritelmä 2.9.2 *Varjohinta* (Shadow Price, Dual Price) $v_i = \pi_i$ ilmoittaa miten monta yksikköä tavoitefunktion arvo paranee, kun niukkaa resurssia b_i kasvatetaan yhdellä yksiköllä (eli $v_i = \pi_i = |\partial z / \partial b_i|$).

Redusoitu kustannus u_j löytyy viimeisen simplex-taulun 0-riviltä kantaan kuulumattoman päätösmuuttujan x_j sarakkeesta ja varjohinta v_i löytyy viimeisen simplex-taulun 0-riviltä resurssia vastaavan pelivaramuuttujan s_i sarakkeesta.

Esimerkki 2.9.1 Mustasaaren Saha Oy valmistaa kolmenlaisia puulaitureita. Yksinkertaisin perusmalli on suomalaiseseen metsämaisemaan hyvin sopiva ponttooniratkaisu ”Forest Brut” (fb), hieman järeämpi on jäänkestävä ”Ultima Thule” (ut) ja vaativille asiakkaille on suunniteltu ”Lady Manhattan” (lm). Ensin raakalauta höylätään ja katkotaan määrämittaan höyläämössä, sitten höylätyt laudat lahosuojataan maalaaamossa ja lopuksi laiturielementit kootaan naulaamossa. Kunkin tuotteen myyntihinta, raaka-ainekustannus ja työn määrät eri osastoilla on koottu seuraavaan taulukkaan.

	Lady Manhattan	Ultima Thule	Forest Brut
myyntihinta (€)	400	310	130
raaka-ainekust (€)	100	60	30
naulaamo (h)	8	6	1
höyläämö (h)	1	2	1,5
maalaamo (h)	2	3	0,5

Työn hinnaksi (sivukuluineen) laskemme 20 € /h. Näin saamme tuotteiden katteiksi 80 € jokaiselta Lady Manhattanilta, 30 € jokaiselta Ultima Thulelta ja 40 € jokaiselta Forest Brutilta. Naulaamossa työskentelee kuusi työntekijää, höyläämössä kaksi ja maalaamossa yksi. Kukin työntekijä työskentelee viikossa 40 tuntia. Päätösmuuttujat ovat

x_1 = viikossa valmistettavat Lady Manhattanit

x_2 = viikossa valmistettavat Ultima Thulet

x_3 = viikossa valmistettavat Forest Brutit

LP-malli

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 80x_1 + 30x_2 + 40x_3 \\ \text{ehdoin} \quad &8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 240 \\ &x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 80 \\ &2x_1 + 3x_2 + 0.5x_3 \leq 40 \end{aligned}$$

Simplex taulut ovat

#									
rivi	-z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-80	-30	-40	0	0	0	z =	0
1	0	8	6	1	1	0	0	s1=	240
2	0	1	2	1.5	0	1	0	s2=	80
3	0	2	3	0.5	0	0	1	s3=	40

240/8 = 30
80/1 = 80
40/2 = 20

#									
rivi	-z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	90	-20	0	0	40	z =	1600
1	0	0	-6	-1	1	0	-4	s1=	80
2	0	0	0.5	1.25	0	1	-0.5	s2=	60
3	0	1	1.5	0.25	0	0	0.5	x1=	20

80/(-1) = -80
60/1.25 = 48
20/0.25 = 80

rivi	-z	x1	x2	x3	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	98	0	0	16	32	z =	2560
1	0	0	-5,6	0	1	0,8	-4,4	s1=	128
2	0	0	0,4	1	0	0,8	-0,4	x3=	48
3	0	1	1,4	0	0	-0,2	0,6	x1=	8

<-- OPTIMI

Optimiratkaisu on siis valmistaa 8 Lady Manhattania ja 48 Forest Brutia viikossa, jolloin kate on 2560 € viikossa. Naulaamon työresurssista jää 128 tuntia muuhun käyttöön (noin 3 työntekijää).

Seuraavassa on vertailun vuoksi LINDO-ohjelman antama ratkaisu ja ”sensitivity report”:

```

=====
!Malli:
=====
Max 80x1 + 30x2 + 40x3
subject to
naulaamo) 8x1 + 6x2 + x3 <= 240
hoylaamo) x1 + 2x2 + 1.5x3 <= 80
maalaamo) 2x1 + 3x2 + 0.5x3 <= 40
end

```

```

=====
!Sensitivity Report:
=====
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2560.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	8.000000	0.000000
X2	0.000000	98.000000
X3	48.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
NAULAAMO)	128.000000	0.000000
HOYLAAMO)	0.000000	16.000000
MAALAAMO)	0.000000	32.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	80.000000	80.000000	53.333332
X2	30.000000	98.000000	INFINITY
X3	40.000000	80.000000	20.000000

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
NAULAAMO	240.000000	INFINITY	128.000000
HOYLAAMO	80.000000	40.000000	60.000000
MAALAAMO	40.000000	29.090908	13.333333

```

=====

```

A) Höyläämön työntekijä on tarjoutunut tekemään ylityötä 30€:n tuntipalkalla. Kannattaako ylityötä teettää?

Ratkaisu: Höyläämön työaikaresurssin varjohinta voidaan lukea viimeisen simplex-taulun 0-riviltä s_2 :n sarakkeesta: $\pi_2 = 16$. (ks. myös LINDO:n listaus, josta varjohinta löytyy nimellä 'Dual Price'.) Yrityksen kokonaishyöty yhdestä ylityötunnista on

$$\text{varjohinta} - \text{ylityölisä} = 16\text{€} - 10\text{€} = 6\text{€}$$

Siis ylityötä kannattaa teettää! Kun päätös on tehty, neuvotellaan työntekijän kanssa ylityön määrästä. Jos työntekijä suostuu 10 ylityötuntiin viikossa, niin uusi ratkaisu LINDO:lla on

```
!-----
Max      80x1 + 30x2 + 40x3
subject to
  naulaamo) 8x1 + 6x2 + x3 <= 240
  hoylaamo) x1 + 2x2 + 1.5x3 <= 90 ! = 80 + 10
  maalaamo) 2x1 + 3x2 + 0.5x3 <= 40
end

!-----
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)      2720.000

      VARIABLE           VALUE           REDUCED COST
      X1                6.000000           0.000000
      X2                0.000000          98.000000
      X3               56.000000           0.000000

      ROW  SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
  NAULAAMO)      136.000000           0.000000
  HOYLAAMO)           0.000000          16.000000
  MAALAAMO)           0.000000          32.000000
!-----
```

Malli ei nyt huomioi ylityölisää $10 \cdot 10\text{€} = 100\text{€}$, joten todellinen kate on $2720\text{€} - 100\text{€} = 2620\text{€}$.

B) Markkinointiosasto vaatii, että sahan on tuotettava kaikkia tuotteita. Viikkopala-verissa ehdotetaan, että myös Ultima Thulea valmistettaisiin viisi kappaletta viikossa.

Mitä tämä ehdotus maksaisi yritykselle?

Ratkaisu: x_2 :n redusoitu kustannus (Reduced Cost) löytyy viimeisen simplex-taulun 0-riviltä muuttujan x_2 sarakkeesta: $u_2 = 98$ (€). Jos ehdotus toteutetaan, niin kustannus on $5 \cdot 98 \text{ €} = 490 \text{ €}$ viikossa. (Eli noin 19% kokonaiskattesta.) Suhdetestillä voimme tarkistaa, että ehdotus on mahdollista toteuttaa.

$$\begin{aligned} 128/(-5.6) &< 0 && \text{ei rajoita} \\ 48/0.4 &= 120 \\ 8/1.4 &= 5.71 &\Rightarrow x_2 < 5.17 \end{aligned}$$

Ehdotus on siis mahdollinen, mutta kustannuksesta pitää keskustella johtoryhmässä!

Uusi ehdotuksen mukainen ratkaisu ilman (ylityötä) olisi

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 46 \\ s_1 = 156 \\ z = 2070 \end{cases}$$

2.9.2 Perustapaukset graafisesti ja simplexillä

Seuraavissa esimerkeissä kaikissa on lähtökohtana LP-malli

$$\begin{aligned} \text{maksimoi} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & x_2 \leq 200 \quad (1. \text{ rajoite}) \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 1280 \quad (2. \text{ rajoite}) \\ & 4x_1 + x_2 \leq 960 \quad (3. \text{ rajoite}) \end{aligned}$$

Mallin ratkaisu simplex algoritmilla on

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1	-1	0	0	0	z=	0
1	0	0	1	1	0	0	s1=	200
2	0	4	3	0	1	0	s2=	1280
3	0	4	1	0	0	1	s3=	960

$200/1 = 200$
 $1280/3 = 427$
 $960/1 = 960$

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1	0	1	0	0	z =	200
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200
2	0	4	0	-3	1	0	s2=	680
3	0	4	0	-1	0	1	s3=	760

$200/0 = --$
 $680/4 = 170$
 $760/4 = 190$

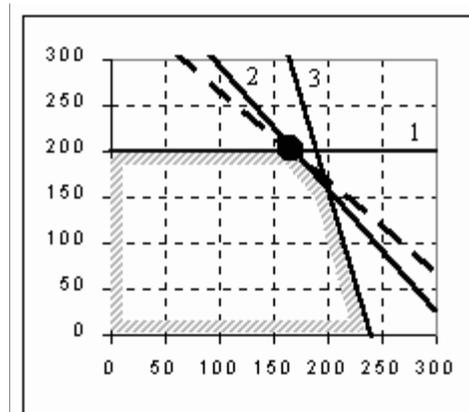


Figure 2.1: LP-mallin käypä alue.

	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1/4	1/4	0	z=	370
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200
2	0	1	0	-3/4	1/4	0	x1=	170
3	0	0	0	2	-1	1	s3=	80

Mallin optimikanta on siis $BV = \{x_1, x_2, s_3\}$. Päätösmuuttujien ja tavoitefunktion optimiarvot ovat

$$\begin{cases} x_1 = 170 \\ x_2 = 200 \end{cases} \Rightarrow z^* = 370$$

Kriittiset resurssit ovat ensimmäinen ja toinen ($s_1 = 0, s_2 = 0$). Kolmatta resurssia jää käyttämättä 80 yksikköä ($s_3 = 80$). Redusoidut kustannukset ja varjohinnat ovat

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \pi = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LP-mallin käypä alue on kuvassa 2.1. Mallin ratkaisu LINDO-ohjelmalla tuottaa seuraavan raportin

```

!-----
Max  x1 +  x2
subject to
R1)          x2 <=  200
R2) 4x1 + 3x2 <= 1280
R3) 4x1 +  x2 <=  960
end

!-----
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 370.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	170.000000	0.000000
X2	200.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
R1)	0.000000	0.250000
R2)	0.000000	0.250000
R3)	80.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	1.000000	0.333333	1.000000
X2	1.000000	INFINITY	0.250000

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
R1	200.000000	226.666672	40.000000
R2	1280.000000	80.000000	680.000000
R3	960.000000	INFINITY	80.000000

!-----

Esimerkki 2.9.2 Kriittinen resurssi muuttuu. Jos esimerkkinne ensimmäinen resurssi kasvaa arvosta 200 arvoon 250, niin käypä alue laajenee ja tavoitefunktion optimiarvo paranee. Koska nurkkapiste siirtyy, myös päätösmuuttujien optimiarvot muuttuvat. Ks. kuva 2.2 Varjohinta

$$\pi_1 = \frac{\partial z}{\partial b_1} = \frac{z:n \text{ muutos}}{b_1:n \text{ muutos}}$$

voidaan selvittää kuvista, mutta helpommin näemme varjohinna simplex-tilun 0-riviltä tai LINDO-listauksesta (Dual Price).

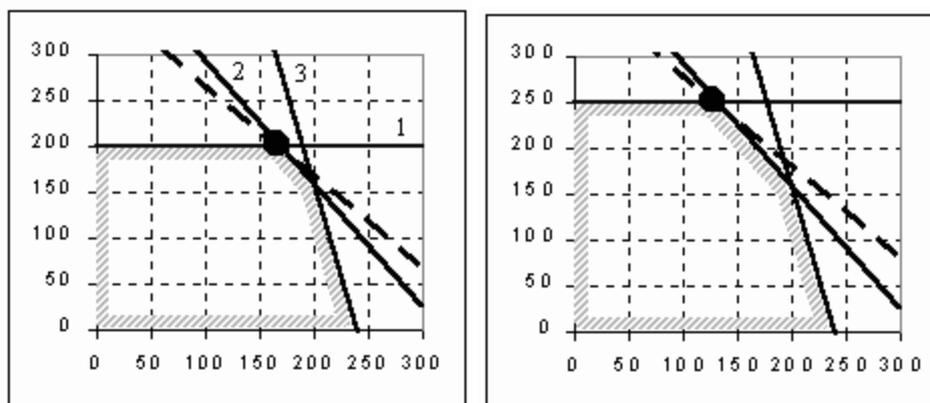


Figure 2.2: Esimerkin 2.9.2 alkuperäinen ja muuttunut käypä alue.

Jos resurssi pienenee paljon, ei alkuperäinen optimikanta säily käypänä. Missä vaiheessa tämä tapahtuu, eli missä rajoissa b_1 saa vaihdella ilman, että kanta vaihtuu jos kaikki muu mallissa pysyy muuttumattomana?

Toistetaan simplex-algoritmi siten, että ensimmäinen resurssi on nyt $b_1 = 200 + d$, missä d on muutos alkuperäiseen. Simplex-taulut ovat

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1	-1	0	0	0	z=	0
1	0	0	1	1	0	0	s1=	200 + d
2	0	4	3	0	1	0	s2=	1280
3	0	4	1	0	0	1	s3=	960

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1	0	1	0	0	z =	200 + d
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200 + d
2	0	4	0	-3	1	0	s2=	680 - 3d
3	0	4	0	-1	0	1	s3=	760 - d

	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1/4	1/4	0	z=	370 + 0.25d
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200 + d
2	0	1	0	-3/4	1/4	0	x1=	170 - 0.75d
3	0	0	0	2	-1	1	s3=	80 + 2d

Ratkaisu on käypä, jos

$$\begin{cases} 200 + d \geq 0 \\ 170 - 0.75d \geq 0 \\ 80 + 2d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \geq -200 \\ d \leq 226.67 \\ d \geq -40 \end{cases} \Leftrightarrow -40 \leq d \leq 226.67$$

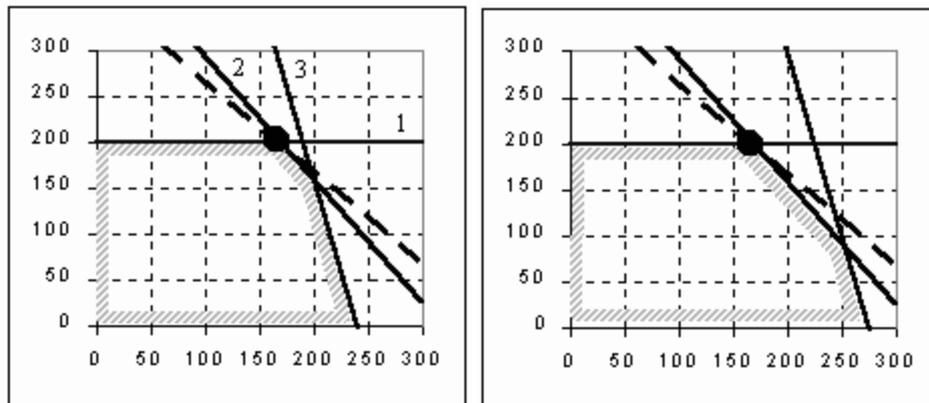


Figure 2.3: Esimerkin 2.9.3 alkuperäinen ja muuttunut käypä alue.

Optimikanta muuttuu siis, jos b_1 kasvaa enemmän kuin 226.67 yksikköä tai pienenee enemmän kuin 40 yksikköä. (Vertaa LINDO-raporttiin.)

Esimerkki 2.9.3 Ei-kriittinen resurssi muuttuu. Jos esimerkkinne kolmas resurssi kasvaa arvosta 960 arvoon 1100, niin käypä alue laajenee, mutta tavoitefunktion optimiarvo ei parane. Koska optiminurkka ei siirry, eivät myöskään päätösmuuttujien optimiarvot muutu. Ks. kuva 2.3

Jos resurssi pienenee paljon, ei alkuperäinen optimikanta säily käypänä. Missä vaiheessa tämä tapahtuu, eli missä rajoissa b_3 saa vaihdella ilman, että kanta vaihtuu jos kaikki muu mallissa pysyy muuttumattomana.

Toistetaan jälleen simplex-algoritmi siten, että kolmas resurssi on nyt $b_3 = 960 + d$, missä d on muutos alkuperäiseen. Simplex-taulut ovat

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1	-1	0	0	0	z=	0
1	0	0	1	1	0	0	s1=	200
2	0	4	3	0	1	0	s2=	1280
3	0	4	1	0	0	1	s3=	960 + d

#

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1	0	1	0	0	z =	200
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200
2	0	4	0	-3	1	0	s2=	680
3	0	4	0	-1	0	1	s3=	760 + d

#

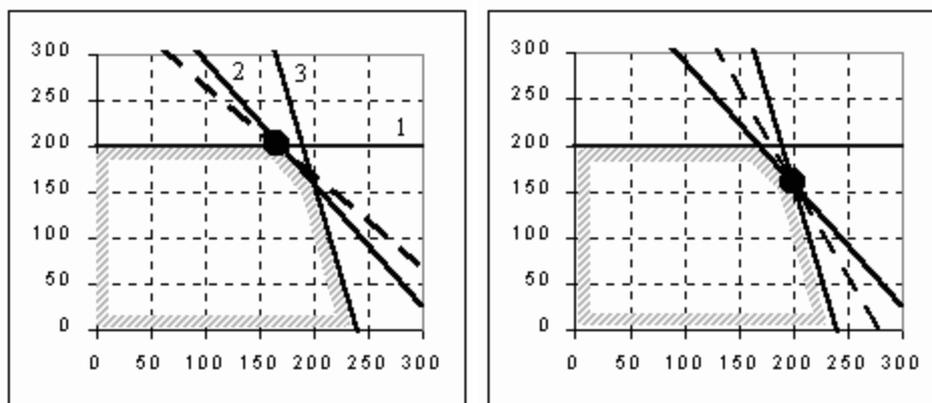


Figure 2.4: Esimerkin 2.9.4 alkuperäinen ja muuttunut käypä alue.

	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	1/4	1/4	0	z=	370
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200
2	0	1	0	-3/4	1/4	0	x1=	170
3	0	0	0	2	-1	1	s3=	80 + d

Ratkaisu on käypä, jos

$$80 + d \geq 0 \Leftrightarrow d \geq -80$$

Optimikanta muuttuu siis, jos b_3 vähenee enemmän kuin 80 yksikköä. (Vertaa LINDO-raporttiin.)

Esimerkki 2.9.4 Tavoitefunktion kerroin muuttuu. Jos tavoitefunktion $z = c_1x_1 + c_2x_2$ kerroin c_1 kasvaa arvosta $c_1 = 1$ arvoon $c_1 = 2$, niin mallin graafinen tarkastelu muuttuu (Ks. kuva 2.4.) Käypä alue ei muutu, mutta tavoitesuoran kulmakerroin muuttuu niin paljon, että optiminurkka siirtyy. Haluammekin nyt selvittää, miten paljon c_1 saa muuttua ilman, että optimikanta vaihtuu. Simplex-ratkaisu muuttuu seuraavan kaltaiseksi.

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1-d	-1	0	0	0	z=	0
1	0	0	1	1	0	0	s1=	200
2	0	4	3	0	1	0	s2=	1280
3	0	4	1	0	0	1	s3=	960

$200/1 = 200$
 $1280/3 = 427$
 $960/1 = 960$

#								
	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-1-d	0	1	0	0	z =	200
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200
2	0	4	0	-3	1	0	s2=	680
3	0	4	0	-1	0	1	s3=	760

200/0 = --
680/4 = 170
760/4 = 190

	z	x1	x2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	(1-3d)/4	(1+d)/4	0	z=	370 + 170d
1	0	0	1	1	0	0	x2=	200
2	0	1	0	-3/4	1/4	0	x1=	170
3	0	0	0	2	-1	1	s3=	80

Siis Kanta on edelleen käypä ja se on optimaalinen, jos

$$((1 - 3d)/4 \geq 0 \text{ ja } (1 + d)/4 \geq 0) \Leftrightarrow -1 \leq d \leq 1/3$$

(Vertaa LINDO-raporttiin.)

2.9.3 Herkkyysoanalyysiä matriisiteknikalla

Seuraavassa tutkimme Mustasaaren Saha Oy:n tuotevalintaongelmaa (esimerkki 2.9.1).

Yleisesti LP-ongelma voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV} + \mathbf{c}_{NBV}^\top \mathbf{x}_{NBV} \\ \text{ehdoin } \mathbf{B}\mathbf{x}_{BV} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{NBV} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{BV} &\geq 0 \\ \mathbf{x}_{NBV} &= 0 \end{aligned}$$

missä nyt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{BV} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 48 \\ 128 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{NBV} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, z^* = 2560 \\ \mathbf{c}_{BV} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_{s1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_{NBV} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_{s2} \\ c_{s3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 240 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 0 \\ 2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \\ \pi &= \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1} = (80 \quad 40 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} = (0 \quad 16 \quad 32) \end{aligned}$$

Esimerkki 2.9.5 Jos toinen resurssi (kriittinen) muuttu määrän d , niin

muuttuu	ei muutu
\mathbf{b}	$\mathbf{c}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{B}^{-1}, \pi = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$
$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $z = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV}$	nollarivi $_{NBV} = \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top$

Jos muutos on 10 yksikköä ($b_2 = 80 + d = 90$), niin kantaratkaisu

$$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 90 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 56 \\ 136 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on käypä, ja koska 0-rivi ei muutu, se on optimaalinen. Miten paljon b_2 saa muuttua ilman kannan vaihtumista, nähdään ehdosta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 80 + d \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 0.2d \\ 48 + 0.8d \\ 128 + 0.8d \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} d \leq 40 \\ d \geq -60 \\ d \geq -160 \end{cases} \Leftrightarrow -60 \leq d \leq 40 \end{aligned}$$

(Vertaa LINDO-raporttiin) Jos ehto toteutuu ja kanta ei vaihdu, niin muuttunut tavoitefunktion arvo on

$$\begin{aligned} z &= \pi \mathbf{b} = (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} 240 \\ 80 + d \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} 240 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} + (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2560 + 16d \end{aligned}$$

Jos kanta ei vaihdu kriittisen resurssin muuttuessa, niin silti päätösmuuttujien optimiarvot ja tavoitefunktion optimiarvo muuttuvat.

Esimerkki 2.9.6 Jos ensimmäinen resurssi (ei-kriittinen) muuttu määrän d , niin

muuttuu	ei muutu
\mathbf{b}	$\mathbf{c}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{B}^{-1}, \pi = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$
$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $z = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV}$	nollarivi $_{NBV} = \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top$

Jos muutos on 10 yksikköä ($b_1 = 240 + d = 250$), niin kantaratkaisu

$$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 48 \\ 138 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on käypä, ja koska 0-rivi ei muutu, se on optimaalinen. Miten paljon b_1 saa muuttua ilman kannan vaihtumista, nähdään ehdosta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 + d \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 48 \\ 128 + d \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow -128 \leq d \leq \infty \end{aligned}$$

Jos ehto toteutuu ja kanta ei vaihdu, niin tavoitefunktion arvo on

$$\begin{aligned} z &= \pi\mathbf{b} = (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} 240 + d \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} 240 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} + (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2560 \end{aligned}$$

Jos kanta ei vaihdu ei-kriittisen resurssin muuttuessa, niin päätösmuuttujien optimiarvot ja tavoitefunktion optimiarvo pysyvät muuttumattomina.

Esimerkki 2.9.7 Jos kantaan kuuluvan muuttujan kerroin tavoitefunktion lausekkeessa c_1 muuttu määrän d , niin

muuttuu	ei muutu
$\mathbf{c}_{BV}, \pi = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}, \mathbf{c}_{NBV}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{B}^{-1}$,
nollarivi $_{NBV} = \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top$ $z = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV}$	$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Jos muutos on 10 yksikköä ($c_1 = 80 + d = 90$), niin 0-rivi menee muotoon

$$\begin{aligned} \text{nollarivi}_{NBV} &= \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \\ &= (90 \quad 40 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (30 \quad 0 \quad 0) \\ &= (112 \quad 14 \quad 38) \end{aligned}$$

Koska kanta on käypä ($\mathbf{x}_{BV} \geq 0$), ja koska 0-rivillä ei ole negatiivisia lukuja, se on edelleen optimaalinen. Miten paljon c_1 saa muuttua ilman kannan vaihtumista, nähdään ehdosta

$$\begin{aligned}
 \text{nollarivi}_{NBV} &= \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \\
 &= (80 + d \quad 40 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \\ 1 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (30 \quad 0 \quad 0) \\
 &= (80 + d \quad 40 \quad 0) \begin{pmatrix} 1,4 & -0.2 & 0.6 \\ 0,4 & 0.8 & -0.4 \\ -5,6 & 0.8 & -4.4 \end{pmatrix} - (30 \quad 0 \quad 0) \\
 &= (128 + 1,4d \quad 16 - 0,2d \quad 32 + 0,6d) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 128 + 1,4d \geq 0 \\ 16 - 0,2d \geq 0 \\ 32 + 0,6d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \geq -91.43 \\ d \leq 80.00 \\ d \geq -53.33 \end{cases} \Leftrightarrow -53.33 \leq d \leq 80
 \end{aligned}$$

(Vertaa LINDO-raporttiin.) **Jos kanta ei vaihdu kantaan kuuluvan päätösmuuttujan kertoimen muuttuessa tavoitefunktiossa, niin päätösmuuttujien optimiarvot eivät muutu mutta tavoitefunktion optimiarvo muuttuu.**

Esimerkki 2.9.8 Jos kantaan kuulumattoman muuttujan kerroin tavoitefunktion lausekkeessa c_2 muuttu määrän d , niin

muuttuu	ei muutu
\mathbf{c}_{NBV}	$\mathbf{b}, \mathbf{c}_{BV}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{B}^{-1}, \pi = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1}$
$\text{nollarivi}_{NBV} = \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top$	$\mathbf{x}_{BV} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ $z = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{x}_{BV}$

Jos muutos on 10 yksikköä ($c_2 = 30 + d = 40$), niin 0-rivi menee muotoon

$$\begin{aligned}
 \text{nollarivi}_{NBV} &= \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \\
 &= (0 \quad 16 \quad 32) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (40 \quad 0 \quad 0) \\
 &= (88 \quad 16 \quad 32)
 \end{aligned}$$

Koska kanta on käypä ($\mathbf{x}_{BV} \geq 0$), ja koska 0-rivillä ei ole negatiivisia lukuja, se on edelleen optimaalinen. Miten paljon c_2 saa muuttua ilman kannan vaihtumista,

nähdään ehdosta

$$\begin{aligned}
 \text{nollarivi}_{NBV} &= \pi \mathbf{N} - \mathbf{c}_{NBV}^\top \\
 &= (0 \ 16 \ 32) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (30 + d \ 0 \ 0) \\
 &= (128 \ 16 \ 32) - (30 + d \ 0 \ 0) \\
 &= (98 - d, 4d \ 16 \ 32) \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & -\infty \leq d \leq 98
 \end{aligned}$$

(Vertaa LINDO-raporttiin.) **Jos kanta ei vaihdu kantaan kuulumattoman päätösmuuttujan kertoimen muuttuessa tavoitefunktiossa, niin päätösmuuttujien optimiarvot ja tavoitefunktion optimiarvo eivät muutu.**

Esimerkki 2.9.9 Jos useampi asia muuttuu yhtäaikaa, eivät LP-ohjelmat yleensä anna mitään valmista tulosta. Tutkitaan seuraavaksi Mustasaaren Saha Oy:n henkilöstötilannetta. Johtoryhmässä on ehdotettu, että naulausosaston työntekijöitä koulutettaisiin maalaustyöhön. Jos kurssi järjestetään, niin kertakustannus on 7000 € riippumatta osallistujien määrästä ja koulutetut työntekijät voivat koulutuksen jälkeen tehdä joko naulaustyötä tai maalaustyötä. Kannattaako koulutus järjestää jos vaadimme, että onvestoinnin tulee maksaa itsensä vuodessa?

Periaatteessa voimme merkitä näin koulutettujen työntekijöiden työpanosta viikottaista työpanosta maalaamossa d :llä, jolloin rajoitteiden RHS on

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 240 - d \\ 80 + d \\ 40 \end{pmatrix}$$

ja tarkastella ongelmaa kuten edellä. Nyt kuitenkin emme ole viilaamassa tulosta pienin askelin, vaan olemme valmiit tekemään isojakin muutoksia. Tulkitaan d päätösmuuttujaksi ja ratkaistaan optimointiongelma

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Max } z & = & 80x_1 & + & 30x_2 & + & 40x_3 & & & \\
 \text{ehdoin} & & 8x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & \leq & 240 - d & \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & \leq & 80 + d & \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 0.5x_3 & \leq & 40 & \\
 & & & & & & d & \leq & 128 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Max } z & = & 80x_1 + 30x_2 + 40x_3 \\
 \text{ehdoin} & & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + d \leq 240 \\
 \Leftrightarrow & & x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 - d \leq 80 \\
 & & 2x_1 + 3x_2 + 0.5x_3 \leq 40 \\
 & & d \leq 128
 \end{array}$$

LINDO:n antama ratkaisu on

```

!-----
max 80x1 + 30x2 + 40x3
st   8x1 + 6x2 + x3 + d <= 240
      x1 + 2x2 + 1.5x3 - d <= 80
      2x1 + 3x2 + 0.5x3 <= 40
      d <= 128

```

```

!-----
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3200.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	80.000000
X2	0.000000	210.000000
X3	80.000000	0.000000
D	40.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	120.000000	0.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	80.000000
5)	88.000000	0.000000

Koulutuksen tuoma etu yritykselle on siis $3200 - 2560 = 640$ (€/viikko), josta kertyy vuodessa noin $40 \times 640 = 25\,600$ €. Koulutus siis kannattaa.

Jos imagosyistä haluamme jatkaa Lady Manhattanien tuotantoa (ainakin 5 viikossa), niin lisäämme malliin vielä yhden rajoitteen

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Max } z & = & 80x_1 + 30x_2 + 40x_3 \\
 \text{ehdoin} & & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + d \leq 240 \\
 & & x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 - d \leq 80 \\
 & & 2x_1 + 3x_2 + 0.5x_3 \leq 40 \\
 & & d \leq 128 \\
 & & x_1 \geq 5
 \end{array}$$

LINDO:n antama ratkaisu on

```

!-----
max  80x1 + 30x2 + 40x3
st   8x1 + 6x2 + x3 + d <= 240
      x1 + 2x2 + 1.5x3 - d <= 80
      2x1 + 3x2 + 0.5x3 <= 40
                                   d <= 128
      x1 >= 5
end

```

```

!-----
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2800.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	5.000000	0.000000
X2	0.000000	210.000000
X3	60.000000	0.000000
D	15.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	125.000000	0.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	0.000000	80.000000
5)	113.000000	0.000000
6)	0.000000	-80.000000

Koulutuksen tuoma etu yritykselle on siis $2800 - 2560 = 240$ (€ / viikko), josta kertyy vuodessa noin $40 \times 240 = 9600$ €. Koulutus kannattaa siis tässäkin tapauksessa.

2.9 Duaalimalli

Normaalimuodossa olevan lp-mallin (*Primaali*)

$$(2.16) \quad \begin{array}{ll} \text{Max} & z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{ehdoin} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

duaali on lp-malli

$$(2.17) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} & w = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{ehdoin} & \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Jos primaali on maksimointimalli, niin duaali on minimointimalli (ja päinvastoin). Jos primaalin resurssirajoitteet ovat tyyppiä " \leq ", niin duaalin resurssirajoitteet ovat tyyppiä " \geq " (ja päinvastoin). Siirryttäessä primaalista duaaliin \mathbf{c} ja \mathbf{b} vaihtavat paikkaa ja kerroinmatriisi \mathbf{A} transponoidaan. Jos primaalissa on n muuttujaa ja m resurssirajoitetta, niin duaalissa on m muuttujaa ja n resurssirajoitetta. Siis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Esimerkki 2.9.1

PRIMAALI	DUAALI
$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{ehd} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$	$\begin{array}{ll} \text{Min} & w = (10 \quad 11) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \text{ehd} & \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$

tai perinteisemmin

PRIMAALI	DUAALI
$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{ehd} & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ & 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = 10y_1 + 11y_2 \\ \text{ehd} & 4y_1 + 7y_2 \geq 1 \\ & 5y_1 + 8y_2 \geq 2 \\ & 6y_1 + 9y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$

Lause 2.9.1 Jos \mathbf{x} on primaalin (2.16) käypä ratkaisu ja \mathbf{y} on duaalin (2.17) käypä ratkaisu, niin tavoitefunktion vastaaville arvoille pätee

$$w = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \geq z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$

Todistus: Lisätään primaaliin slack-muuttujat ja duaaliin excess-muuttujat

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{s} &= \mathbf{b} & \Rightarrow \mathbf{b}^\top &= \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top + \mathbf{s}^\top & \text{ ja} \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{y} - \mathbf{e} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} w - z &= \mathbf{b}^\top \mathbf{y} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ &= \mathbf{b}^\top \mathbf{y} - \mathbf{x}^\top \mathbf{c} \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} + \mathbf{s}^\top \mathbf{y} - (\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} - \mathbf{x}^\top \mathbf{e}) \\ &= \mathbf{s}^\top \mathbf{y} + \mathbf{x}^\top \mathbf{e} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Viimeinen matriisilauseke on ei-negatiivisten lukujen tulojen summana ei-negatiivinen.

///

Eryteisesti optimiratkaisuille pätee seuraava tulos.

Lause 2.9.2 Jos \mathbf{BV} on primaalin (2.16) optimikanta, niin

$$\boldsymbol{\pi}^\top = (\mathbf{c}_{BV} \mathbf{B}^{-1})^\top$$

on duaalin optimiratkaisu, ja tavoitefunktioit z ja w saavat optimeissa samat arvot.

Todistus: Olkoon $\mathbf{y} = \boldsymbol{\pi}^\top$. Tiedämme, että primaalin simplex-ratkaisun optimitaulun 0-rivin kertoimet ovat ei-negatiivisia. Aiemmin johdimme lausekkeen 0-rivin \mathbf{NBV} -osalle. Samoin nähdään helposti, että koko 0-rivi on

$$\text{nollarivi} = \mathbf{c}_{BV}^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^\top = \boldsymbol{\pi} \mathbf{A} - \mathbf{c}^\top \geq 0$$

Nollarivin j :s kerroin ($j = 1, \dots, n$) toteuttaa siis ehdon

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} \mathbf{a}_{\bullet j} - c_j &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{nj} y_n &\geq c_j \end{aligned}$$

Siis $\mathbf{y} = \boldsymbol{\pi}^\top$ toteuttaa duaalin resurssirajoitteet.

Seuraavaksi varmistamme, että $\mathbf{y} \geq 0$. Koska oletimme, että primaalissa (2.16) jokaiseen rajoitteeseen $j = 1, \dots, m$ liittyy slack-muuttuja s_j , ja slack-muuttujan kerroin 0-rivillä on 0, niin nollarivin j :s kerroin ($j = n + 1, \dots, n + m$) toteuttaa siis ehdon

$$\begin{aligned} 0 &\leq \boldsymbol{\pi} \mathbf{a}_{\bullet j} - c_j = \boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_j - 0 \\ \Leftrightarrow y_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Siis $\mathbf{y} = \boldsymbol{\pi}^\top$ toteuttaa duaalin merkkirajoitteet.

Tavoitefunktioille pätee

$$w = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{b} = z_{\text{optimi}}.$$

Koska edellisen lauseen mukaan w ei voi enää saada parempaa arvoa, se on duaalin tavoitefunktion optimiarvo. ///

Vastaavasti voidaan osoittaa, että primaalin päätösmuuttujien optimiarvot ovat samat kuin duaalinmallin varjohinnat.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{primaali}} &= \boldsymbol{\pi}_{\text{duaali}} \\ \boldsymbol{\pi}_{\text{primaali}} &= \mathbf{y}_{\text{duaali}} \\ z_{\text{primaali}}^* &= w_{\text{duaali}}^* \end{aligned}$$

Esimerkki 2.9.2 Olkoon tutkittavana LP-malli ja sen duaali

PRIMAALI	DUAALI
Min $z = 20x_1 + 12x_2 + 21x_3$	Max $z = 3y_1 + 2y_2$
ehd $x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3$	ehd $y_1 + 4y_2 \leq 20$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$	$y_1 + 2y_2 \leq 12$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$3y_1 + y_2 \leq 21$
	$y_1, y_2 \geq 0$

Primaalin ratkaisu simplex-algoritmilla. Ensin muodostetaan alkuratkaisu lisäämällä excess-muuttujat ja keinomuuttujat. Ensimmäiset kaksi rivioperaatiota muuttavat simplex-taulun kanooniseen muotoon (kantamuuttujien sarakkeet oikean näköiset).

#

rivi	-z	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	20	12	21	0	0	M	M	-z=	0
1	0	1	1	3	-1	0	1	0		3
2	0	4	2	1	0	-1	0	1		2

#

#

rivi	-z	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	-M+20	-M+12	-3M+21	M	0	0	M	-z=	-3M
1	0	1	1	3	-1	0	1	0	a1=	3
2	0	4	2	1	0	-1	0	1		2

#

#

rivi	-z	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	-5M+20	-3M+12	-4M+21	M	M	0	0	-z=	-5M
1	0	1	1	3	-1	0	1	0	a1=	3
2	0	4	2	1	0	-1	0	1	a2=	2

3/1=3
2/4=0.5

Nyt simplex-tila on kanoonisessa muodossa. Seuraavaksi edetään normaalisti. Keino-
muuttujat hylätään heti, kun ne ovat poistuneet kannasta.

#

rivi	-z	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	BV	RHS
0	1	0	-0.5M +2	-2.75M +16	M	-0.25M +5	0	1.25M -5	-z=	-2.5M -10
1	0	0	0,5	2,75	-1	0,25	1	-0,25	a1=	2,5
2	0	1	0,5	0,25	0	-0,25	0	0,25	x1=	0,5

0.909
2

#

rivi	-z	x1	x2	x3	e1	e2	BV	RHS
0	1	0	-0,909	0	5,8182	3,5455	-z=	-24,545
1	0	0	0,1818	1	-0,364	0,0909	x3=	0,9091
2	0	1	0,4545	0	0,0909	-0,273	x1=	0,2727

5
0.6

rivi	-z	x1	x2	x3	e1	e2	BV	RHS
0	1	2	0	0	6	3	-z=	-24
1	0	-0,4	0	1	-0,4	0,2	x3=	0,8
2	0	2,2	1	0	0,2	-0,6	x2=	0,6

<-- OPTIMI

Duaalin ratkaisu simplex-algoritmilla. Duaalimallista saa suoraan kanoonisen
simplex-tilan, joka ratkaistaan normaalisti.

#

rivi	w	y1	y2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	-3	-2	0	0	0	w =	0
1	0	1	4	1	0	0	s1=	20
2	0	1	2	0	1	0	s2=	12
3	0	3	1	0	0	1	s3=	21

7

#								
rivi	w	y1	y2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	-1	0	0	1	w =	21
1	0	0	3,6667	1	0	-0,333	s1=	13
2	0	0	1,6667	0	1	-0,333	s2=	5
3	0	1	0,3333	0	0	0,3333	y1=	7

3.5455
3
21

rivi	w	y1	y2	s1	s2	s3	BV	RHS
0	1	0	0	0	0,6	0,8	w =	24
1	0	0	0	1	-2,2	0,4	s1=	2
2	0	0	1	0	0,6	-0,2	y2=	3
3	0	1	0	0	-0,2	0,4	y1=	6

<-- OPTIMI

Tulosten vertailua:

$$\text{primaalille } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} \pi_1^p \\ \pi_2^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ja } z = 24$$

$$\text{duaalille } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} \pi_1^d \\ \pi_2^d \\ \pi_3^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} \text{ ja } w = 24$$

Primaalin ratkaisu voidaan siis tässä tapauksessa saada esiin huomattavasti helpommin ratkaisemalla duaali kuin ratkaisemalla primaali itse. Tätä ilmiötä käytetään eräissä simplex-algoritmin muunnelmissa, joita emme nyt kuitenkaan lähemmin esittele.

HUOMAUTUS: Eräät tietokoneohjelmat käyttävät varjohinnalle määritelmä $\pi_i = \partial z / \partial b_i$. Silloin minimointitehtävän varjohinnat ovat negatiivisia tai nollia.

Koska edellä muutimme primaalin maksimointitehtäväksi ennen simplex-tauluja, saimme optimitaulun 0-riville positiiviset kertoimet. Seuraavassa vertailun vuoksi LINDO:n ratkaisu primaalille ja duaalille.

```
!PRIMAALI
!-----
```

```
Min 20x1 + 12x2 + 21x3
st
r1)  x1 +  x2 + 3x3 >= 3
r2)  4x1 + 2x2 +  x3 >= 2
end
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
```

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
```

```
1)      24.00000
```

```
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
```

X1	0.000000	2.000000
X2	0.600000	0.000000
X3	0.800000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
R1)	0.000000	-6.000000
R2)	0.000000	-3.000000

NO. ITERATIONS= 3
!-----

!DUAALI
!-----

Max $3y_1 + 2y_2$
st
r1) $y_1 + 4y_2 \leq 20$
r2) $y_1 + 2y_2 \leq 12$
r3) $3y_1 + y_2 \leq 21$
end

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 24.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y1	6.000000	0.000000
Y2	3.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
R1)	2.000000	0.000000
R2)	0.000000	0.600000
R3)	0.000000	0.800000

NO. ITERATIONS= 2
!-----

LINDO ilmoittaa siis primaalin varjohinnat negatiivisina. Tämä saattaa aiheuttaa hämminkiä, jos ei tiedä asiaa. **MUISTA:** Ohjelmien toiminnassa on eroja - jotkut ohjelmat ilmoittavat minimointitehtävän varjohinnat ei-positiivisina, jotkut ei-negatiivisina.

2.10 DEA-analyysi

DEA-malli (*Data Envelopment Analysis*) kuvaa usean toimintoyksikön tehokkuuksia. DEA-mallista esitellään kaksi versiota **CCR-malli** *Charnes, Cooper ja Rhodes, 1978* ja **BCC-malli** *Banker, Charnes ja Cooper, 1984*. Seuraavassa mallit kuvataan melko naiivilla tavalla. (Lisää tietoa aiheesta löytyy esimerkiksi kirjasta: **Cooper, Seiford & Tone (2000)**. ”*Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*”, Kluwer Academic Publishers.)

2.10.1 Tehokkuus suhteena ja graafeina

Yleensä tehokkuutta mitataan suhteena

$$\text{tehokkuus} = \frac{\text{output}}{\text{input}}$$

Jos pieniä korva-leikkauksia tekevällä lääkäriasemalla, joka suorittaa kuukaudessa 100 leikkausta, on leikkaavia kirurgeja 4, niin leikkaussalin tehokkuutta voidaan kuvata suhteella.

$$\frac{100 \text{ leikkausta}}{4 \text{ kirurgia}} = 25 \text{ leikkausta kuukaudessa per kirurgi}$$

Jos huomioon otettavia tuotos-komponentteja on useita (korva-leikkausten lisäksi kasvojen kohotus-leikkauksia) ja panos-komponentteja on useita (leikkaavien kirurgien lisäksi muu leikkaussalihenkilökunta), merkitään

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{korvaleikkausten lkm/kk} & y_2 &= \text{kasvojen kohotusten lkm/kk} \\ x_1 &= \text{kirurgien lkm} & x_2 &= \text{hoitajien lkm.} \end{aligned}$$

Nopea arvio lääkärikeskuksen leikkaussalin tehokkuudelle on

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$$

Toisaalta lääkärikeskuksen taloudesta vastaavat todennäköisesti näkevät paremmaksi tehokkuusmitaksi suhteen

$$\frac{y_1 + 6y_2}{10x_1 + 2x_2},$$

missä tuotosten lukumääriä on painotettu suhteessa yksikköhintoihin ja panoksia on painotettu suhteessa yksikkökustannuksiin. Tässä on vielä suhteellisen helppo löytää järkevät painokertoimet, mutta sitten kun verrataan kahden tai useamman keskenään kilpailevan lääkärikeskuksen tehokkuuksia keskenään on lähes mahdotonta löytää kaikkien hyväksymiä painokertoimia. Tähän ongelmaan tulemme pian löytämään nerokkaan

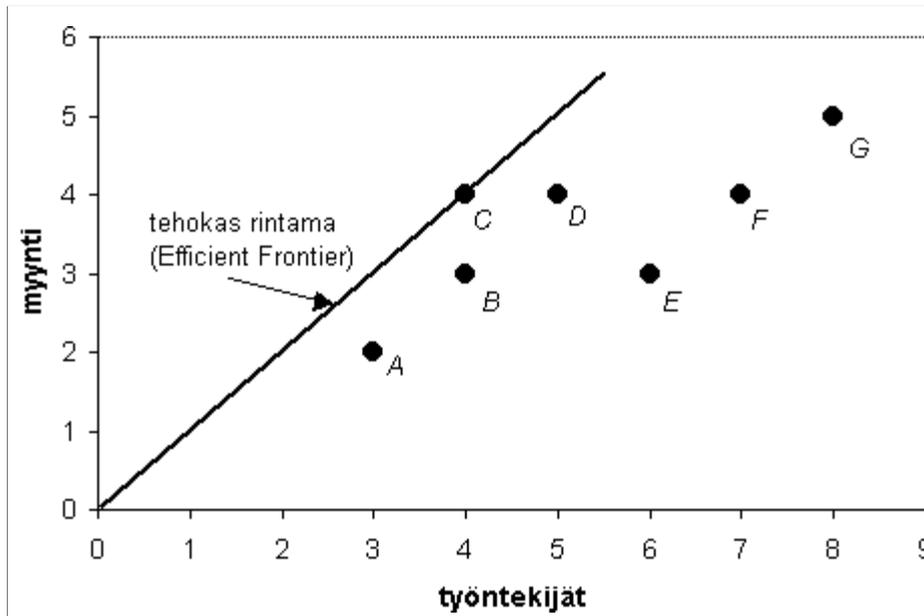


Figure 2.16: Kauppojen A,...,G tehokkuusvertailu.

ratkaisun. Sitä ennen tarkastelemme muutamaa yksinkertaista perustapausta graafisesti.

Yksi tuotos yksi panos: Tarkastellaan esimerkkinä kauppvoja (A,...,G), joiden henkilökunnan lukumäärä ja kuukausimyynti on taulukoitu seuraavaan taulukkoon.

kauppa	A	B	C	D	E	F	G
työvoima (hlö)	3	4	4	5	6	7	8
myynti (10000 €)	2	3	4	4	3	4	5
myynti/työvoima	0,667	0,75	1	0,8	0,5	0,571	0,625

Taulukosta nähdään, että tehokkain kauppa on C. Taulukon tiedot on esitetty graafisesti kuvassa (2.16). Kuvaan on merkitty *tehokas rintama (Efficient Frontier)*, jolla sijaitsevat yksiköt ovat yhtä tehokkaita, kuin aineiston tehokkain.

Kaupalla A on kaksi luontevaa tapaa päästä tehokkaalle rintamalle:

1. Siirtyä vaakasuorassa suoralle, eli myydään yhtä paljon kuin ennenkin, mutta vähennetään henkilökuntaa yhdellä.
2. Siirrytään pystysuorassa suoralle, eli pidetään henkilökunta määrä ennallaan, mutta myydään yksi yksikkö (10000 €) enemmän kuukaudessa.

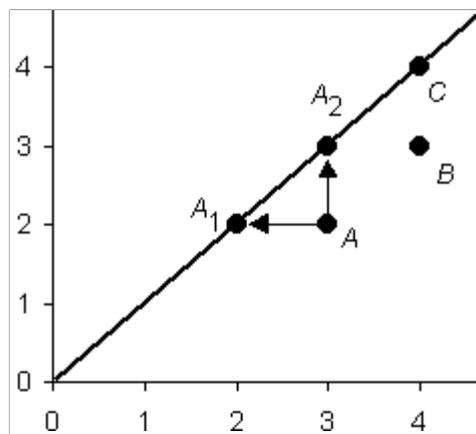


Figure 2.17: Kaupan A tehokkuuden parantaminen.

Yksi tuotos kaksi panosta: Tarkastellaan esimerkkinä kauppia (A,...,I), joiden henkilökunnan lukumäärä, lattiapinta-ala ja kuukausimyynti on taulukoitu seuraavaan taulukkoon.

kauppa	A	B	C	D	E	F	G	H	I
työvoima	7	28	16	20	2	15	10	11	24
lattia-ala	6	12	2	10	4	6	3	5	10
myynti	2	4	2	5	1	3	2	2	4

Kun työvoima ja lattia-ala suhteutetaan myyntiin, saadaan taulukko

kauppa	A	B	C	D	E	F	G	H	I
työvoima/myynti	3.5	7	8	4	2	5	5	5,5	6
lattia-ala/myynti	3	3	1	2	4	2	1,5	2,5	2,5

Taulukon tiedot on esitetty graafisesti kuvassa (2.18).

Kuvaan piirretty tehokas rintama on murtoviiva, joka kulkee havaintopisteiden (nyt E, D, G ja C) kautta siten, että murtoviiva on laskeva ja loiveneva (siis konvekksi) ja kaikki havaintopisteet ovat murtoviivalla tai sen yläpuolella (oikealla puolella). Tehokkaan rintaman vasen jatke on pystysuora ja oikea jatke on vaakasuora.

Suhtaudumme nyt tehokkaan rintaman yläpuolella olevaan alueeseen kuin käypään alueeseen. Koska aineisto sisältää useamman kauppiaan tiedot, ja jokainen kauppias varmasti tekee parhaansa, niin oletamme että ainakin muutama kauppiasta on saanut liikkeensä toiminnan niin tehokkaaksi kuin se on mahdollista. Siis murtoviiva (tehokas rintama) kuvaa melko hyvin mahdollisten toimintapisteiden joukon reunaa. Miten tahansa kauppias painottaakin päätösmuuttujia

$$x_1 = \text{työvoima} / \text{myynti}$$

$$x_2 = \text{lattia-ala} / \text{myynti}$$

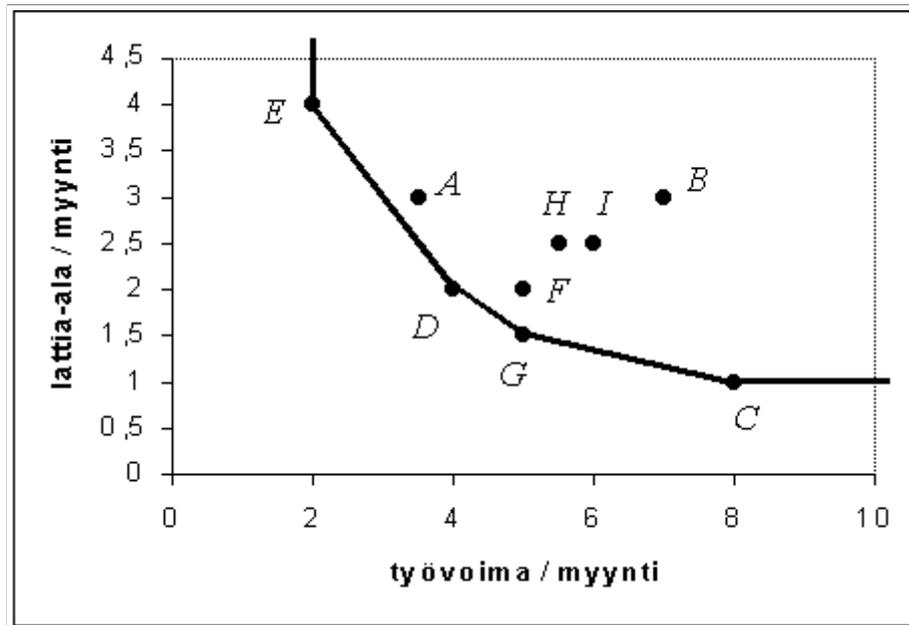


Figure 2.18: Kauppojen tehokkuusvertailu. Tehokas rintama EDGC.

niin kauppias pyrkii minimoimaan painotetun panos-tuotos -suhteen

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Mitkä tahansa kauppiiaan valitsemat painokertoimet c_1 ja c_2 ovatkin, niin optimi löytyy käyvän alueen reunalta eli läheltä tehokasta rintamaa. Nyt emme kuitenkaan korosta nurkkapisteitä, sillä murtoviiva on vain karkea estimaatti. Oikea käyvän alueen reuna on sileä, emmekä tunne sen tarkkaa sijaintia.

Kuvassa (2.19) on esitetty havaintopisteen H asema suhteessa tehokkaaseen rintamaan. Kaupan H tehostomuutta voidaan kuvata suhteella $OP/OH \approx 0.76$. Tämä luku kuvaa nykyisen myynnin suhdetta tehokkaaseen myyntiin, joka nykyisin panoksin johtaisi graafissa tehokkaalle rintamalle. Jos esimerkiksi kauppias H haluaa parantaa kauppansa tehokkuuslukuja, niin hänellä on kolme perustapaa parantaa tehokkuutta ja kaikki niiden yhdistelmät:

1. **Vähennetään henkilökuntaa.** Jos lattia-ala ja myynti eivät muutu, niin piste H siirtyy vaakasuorassa pisteeseen P_1 .
2. **Vähennetään lattia-alaa.** Jos henkilökunta ja myynti eivät muutu, niin piste H siirtyy pystysuorassa pisteeseen P_2 .
3. **Lisätään myyntiä.** Jos henkilökunta ja lattia-ala eivät muutu, niin piste H siirtyy janaa HO pitkin pisteeseen P .

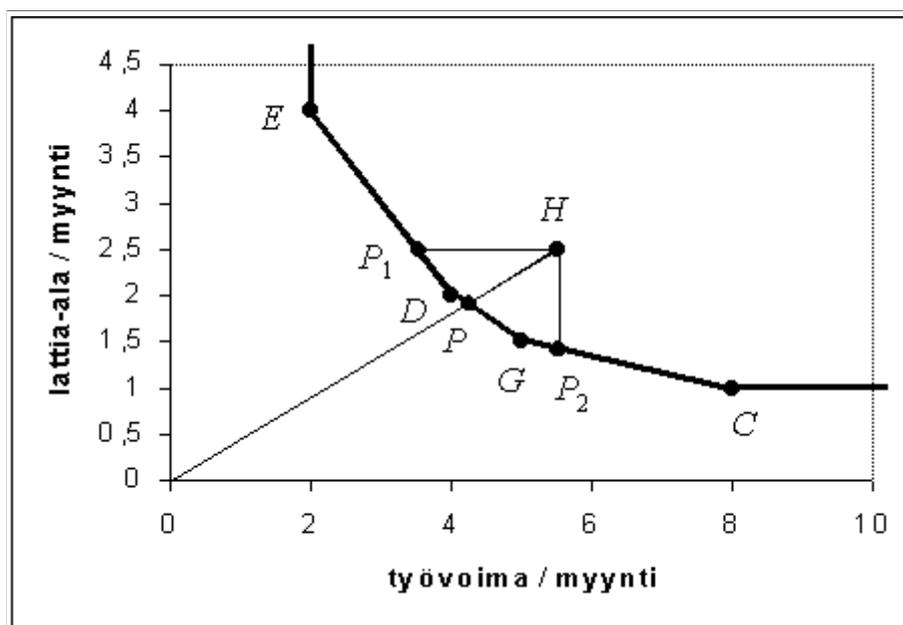


Figure 2.19: aupan H tehokkuuden parantamisen vaihtoehtoja.

4. **Tehdään kaikki voitava.** Kaikin tavoin pyritään lisäämään myyntiä ja karsimaan kustannuksia, jolloin lopputulos on yhdistelmä edellisistä ja lopulta piste H päättyy lähelle tehokasta rintamaa jonnekin alueelle P_1DPGP_2 .

Yksi panos kaksi tuotosta: Tarkastellaan maahantuojien myyntiedustajia. Seuraavaan taulukkoon on kerätty maahantuojien (A,...,G) asiakkaat, myynti (100000 €) ja myyntiedustajien lukumäärät.

kauppa	A	B	C	D	E	F	G
asiakkaat	3	4	18	20	4	20	42
myynti	15	14	24	15	6	20	14
myyntiedust.	3	2	6	5	1	4	7

Kun luvut suhteutetaan myyntiedustajien määriin, saadaan taulukko

kauppa	A	B	C	D	E	F	G
asiakk./myyntied.	1	2	3	4	4	5	6
myynti/myyntied.	5	7	4	3	6	5	2

Taulukon tiedot on esitetty graafisesti kuvassa (2.20). Kuvat (2.18) ja (2.20) näyttävät erilaisilta koska edellisessä minimoidaan panosten suhdetta tuotokseen ja jälkimmäisessä maksimoidaan tuotosten suhdetta panokseen. Painokertoimien valinta määrää sen, mikä osa tehokkaasta rintamasta koetaan parhaana.

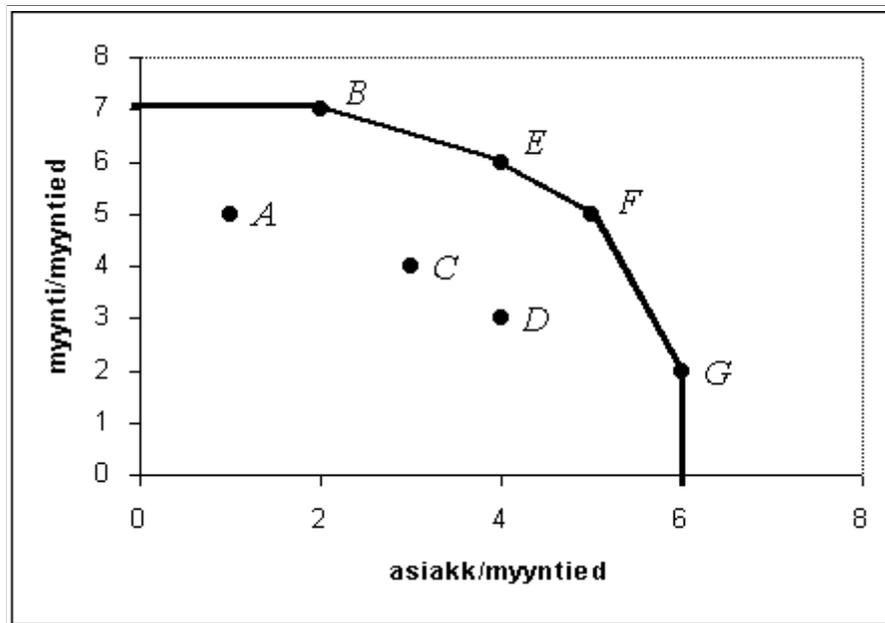


Figure 2.20: Maahantuojien myyntityön tehokkuusvertailu. Tehokas rintama BEFG.

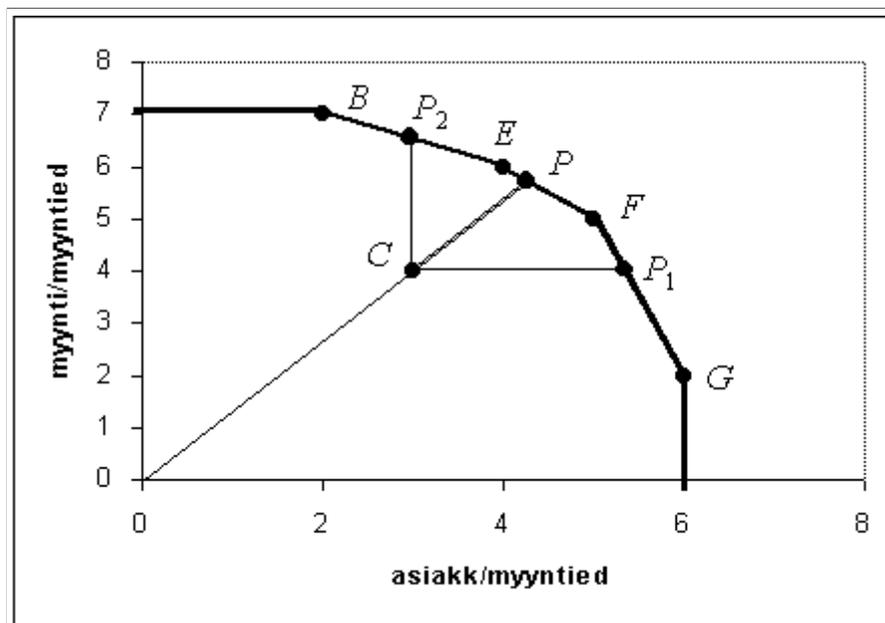


Figure 2.21: Maahantuojan *C* tehokkuuden parantamisen vaihtoehtoja.

Kuvassa (2.21) on esitetty havaintopisteen C asema suhteessa tehokkaaseen rintamaan. Maahantuojan C tehottomuutta kuvaa nyt suhde OC/OP . Jos tuotokset olisivat OP/OC -kertaiset, niin havaintopiste olisi tehokkaalla rintamalla. Luku OC/OP kuvaa siis nykyisten tuotosten suhdetta sellaiseen tehokkaaseen tuotokseen, joka nykyisellä panoksella ja nykyisellä tuotossuhteella johtaisi graafissa tehokkaalle rintamalle.

Huomaa, että kummassakin esityksessä edellä tehokkaalla yksiköllä tehokkuus on tasan 1 ja tehottomalla yksiköllä tehokkuus on < 1 .

2.10.2 CCR-mallin perusmuoto

Vertailtavista yksiköistä käytämme nyt nimityksiä DMU_1, \dots, DMU_n (DMU ="Decision Making Unit"), joita on siis n kappaletta. Jokaiselta DMU :lta kirjaamme m panosta ja s tuotosta, jolloin k :nulle DMU :lle saamme panosvektorin \mathbf{x}_k ja tuotosvektorin \mathbf{y}_k

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{sk} \end{pmatrix}$$

Panoksista ja tuotoksista vaadimme että

1. kaikkien tulee olla ei-negatiivisia ($x_{ik} \geq 0, \forall i, k, y_{jk} \geq 0, \forall j, k$),
2. kaikista DMU :ista pitää olla olemassa numeerinen data panoksista ja tuotoksista,
3. tavoittelemme suuria tuotoksia ja pieniä panoksia.
4. EMME VAADI, että kaikki pitäisi mitata rahassa, kunhan kaikkien DMU :iden osalta kyseinen panos tai tuotos on mitattu samalla tavalla (esim. "myönteisten asiakaspalautteiden lukumäärä kuukaudessa").

Kun laskemme tehokkuustunnusluvun laskemme panoksista ja tuotoksista painotetut summat

$$\text{tehokkuus}_k = \frac{\text{tuotossumma}_k}{\text{panossumma}_k} = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_s y_{sk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk}} = \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{y}_k}{\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_k}$$

siten, että painokertoimet ovat ei-negatiivisia ja ainakin yksi u_i eroaa nolasta ja ainakin yksi v_j eroaa nolasta. Koska DMU :t tuskin pääsevät yksimielisyyteen oikeista painokertoimista, toimimme seuraavalla tavalla:

CCR-mallin suhdemuoto. Tutkitaan DMU :t yksi kerrallaan ja merkitään tutkitavaa DMU :ta indeksillä o . Yksikön DMU_o osalta etsimme parhaat mahdolliset painokertoimet, eli ratkaisemme optimointitehtävän

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta = \frac{u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \dots + v_m x_{mo}} \\ \text{subject to} \quad & \frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1, \quad (j = 1, \dots, n) \\ & \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{u} \geq 0 \\ & \mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}$$

Maksimoidemme siis DMU_o :n tehokkuussuhdetta ehdolla, että minkään DMU :n tehokkuussuhde samoin painokertoimin ei ylitä arvoa 1. Suurin tavoitefunktion mahdollinen arvo on siis 1. Jos tavoitefunktio saa optimissa arvon yksi, löytyy DMU_o :lle sellaiset tuotosten ja panosten painokertoimet, että DMU_o on kiistatta paras näillä painokertoimilla laskien. Tässä tapauksessa on luontevaa sanoa, että DMU_o on tehokas. (Jatkossa vaadimme hieman enemmän.)

Jos tavoitefunktion optimiarvo on alle yhden, löytyy aina tehokkaampi DMU , valitaan painokertoimet miten tahansa. Silloin sanomme, että DMU_o on tehoton ja tavoitefunktion optimiarvo (< 1) kuvaa tehottomuuden määrää.

CCR-mallin LP-muoto. Edellä ratkaistu optimointitehtävä ei ole lineaarinen. Lisäksi osoittautuu, että vaikka tavoitefunktion θ optimiarvo onkin yksikäsitteinen, niin päätösmuuttujien $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_m$ arvot eivät ole yksikäsitteiset. Siksi asetamme lisäehdon

$$v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \dots + v_m x_{mo} = 1$$

ja muutamme optimointitehtävän LP-malliksi

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta = u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \\ \text{subject to} \quad & v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \\ & u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj} \leq v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj}, \quad (j = 1, \dots, n) \\ & \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{u} \geq 0 \\ & \mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}$$

Joskus tämä LP-malli kirjoitetaan matriisimuotoon

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{u}^\top \mathbf{y}_o \\ \text{st} \quad & \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_o = 1 \\ & \mathbf{u}^\top \mathbf{Y} \leq \mathbf{v}^\top \mathbf{X} \end{aligned}$$

Määritelmä 2.10.1 CCR-tehokkuus: DMU_o on CCR-tehokas, jos tavoitefunktion optimiarvo on $\theta^* = 1$ ja on olemassa ainakin yhdet optimaaliset \mathbf{u}^* ja \mathbf{v}^* siten, että $\mathbf{u}^* > 0$ ja $\mathbf{v}^* > 0$.

Huomaa, että tässä teknisessä määritelmässä vaaditaan hieman enemmän kuin edellä tekstikappaleen luontevassa kuvailussa. CCR-tehokkuus edellyttää, että tavoitefunktio saadaan ykköseksi positiivisilla painokertoimilla. Tämä vaatimus sulkee eräitä erikoistapauksia CCR-tehokkuuden ulkopuolelle.

Jos esimerkiksi DMU_o tuottaa tuotosta, jota muut DMU :t tuottavat hyvin pieninä määrinä, niin DMU_o :n on mahdollista tehdä tavoitefunktionsa arvo ykköseksi, vaikka DMU_o todellisuudessa olisi hyvin tehoton. Jos tämä edellyttää 0-painoja, ei DMU_o täytä CCR-tehokkuuden ehtoja.

Esimerkki 2.10.1 Tarkastellaan neljää yritystä, joista kukin käyttää kahta panosta ja tuottaa kolmea tuotosta. Olkoon data

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
panos1	5	8	7	13
panos2	14	15	12	30

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4
tuotos1	9	5	4	6
tuotos2	4	7	9	12
tuotos3	16	10	13	20

Silloin yrityksen 1 tehokkuus lasketaan CCR mallin LP-muodosta

$$\begin{aligned}
 (DMU_1) \max \quad & \theta = 9u_1 + 4u_2 + 16u_3 \\
 \text{subject to} \quad & 5v_1 + 14v_2 = 1 \\
 & 9u_1 + 4u_2 + 16u_3 \leq 5v_1 + 14v_2 \\
 & 5u_1 + 7u_2 + 10u_3 \leq 8v_1 + 15v_2 \\
 & 4u_1 + 9u_2 + 13u_3 \leq 7v_1 + 12v_2 \\
 & 6u_1 + 12u_2 + 20u_3 \leq 13v_1 + 30v_2 \\
 & \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{u} \geq 0 \\
 & \mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \geq 0
 \end{aligned}$$

Tämän mallin ja muita DMU :ita koskevien vastaavien mallien ratkaisut ovat seuraavassa LINDO-listauksessa

```

!-----
max      9u1 + 4u2 + 16u3      ! DMU1
st
psum)   5v1 + 14v2 = 1

```

```

DMU1) 9u1 + 4u2 + 16u3 - 5v1 - 14v2 <= 0
DMU2) 5u1 + 7u2 + 10u3 - 8v1 - 15v2 <= 0
DMU3) 4u1 + 9u2 + 13u3 - 7v1 - 12v2 <= 0
DMU4) 6u1 + 12u2 + 20u3 - 13v1 - 30v2 <= 0
end

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1.000000 --> DMU1 ON TEHOKAS !!

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	0.111111	0.000000
U2	0.000000	0.000000
U3	0.000000	0.000000
V1	0.200000	0.000000
V2	0.000000	0.000000

```

!-----
max 5u1 + 7u2 + 10u3 ! DMU2
st
psum) 8v1 + 15v2 = 1
DMU1) 9u1 + 4u2 + 16u3 - 5v1 - 14v2 <= 0
DMU2) 5u1 + 7u2 + 10u3 - 8v1 - 15v2 <= 0
DMU3) 4u1 + 9u2 + 13u3 - 7v1 - 12v2 <= 0
DMU4) 6u1 + 12u2 + 20u3 - 13v1 - 30v2 <= 0
end

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.773333 ---> DMU2 EI OLE TEHOKAS

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	0.080000	0.000000
U2	0.053333	0.000000
U3	0.000000	2.784615
V1	0.000000	0.248205
V2	0.066667	0.000000

```

!-----
max 4u1 + 9u2 + 13u3 ! DMU3
st
psum) 7v1 + 12v2 = 1
DMU1) 9u1 + 4u2 + 16u3 - 5v1 - 14v2 <= 0
DMU2) 5u1 + 7u2 + 10u3 - 8v1 - 15v2 <= 0

```

```

DMU3) 4u1 + 9u2 + 13u3 - 7v1 - 12v2 <= 0
DMU4) 6u1 + 12u2 + 20u3 - 13v1 - 30v2 <= 0
end

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1.000000 ---> DMU3 ON TEHOKAS

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	0.100000	0.000000
U2	0.066667	0.000000
U3	0.000000	0.000000
V1	0.000000	0.000000
V2	0.083333	0.000000

```

!-----
max 6u1 + 12u2 + 20u3 ! DMU4
st
psum) 13v1 + 30v2 = 1
DMU1) 9u1 + 4u2 + 16u3 - 5v1 - 14v2 <= 0
DMU2) 5u1 + 7u2 + 10u3 - 8v1 - 15v2 <= 0
DMU3) 4u1 + 9u2 + 13u3 - 7v1 - 12v2 <= 0
DMU4) 6u1 + 12u2 + 20u3 - 13v1 - 30v2 <= 0
end

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.7558528 ---> DMU4 EI OLE TEHOKAS

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	0.000000	1.217391
U2	0.039298	0.000000
U3	0.014214	0.000000
V1	0.076923	0.000000
V2	0.000000	4.414716

Siis DMU_1 ja DMU_3 ovat tehokkaita. Lisäksi ne ovat CCR-tehokkaita. Vaikka LINDO:n antamassa tuloksessa optimipainokertoimissa onkin nollia, niin näiden kertoimien redusoidut kustannukset ovat kaikki nollia, joten painokertoimia voidaan hieman kasvattaa (pieni muutos riittää) ilman, että tavoitefunktion arvo huononee.

Esimerkki 2.10.2 CCR-mallin matriisimuoto

$$\begin{cases} \max & \theta = \mathbf{u}^\top \mathbf{y}_o \\ \text{st} & \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_o = 1 \\ & \mathbf{u}^\top \mathbf{Y} \leq \mathbf{v}^\top \mathbf{X} \end{cases}$$

saa edellisellä aineistolla DMU_1 :n tapauksessa tulkinnan

$$\begin{cases} \max & \theta = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} \\ \text{st} & (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = 1 \\ & (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 9 & 12 \\ 16 & 10 & 13 & 20 \end{pmatrix} \leq (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 13 \\ 14 & 15 & 12 & 30 \end{pmatrix} \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} \max & \theta = 9u_1 + 4u_2 + 16u_3 \\ \text{subject to} & 5v_1 + 14v_2 = 1 \\ & 9u_1 + 4u_2 + 16u_3 \leq 5v_1 + 14v_2 \\ & 5u_1 + 7u_2 + 10u_3 \leq 8v_1 + 15v_2 \\ & 4u_1 + 9u_2 + 13u_3 \leq 7v_1 + 12v_2 \\ & 6u_1 + 12u_2 + 20u_3 \leq 13v_1 + 30v_2 \end{cases}$$

Jokainen CCR-mallin LP-muodon rajoitteista $2, \dots, n+1$ vastaavat DMU_k :n. Jos DMU_k -rajoite toteutuu yhtälönä, eli vastaava slack-muuttuja saa arvon $s_{k+1} = 0$, niin vastaava DMU_k on tehokas DMU_o :n parhailta painokertoimilla. Jos lisäksi DMU_k on CCR-tehokas niin sanomme, että se on DMU_o :n referenssiyksikkö. Referenssiyksiköitä on yleensä useampia ja ne muodostavat *referenssijoukon*, eli *vertaisryhmän* (*reference set*, *peer group*).

Esimerkki 2.10.3 Esimerkkinä edellä esitellyistä käsitteistä analysoidaan LINDO:n avulla uudelleen kauppias-aineisto kappaleesta ”yksi tuotos kaksi panosta”. Kauppiasta A koskeva CCR-mallin LP-muoto on

$$\begin{aligned} (DMU_A) \max & \quad \theta = 2u_1 \\ \text{subject to} & \quad 7v_1 + 6v_2 = 1 \\ & \quad 2u_1 - 7v_1 - 6v_2 \leq 0 \quad (DMU_A) \\ & \quad 4u_1 - 28v_1 - 12v_2 \leq 0 \quad (DMU_B) \\ & \quad 2u_1 - 16v_1 - 2v_2 \leq 0 \quad (DMU_C) \\ & \quad 5u_1 - 20v_1 - 10v_2 \leq 0 \quad (DMU_D) \\ & \quad u_1 - 2v_1 - 4v_2 \leq 0 \quad (DMU_E) \\ & \quad 3u_1 - 15v_1 - 6v_2 \leq 0 \quad (DMU_F) \\ & \quad 2u_1 - 10v_1 - 3v_2 \leq 0 \quad (DMU_G) \\ & \quad 2u_1 - 11v_1 - 5v_2 \leq 0 \quad (DMU_H) \\ & \quad 4u_1 - 24v_1 - 10v_2 \leq 0 \quad (DMU_I) \\ & \quad \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{u} \geq 0 \\ & \quad \mathbf{v} \neq 0, \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}$$

LINDO-ratkaisu DMU_A :n optimointitehtävään on

```

!-----
max 2u1
st
r1)          7v1 + 6v2 = 1
dmuA) 2u1 - 7v1 - 6v2 <= 0
dmuB) 4u1 - 28v1 - 12v2 <= 0
dmuC) 2u1 - 16v1 - 2v2 <= 0
dmuD) 5u1 - 20v1 - 10v2 <= 0
dmuE) u1 - 2v1 - 4v2 <= 0
dmuF) 3u1 - 15v1 - 6v2 <= 0
dmuG) 2u1 - 10v1 - 3v2 <= 0
dmuH) 2u1 - 11v1 - 5v2 <= 0
dmuI) 4u1 - 24v1 - 10v2 <= 0
end

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)      0.9230769

      VARIABLE            VALUE            REDUCED COST
      U1                  0.461538            0.000000
      V1                  0.076923            0.000000
      V2                  0.076923            0.000000

      ROW  SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      R1)          0.000000            0.923077
      DMUA)        0.076923            0.000000
      DMUB)        1.230769            0.000000
      DMUC)        0.461538            0.000000
      DMUD)        0.000000            0.246154
      DMUE)        0.000000            0.769231
      DMUF)        0.230769            0.000000
      DMUG)        0.076923            0.000000
      DMUH)        0.307692            0.000000
      DMUI)        0.769231            0.000000
!-----

```

Tuloksista nähdään, että kauppa A ei ole tehokas, $\theta = 0.923$ ja slack-muuttujien arvoista nähdään, että mahdollinen referenssijoukko on kaupat D ja E (vielä pitää tarkistaa niiden CCR-tehokkuus). Ratkaisemalla kaikki vastaavat LP-mallit LINDO:lla saadaan seuraava taulukko

<i>DMU</i>	θ^*	vertaisryhmä
<i>A</i>	0.9230769	<i>D, E</i>
<i>B</i>	0.6153846	<i>D, G</i>
<i>C*</i>	1.0000000	<i>G</i>
<i>D*</i>	1.0000000	<i>G</i>
<i>E*</i>	1.0000000	<i>D</i>
<i>F</i>	0.8888889	<i>D, G</i>
<i>G*</i>	1.0000000	<i>D</i>
<i>H</i>	0.7619048	<i>D, G</i>
<i>I</i>	0.7272727	<i>D, G</i>

* = CCR-tehokas

Kun taulukkoa vertaa kuvaan 2.18 huomaa että taulukon antama kuva tilanteesta on hyvin samanlainen kuin kuvan antama. CCR-tehokkaat kaupat muodostavat kuvan tehokkaan rintaman. Kaupat *A* ja *F* eivät ole kaukana tehokkaasta ja kaikkein tehottomin on *B*. Myös vertaisryhmät tuntuvat kuvasta katsottuina luontevilta.

2.10.3 CCR-mallin duaali

Matriisimuotoisen CCR-mallin

$$(2.18) \quad (LP_o) \max \quad \mathbf{u}^\top \mathbf{y}_o$$

$$(2.19) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{v}^\top \mathbf{x}_o = 1$$

$$(2.20) \quad -\mathbf{v}^\top \mathbf{X} + \mathbf{u}^\top \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.$$

duaalimalli on

$$(2.21) \quad (DLP_o) \min \quad \theta$$

$$(2.22) \quad \text{subject to} \quad \theta \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq \mathbf{0}$$

$$(2.23) \quad \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}.$$

Se, että mallit muodostavat primaali-duaali -parin, on ilmeistä vasta numeerisen esimerkin jälkeen.

Esimerkki 2.10.4 Esimerkin (2.10.1) neljän yrityksen panos ja tuotomatriisit olivat

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 13 \\ 14 & 15 & 12 & 30 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 9 & 12 \\ 16 & 10 & 13 & 20 \end{pmatrix}$$

CCR-mallin matriisimuoto (2.18)–(2.20) saa nyt siis DMU_1 :n osalta muodon

$$(2.24) \quad (LP_o) \max \quad (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$(2.25) \quad \text{subject to} \quad (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = 1$$

$$(2.26) \quad - (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 13 \\ 14 & 15 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(2.27) \quad + (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 9 & 12 \\ 16 & 10 & 13 & 20 \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}.$$

joka on yhtäpitävä seuraavan LP-mallin kanssa

$$\begin{array}{rll} (LP_o) \max & & 9u_1 + 4u_2 + 16u_3 \\ \text{subject to} & 5v_1 + 14v_2 & \leq 1 \\ & - 5v_1 - 14v_2 + 9u_1 + 4u_2 + 16u_3 & \leq 0 \\ & - 8v_1 - 15v_2 + 5u_1 + 7u_2 + 10u_3 & \leq 0 \\ & - 7v_1 - 12v_2 + 4u_1 + 9u_2 + 13u_3 & \leq 0 \\ & - 13v_1 - 30v_2 + 6u_1 + 12u_2 + 20u_3 & \leq 0 \end{array}$$

Tämän mallin duaalimalli on

$$\begin{array}{rll} (DLP_o) \min & \theta & \\ \text{subject to} & 5\theta - 5\lambda_1 - 8\lambda_2 - 7\lambda_3 - 13\lambda_4 & \geq 0 \\ & 14\theta - 14\lambda_1 - 15\lambda_2 - 12\lambda_3 - 30\lambda_4 & \geq 0 \\ & + 9\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + 6\lambda_4 & \geq 9 \\ & + 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 9\lambda_3 + 12\lambda_4 & \geq 4 \\ & + 16\lambda_1 + 10\lambda_2 + 13\lambda_3 + 20\lambda_4 & \geq 16 \end{array}$$

Duaalimallin kaksi ensimmäistä rajoitetta voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\begin{aligned} \theta \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 13 \\ 14 & 15 & 12 & 30 \end{pmatrix} \lambda &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \theta \mathbf{x}_o - \mathbf{X} \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Duaalimallin kolme viimeistä rajoitetta voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 9 & 12 \\ 16 & 10 & 13 & 20 \end{pmatrix} \lambda &\geq \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \mathbf{Y} \lambda &\geq \mathbf{y}_o \end{aligned}$$

Siis LP-malli (2.21)–(2.23) on LP-mallin (2.18)–(2.20) duaali.

Jatkamme esimerkkiä ja etsimme duaalille tulkinnan. Olettakaamme, että sijoittaja aikoo ostaa osia yrityksistä $DMU_1 - DMU_4$. Sijoittaja ostaa osuuden λ_j yrityksestä DMU_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Silloin sijoittajan omistukseen tulevan virtuaalisen yksikön panos ja tuotosvektorit ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{virt} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}\lambda \\ \mathbf{x}_{virt} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\lambda \end{aligned}$$

Nyt sijoittaja haluaa löytää sellaiset osuuskertoimet λ_j , että virtuaaliyksikön tuotos on vähintään \mathbf{y}_o ja virtuaaliyksikön panoskulutus on vähemmän kuin \mathbf{x}_o . Koska sijoittaja haluaa syntyvästä virtuaaliyksiköstä mahdollisimman tehokasta, hän ratkaisee optimointitehtävän

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x}_{virt} = \mathbf{X}\lambda \leq \theta \mathbf{x}_o \\ & \mathbf{y}_{virt} = \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o \\ & \lambda \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

joka on sama kuin duaalimalli (2.21)–(2.23).

Koska primaalin ja duaalin tavoitefunktiot saavat optimissa samat arvot, antaa alkuperäinen CCR-malli ja sen duaali DMU :lle samat tehokkuusarvot. Duaalimallin kertoimet λ_j antavat kertoimet lineaarikombinaatiolle

$$DMU_{virt} = \sum_{j=1}^n \lambda_j DMU_j$$

joka tuottaa yhtä paljon kuin DMU_o , mutta mahdollisimman pienin panoksin. Aina ei tarvitse edes ratkaista duaalimallia erikseen, sillä duaalimallin päätösmuuttujien arvot (λ_j :t) saadaan primaalin varjohinnoista!

Duaalimalli sopii hyvin tilanteisiin, joissa on realistista korvata tehoton DMU_o muiden lineaarikombinaatiolla. Aina ei ole mahdollista toimia näin.

Esimerkki 2.10.5 (1) Jos DMU :t ovat keskussairaalan osastoja ja gerontologian asasto on havaittu tehottomaksi, niin ei ole järkevää jakaa osaston potilaita synnytys-, syöpä- ja sisätautiosastoille mallin antaman lineaarikombinaation mukaisesti.

(2) Jos DMU :t ovat autotehtaan alihankkijoita, niin on aivan realistista korvata tehoton alihankkija muiden lineaarikombinaatiolla.

2.10.4 Kaksivaiheinen CCR-analyysi

Tähän asti esitellyn DEA-analyysin suurin heikkous on oletus kaiken datan positiivisuudesta. Käytännössä joudutaan melkein aina tilanteeseen, jossa jonkin DMU :n jokin panos- tai tuotos-komponentti saa arvon 0. Silloin CCR-tehokkuuden määritelmä kaipaa vahvistusta.

Yksikön DMU_o tehokkuusanalyysi tehdään nyt kaksivaiheisesti seuraavalla tavalla:

CCR-I vaihe: Ratkaistaan normaali CCR duaalimalli (DLP_o), josta saadaan tavoitefunktion optimiarvo θ^* . Tätä lukua voidaan kutsua ”Farrell tehokkuudeksi”.

CCR-II vaihe: Kiinnitetään arvo θ^* ja ratkaistaan optimointitehtävä

$$(2.28) \quad \max \quad \omega = \sigma_1 + \dots + \sigma_m + \delta_1 + \dots + \delta_s$$

$$(2.29) \quad \text{subject to} \quad \sigma = \theta^* \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda$$

$$(2.30) \quad \delta = \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{y}_o$$

$$(2.31) \quad \lambda \geq \mathbf{0}, \sigma \geq \mathbf{0}, \delta \geq \mathbf{0},$$

missä $\sigma_1, \dots, \sigma_m, \delta_1, \dots, \delta_s$ ovat CCR duaalimallin pelivaramuuttujat.

Määritelmä 2.10.2 *Jos edellä kuvatun kaksivaiheisen optimointitehtävän optimiratkaisu on $\theta^* = 1$, $\sigma_i = 0, i = 1..m$, $\delta_j = 0, j = 1..s$, niin DMU_o on CCR-tehokas.*

Voidaan osoittaa, että CCR-tehokas DMU_o on Pareto-optimaalinen siinä mielessä, että vaihtamalla DMU_o toiseen yksikköön DMU_k , emme voi parantaa mitään panos- tai tuotos-komponenttia ilman, että jokin muu panos- tai tuotos-komponentti samalla huononee.

2.10.5 BCC-malli

Edellä kuvatun CCR duaalimallin käyttö voi olla ongelmallista, jos yksiköt ovat hyvin erikokoisia.

Esimerkki 2.10.6 Sijoittaja omistaa suuren mutta tehottoman yrityksen DMU_o ja haluaa myydä sen ja sijoittaa rahansa tehokkaampaan lineaarikombinaatioon. CCR duaalimalli antaa selvän sijoitussuosituksen. Olkoon tässä duaalimallin ratkaisussa pienen, mutta hyvin tehokkaan yrityksen DMU_k painokerroin $\lambda_k = 5$. Silloin sijoittajan pitäisi siis ostaa tämä yritys viiteen kertaan!? Virtuaaliyksikköä ei tällä kertaa voi ottaa todesta.

Edellä kuvatut ongelmat voidaan kieltää lisäämällä CCR duaalimalliin lisärajoite

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Näin saadaan BCC malli (Banker, Charnes ja Cooper (1984)). Mallin perusmuoto on

$$\begin{aligned} (2.32) \quad & \min \quad \theta_B \\ (2.33) \quad & \text{subject to} \quad \theta_B \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq \mathbf{0} \\ (2.34) \quad & \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o \\ (2.35) \quad & \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \\ & \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

BCC mallin duaali on

$$\begin{aligned} (2.36) \quad & \max \quad z = \mathbf{u}\mathbf{y}_o - u_0 \\ (2.37) \quad & \text{subject to} \quad \mathbf{v}\mathbf{x}_o = 1 \\ (2.38) \quad & -\mathbf{v}\mathbf{x}_j + \mathbf{u}\mathbf{y}_j - u_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ (2.39) \quad & \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, u_0 \text{ vapaa!} \end{aligned}$$

ja vastaava suhdemuoto on

$$\begin{aligned} (2.40) \quad & \max \quad \frac{\mathbf{u}\mathbf{y}_o - u_0}{\mathbf{v}\mathbf{x}_o} \\ (2.41) \quad & \text{subject to} \quad \frac{\mathbf{u}\mathbf{y}_j - u_0}{\mathbf{v}\mathbf{x}_j}, \quad j = 1, \dots, n \\ (2.42) \quad & \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, u_0 \text{ vapaa!} \end{aligned}$$

BCC-mallin avulla voidaan määrittellä BCC-tehokkuuden käsite vastaavasti kuin edellä. Emme nyt kuitenkaan enää jatka aihetta, vaan kiinnostunut lukija löytää lisää tietoa esimerkiksi kirjasta: **Cooper, Seiford & Tone (2000)**. ”*Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*”, Kluwer Academic Publishers.)

Ennen kuin suljemme tämän luvun, tarkistamme vielä harjoituksen vuoksi, että edellä esitetyt BCC-malli ja sen duaali todella ovat toistensa duaaleja. Kirjoitamme mallit vielä kerran hieman muunnettuina.

$$\begin{aligned} (2.43) \quad & (BCC_o) \min \quad \theta_B \\ (2.44) \quad & \text{subject to} \quad \theta_B \mathbf{x}_o - \mathbf{X}\lambda \geq \mathbf{0} \\ (2.45) \quad & \mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_o \end{aligned}$$

$$(2.46) \quad -\lambda_1 - \dots - \lambda_n \geq -1$$

$$(2.47) \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n \geq 1$$

$$\lambda \geq \mathbf{0}$$

$$(2.48) \quad (DBCC_o) \max \quad z = \mathbf{u}\mathbf{y}_o - u_0^+ + u_0^-$$

$$(2.49) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{v}\mathbf{x}_o \leq 1$$

$$(2.50) \quad -\mathbf{v}\mathbf{x}_j + \mathbf{u}\mathbf{y}_j - u_0^+ + u_0^- \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(2.51) \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, u_0^+ \geq 0, u_0^- \geq 0$$

Kirjoitetaan mallit auki, kun

$$\mathbf{X} = (2 \quad 3 \quad 4), \quad \text{ja} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} (BCC_o) \min & \theta_B & & \\ \text{subject to} & 2\theta_B & - & 2\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & - & 4\lambda_3 & \geq & 0 \\ & & & 5\lambda_1 & + & 6\lambda_2 & + & 7\lambda_3 & \geq & 5 \\ & & & 7\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & \geq & 8 \\ & & & - & \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & \geq & -1 \\ & & & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & \geq & 1 \end{array}$$

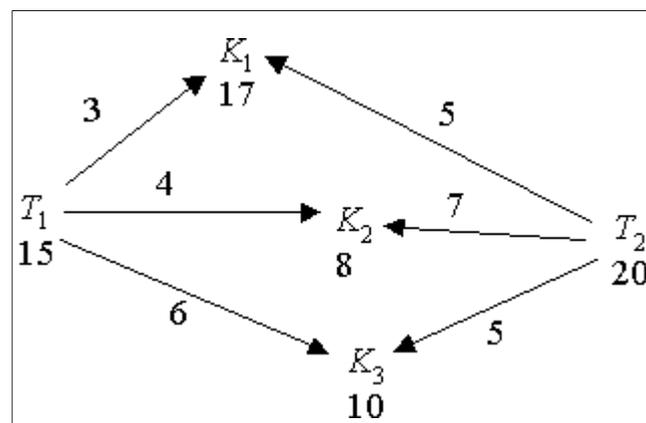
$$\begin{array}{rcll} (DBCC_o) \max & & 5u_1 & + & 8u_2 & - & u_0^+ & + & u_0^- & & \\ \text{subject to} & 2v_1 & & & & & & & & \leq & 1 \\ & - & 2v_1 & + & 5u_1 & + & 8u_2 & - & u_0^+ & + & u_0^- & \leq & 0 \\ & - & 3v_1 & + & 6u_1 & + & 9u_2 & - & u_0^+ & + & u_0^- & \leq & 0 \\ & - & 4v_1 & + & 7u_1 & + & 10u_2 & - & u_0^+ & + & u_0^- & \leq & 0 \end{array}$$

Nyt on selvää, että mallit ovat toistensa duaalit.

3. Kuljetus- ja kohdistusongelmat

3.1 Tasapainoinen kuljetusongelma LP-ongelmana

Esimerkki 3.1.1 Mainio Oy:llä on kaksi tuotantolaitosta, T_1 ja T_2 . Tuotantolaitos T_1 pystyy tuottamaan 15 tuhatta jogurttiannosta päivässä ja tuotantolaitos T_2 pystyy tuottamaan 20 tuhatta jogurttiannosta päivässä. Pääosa jogurtteja ostavista asiakkaista asuu kolmessa kaupungissa K_1 , K_2 ja K_3 . Kaupunkikohtaiset keskimääräiset kysynät (1000 annosta) ja kuljetuskustannukset (€ / 1000 annosta) on esitetty seuraavassa kuvassa.



Miten tehtaiden tuotanto pitää jakaa asiakkaille, jotta kuljetuskustannukset olisivat mahdollisimman pienet?

Esimerkin kuljetusongelma on tasapainossa, koska kysyntä ja tarjonta ovat yhtäsuuret. Jos kuljetustehtävän lähteitä (tarjonta, supply) ja kohteita (kysyntä, demand) on monta, tulee ongelman esittäminen kuvana hankalaksi. Vakiintunut tapa esittää tarvittavat asiat on seuraava taulukko

	K1	K2	K3	
T1	x_{11} 3	x_{12} 4	x_{13} 6	15
T2	x_{21} 5	x_{22} 7	x_{23} 5	20
	17	8	10	

missä x_{ij} merkitsee tuotantolaitoksesta i kaupunkiin j kuljetettua määrää. Eräs ratkaisu on

	K1	K2	K3	
T1	15 3	4	6	15
T2	2 5	8 7	10 5	20
	17	8	10	

mutta tämä ei ole optimiratkaisu. Esimerkin kuljetusongelma voidaan ratkaista ratkaisemalla seuraava lp-ongelma:

$$\begin{array}{rcl}
 \min z = & 3x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 5x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} & \\
 \text{ehdoin} & x_{11} + x_{12} + x_{13} & = 15 \\
 & & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\
 & x_{11} & + x_{21} = 17 \\
 & & x_{12} + x_{22} = 8 \\
 & & x_{13} + x_{23} = 10 \\
 & & x_{ij} \geq 0
 \end{array}$$

Haluamme nyt muotoilla tasapainossa olevan taulukkomuodossa esitetyn kuljetusongelman optimaalisuusehdon. Tarkastelemme tätä varten yleistä tasapainossa olevaa

kuljetusongelmaa.

	K1	K2	...	Kn	
T1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	s_1
T2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	s_2
	:	:		:	:
Tm	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	s_m
	d_1	d_2	...	d_n	

jolloin vastaava lp-malli saa muodon

$$(3.1) \quad \min \quad z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$(3.2) \quad \text{ehdoin} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad (i = 1, \dots, m) \text{ tarjontarajoite}$$

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad (j = 1, \dots, n) \text{ kysyntärajoite}$$

$$(3.4) \quad x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$$

Koska kuljetusongelma on tasapainossa eli

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

voimme eliminoida yhden rajoiteyhtälöstä (3.2). Normaalisti eliminoidaan ylin tarjontarajoite. Kuljetusmallissa on siten $m \times n$ päätösmuuttujaa ja $m + n - 1$ rajoiteyhtälöä. Mallin kantaratkaisuun liittyy siis $m + n - 1$ kantamuuttujaa, jotka saavat nollasta poikkeavan arvon ja muut muuttujat saavat arvon 0. Edellä esitetty ratkaisu on esimerkkiongelman kantaratkaisu, mutta ei sen optimaalinen kantaratkaisu.

Kantaratkaisun optimaalisuus riippuu viimeisen simplex-aulun 0-rivin kertoimista.

$$(3.5) \quad c_{ij}^* = \pi \mathbf{a}_{\bullet j} - c_{ij}$$

Koska varjohintamatriisissa π on yhtä monta elementtiä, kuin mallissamme on rajoitteita, voimme merkitä

$$\pi = (0 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_m \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n)$$

Koska jokainen x_{ij} esiintyy tarjontarajoitteessa i ja kysyntärajoitteessa j , saa yhtälö (3.5) muodon

$$c_{ij}^* = u_i + v_j - c_{ij}$$

missä $u_1 = 0$. Pian havaitsemme, että lukujen u_i ja v_j keksiminen on tavattoman helppoa.

Simplex-algoritmin mukaiset keskeiset ideat on nyt todettu. Seuraavaksi tarkastelemme uudelleen esimerkkiä 3.1.1. Taulusta näemme välittömästi, että se esittää käypää ratkaisua. Lisäksi ratkaisu on kantaratkaisu, koska siinä on $3+2-1$ nollasta poikkeavaa muuttujaa.

	K1	K2	K3	
T1	3	4	6	15
T2	5	7	5	20
	2	8	10	17
	17	8	10	

Selvittääksemme ratkaisun optimaalisuuden laskemme kertoimet c_{ij}^* . Kantamuuttujille $c_{ij}^* = 0$, joten saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} c_{11}^* = 0 \\ c_{21}^* = 0 \\ c_{22}^* = 0 \\ c_{23}^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 - c_{11} = 0 \\ u_2 + v_1 - c_{21} = 0 \\ u_2 + v_2 - c_{22} = 0 \\ u_2 + v_3 - c_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 3 \\ u_2 + v_1 = 5 \\ u_2 + v_2 = 7 \\ u_2 + v_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ v_1 = 3 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = 3 \end{cases}$$

Kantaan kuulumattomille muuttujille saamme

$$\begin{cases} c_{12}^* = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 5 - 4 = 1 \\ c_{13}^* = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 3 - 6 = -3 \end{cases}$$

Koska $c_{12}^* > 0$, ei ratkaisu ole optimaalinen, vaan tavoitefunktion arvo paranee, kun x_{12} tuodaan kantaan. (Huomaa, että merkkisääntö on nyt toisinpäin kuin aiemmin, koska kuljetusongelma on minimointiongelma, kun taas aikaisemmin simplex-algoritmin kohdalla keskityimme maksimointiongelmiin!

Muuttujan x_{12} tuominen kantaan tarkoittaa sitä, että sen arvoa suurennetaan ($0 \rightarrow \Delta$). Kun yhtä muuttujan arvoa suurennetaan, täytyy rivi- ja sarakesummien säilyä, joten x_{11} pienenee, x_{21} suurenee ja x_{22} pienenee vastaavan määrän. Saamme taulun

	K1	K2	K3	
T1	3	4	6	15
T2	5	7	5	20
	2	8	10	17
	17	8	10	

Kun x_{12} suurenee, niin x_{11} ja x_{22} pienenevät. Kun $\Delta = x_{12} = 8$, niin $x_{22} = 0$, eli muuttuja x_{22} poistui kannasta ja x_{12} tuli kantaan. Uusi kantaratkaisu on

	K1	K2	K3	
T1	7	8	10	15
T2	10	10	10	20
	17	8	10	

Tutkimme seuraavaksi ratkaisun optimaalisuuden. Yhtälöryhmien sijasta sijoitamme luvut u_i ja v_j taulun rivi- ja sarakeotsikoihin ja kertoimet c_{ij}^* sijoitamme tauluun kertoimien c_{ij} alle.

	$v_1=3$	$v_2=4$	$v_3=3$	
$u_1=0$	3	4	6	15
$u_2=2$	5	7	5	20
	17	8	10	

Koska kummallekin kantaan kuulumattomalle muuttujalle c_{ij}^* on negatiivinen, ei niitä kannata enää tuoda kantaan, ja olemme löytäneet optimaalisen kantaratkaisun.

3.2 Kuljetusalgoritmi

Ennen kuljetusalgoritmin täsmällisempää kuvausta, annamme algoritmista karkean kuvauksen ja pohdimme muutamaa siihen liittyvää kysymystä.

Simplex-algoritmin mukaisesti ja edellisen esimerkin ohjaamina lausumme karkean algoritmin seuraavasti.

1. Muodosta ensimmäinen käypä kantaratkaisu.
2. Tutki optimaalisuus. Jos ratkaisu on optimaalinen, lopeta.
3. Valitse kantaan tuotava muuttuja.
4. Muuta kantaa. Palaa kohtaan 2.

3.2.1 Kuljetusongelman tasapainottaminen

Edellä kuvattu menetelmä perustui siihen, että kuljetusongelma oli tasapainossa. Jos alkuperäinen kuljetusongelma ei ole tasapainossa, se pitää ensin tasapainottaa.

Tapaus, jossa tarjonta ylittää kysynnän.

Korjataan ongelmaa siten, että muodostetaan uusi kohde (hukka, dummy), joka kattaa ylimääräisen tarjonnan. Kustannukset kaikista lähteistä uuteen kohteeseen ovat yleensä 0.

Tapaus, jossa kysyntä on suurempi kuin tarjonta.

Luodaan uusi lähde (dummy, puute), joka toimittaa ”ei-oota”. Puutelähteen tarjonta asetetaan siten, että kokonaistarjonta ja kysyntä tulee tasapainoon. Kustannukset puutelähteestä kohteisiin asetetaan vastaamaan puutteesta aiheutuvaa haittaa tai sakkoa (penalty).

3.2.2 Luoteisnurkkametodi

Ensimmäisen käyvän kantaratkaisun muodostaminen kuljetusongelmalle on helppoa seuraavalla tavalla (northwest corner method).

1. Sijoita vasemmalla ylhäällä olevaan vapaaseen ruutuun niin suuri luku, kuin rivin ja sarakesumma sallivat.

2. Vähennä luku rivi- ja sarakesummista. Jos rivisumma meni nolllaksi, merkitse rivi käytetyksi (riville ei saa enää merkitä lisää lukuja). Jos sarakesumma meni nolllaksi, merkitse sarake käytetyksi (sarakkeelle ei saa enää merkitä lisää lukuja).
3. Jos vielä on vapaita ruutuja, palaa kohtaan 1.

Seuraavassa esimerkissä on jätetty c_{ij} -kertoimet pois, koska niitä ei menetelmässä käytetä.

				5
				2
				3
2	4	2	2	

2				5
-				2
-				3
2	4	2	2	

2	3	-	-	5
-				2
-				3
2	4	2	2	

2	3	-	-	5
-	1			2
-	-			3
2	4	2	2	

2	3	-	-	5
-	1	1	-	2
-	-			3
2	4	2	2	

2	3	-	-	5
-	1	1	-	2
-	-	1		3
2	4	2	2	

2	3	-	-	5
-	1	1	-	2
-	-	1	2	3
2	4	2	2	

Yllä esimerkki on suoritettu selvyyden vuoksi erillisille tauluille, mutta käsin taulua rakennettaessa ei ole mitään syytä tehdä montaa taulua, vaan ratkaisu rakennetaan yhteen tauluun.

Koska jokainen tauluun sijoitettu luku poistaa yhden rivin tai sarakkeen ja viimeinen sijoitettu luku poistaa sekä rivin, että sarakkeen, tulee tauluun korkeintaan $m+n-1$ lukua. Saamme siis kantaratkaisun. On mahdollista, että lukuja tulee tauluun jopa vähemmän. Silloin jokin kantamuuttujista saa arvon nolla ja ongelmalle on useita optimiratkaisuja.

Koska luoteisnurkka-menetelmässä ei lainkaan käytetä tavoitefunktion kertoimia c_{ij} , voi saatu ratkaisu olla erittäin huono. On kehitetty erilaisia menetelmiä, joissa konstruktion aikana suositaan ruutuja, joissa c_{ij} on pieni ja vältellään niitä ruutuja, joissa c_{ij} on suuri. Tyydymme seuraavassa luoteisnurkka-menetelmään.

3.2.3 Silmukan yksikäsitteisyys

Kun edeltävän esimerkin taulussa tuotiin uusi muuttuja kantaan, jouduttiin muuttamaan usean ruudun sisältöä. Tällaisessa tilanteessa ruudut, joiden sisältö muuttuu, muodostavat silmukan seuraavassa mielessä. *Silmukka* on taulun ruuduista muodostettu rengas, joka toteuttaa seuraavat ehdot

1. Kaksi peräkkäistä ruutua ovat samalla rivillä tai samassa sarakkeessa,
2. mitkään kolme peräkkäistä ruutua eivät ole samalla rivillä tai sarakkeessa

Silmukan avulla voidaan menetellä siten, että lisätään joka toiseen ruutuun $+d$ ja joka toiseen ruutuun $-d$. Silloin määritelmän mukaan rivi- ja sarakesummat eivät muutu. Uuden muuttujan tuominen kantaan edellyttää siis, että löydämme silmukan, joka kulkee kantaruutujen ja kantaan tuotavan ruudun muodostamassa alueessa. Kun vuorotellen lisäämme ja vähennämme saman vakion silmukan ruutuihin, saamme uuden kantaratkaisun sillä vakion arvolla, jolla yksi vanhoista kantamuuttujista menee nolllaksi.

Menetelmän toimivuuden kannalta keskeistä on, että tarvittava silmukka aina löytyy, ja niitä on olemassa vain yksi.

3.2.4 Algoritmi

1. Jos kysyntä ja tarjonta eivät ole tasapainossa, niin tasapainota ongelma.
2. Muodosta käypä alkuratkaisu. (Esimerkiksi luoteisnurkkamenetelmällä.)
3. Kantamuuttujien ($x_{ij} \neq 0$) osalta muodosta yhtälöt

$$x_{ij} \in \mathbf{BV}: \quad c_{ij} = u_i + v_j$$

Aseta $u_1 = 0$ ja ratkaise saadusta yhtälöryhmästä apumuuttujien u_i ja v_j arvot.

4. Kantaan kuulumattomien muuttujien ($x_{ij} = 0$) osalta laske kertoimet c_{ij}^*

$$x_{ij} \in \mathbf{NBV}: \quad c_{ij}^* = u_i + v_j - c_{ij}$$

5. Mikäli kaikki kertoimet $c_{ij}^* < 0$, ollaan optimissa. Lopeta.
6. Valitse suurinta arvoa c_{ij}^* vastaava muuttuja x_{ij} ja konstruoi sitä ja kantamuuttujia vastaavien ruutujen kautta kulkeva silmukka. Lisää x_{ij} :n arvoa niin paljon kuin se on rivi- ja sarakesummat säilyttäen mahdollista. Pienin silmukan vähenevässä ruudussa oleva luku määrää muutoksen määrän ja on samalla kannasta poistuva muuttuja. Siirry kohtaan 3.

Esimerkki 3.2.1 Powerco Inc.:llä on kolme voimalaitosta, joista se toimittaa sähköä neljään kaupunkiin. voimalaitosten kapasiteetit (milj. kWh), kaupunkien sähkön tarve (milj. kWh) sekä kuljetuskustannukset kustakin voimalaitoksesta kuhunkin kaupunkiin ovat seuraavat:

	C1	C2	C3	C4	supply
P1	8	6	10	9	35
P2	9	12	13	7	50
P3	14	9	16	5	40
demand	45	20	30	30	

Miten tulee mitoittaa eri voimalaitosten eri kaupungeille toimittama sähköenergia, jotta kuljetuskustannukset olisivat mahdollisimman pienet?

Ongelma on tasapainossa. Luoteisnurkkametodi antaa alkuratkaisun

	C1	C2	C3	C4	supply
P1	8 35	6	10	9	35
P2	9 10	12 20	13 20	7	50
P3	14	9	16 10	5 30	40
demand	45	20	30	30	

Kantasoluista saamme

$$\begin{aligned}
 x_{11} : \quad u_1 + v_1 &= 8 & \Rightarrow & \quad u_1 = 0 \\
 x_{21} : \quad u_2 + v_1 &= 9 & \Rightarrow & \quad v_1 = 8 \\
 x_{22} : \quad u_2 + v_2 &= 12 & \Rightarrow & \quad u_2 = 1 \\
 x_{23} : \quad u_2 + v_3 &= 13 & \Rightarrow & \quad v_2 = 11 \\
 x_{33} : \quad u_3 + v_3 &= 16 & \Rightarrow & \quad v_3 = 12 \\
 x_{34} : \quad u_3 + v_4 &= 5 & \Rightarrow & \quad u_3 = 4 \\
 & & & \quad v_4 = 1
 \end{aligned}$$

Nollarivin kertoimet ovat siis

$$\begin{aligned}
 c_{12}^* &= u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 11 - 6 = 5 \\
 c_{13}^* &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 12 - 10 = 2 \\
 c_{14}^* &= u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 9 = -8 \\
 c_{24}^* &= u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 1 - 7 = -5 \\
 c_{31}^* &= u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 8 - 14 = -2 \\
 c_{32}^* &= u_3 + v_2 - c_{32} = 4 + 11 - 9 = 6 \quad (\text{suurin})
 \end{aligned}$$

Kantaan tuleva solu on siis x_{32} . Seuraavassa kuvassa on silmukka ja muuttunut taulu.

	v1=8	v2=11	v3=12	v4=1	supply
u1=0	8 35	6 5	10 2	9 -8	35
u2=1	9 10	12 20-Δ	13 20+Δ	7 -5	50
u3=4	14 -2	9 +Δ	16 10-Δ	5 30	40
demand	45	20	30	30	

	C1	C2	C3	C4	supply		
P1	35	8	6	10	9	35	
P2	10	9	12	30	13	7	50
P3		14	10	16	30	5	40
demand	45	20	30	30			

Seuraavaksi jälleen tutkimme optimaalisuutta laskemalla u :t ja v :t.

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=7$	supply		
$u_1=0$	$35-\Delta$	8	6	10	9	35	
$u_2=1$	$10+\Delta$	9	12	30	13	7	50
$u_3=-2$		14	10	16	30	5	40
demand	45	20	30	30			

	C1	C2	C3	C4	supply		
P1	25	8	10	6	9	35	
P2	20	9	12	30	13	7	50
P3		14	10	16	30	5	40
demand	45	20	30	30			

	$v_1=8$	$v_2=6$	$v_3=12$	$v_4=2$	supply
$u_1=0$	8 $25-\Delta$	6 10	10 $+\Delta$	9 2^*	35
$u_2=1$	9 $20+\Delta$	12 -5	13 $30-\Delta$	7 -4	50
$u_3=3$	14 -3	9 10	16 -1	5 30	40
demand	45	20	30	30	

	C1	C2	C3	C4	supply
P1	8 25	6 10	10 5	9	35
P2	9 45	12	13	7	50
P3	14	9 10	16	5 30	40
demand	45	20	30	30	

	$v_1=6$	$v_2=6$	$v_3=10$	$v_4=2$	supply	
$u_1=0$	8 -2	6 10	10 25	9 -7	35	OPTIMI
$u_2=3$	9 45	12 -3	13 5	7 -2	50	
$u_3=3$	14 -5	9 10	16 -3	5 30	40	
demand	45	20	30	30		

Esimerkki 3.2.2 Toimitamme neljältä tehtaalta tavaraa kolmelle asiakkaalle. Kuljetuskustannukset, viikottaiset tarjonnat ja kysynät ovat seuraavat

$$\begin{array}{lllll}
 c_{11} = 5, & c_{12} = 8, & c_{13} = 3, & s_1 = 50 & d_1 = 80 \\
 c_{21} = 10 & c_{22} = 4, & c_{23} = 11, & s_2 = 80 & d_2 = 50 \\
 c_{31} = 8 & c_{32} = 8, & c_{33} = 12, & s_3 = 30 & d_3 = 100 \\
 c_{41} = 15 & c_{42} = 7, & c_{43} = 2, & s_4 = 40 &
 \end{array}$$

Johtoryhmä on tehnyt päätöksen, ettei tehtaan 3 tuotteita viedä asiakkaalle 1. Lisäksi on päätetty, että asiakas 3 on ”tärkeä” niin, että asiakkaan kolme kysyntä tyydytetään kokonaan. Muodostetaan ensimmäinen kuljetustaulu

	A1	A2	A3	supply
T1	50	8	3	50
T2	30	50	11	80
T3	M	0	30	30
T4	15	7	40	40
dummy	0	0	30	30
demand	80	50	100	

kustannus = 1190 + 30M

Taulu on tasapainotettu lisäämällä Dummy-rivi, jonka tarjonta on 30 yksikköä. Dummy toimittaa nyt ”ei-oota”. Kuljetuskustannukset $c_{31} = M$ ja $c_{53} = M$ on kirjattu Big-M muodossa, koska haluamme varmistaa että optimissa $x_{31} = 0$ ja $x_{53} = 0$ eli tehtaalta 3 ei toimiteta tavaraa asiakkaalle 1 ja että asiakkaalle 3 ei toimiteta ”ei-oota”. Tässä tapauksessa olisi voinut asettaa $c_{31} = 1000$ ja $c_{53} = 1000$, mutta Big-M -menetelmä on ”oikeaoppisempi”.

Alkuratkaisu on saatu luoteisnurkkamenetelmällä. Luoteisnurkkamentelmä johtaa alkuratkaisussa siihen, että $x_{53} = 30$. Pienellä oveluudella löytää helposti luoteisnurkkamentelmän muunnelman, jossa ”vältellään” kiellettyjä soluja. Toisaalta algoritmi tyhjentää kyllä kielletyt solut, joten luoteisnurkkamentelmä kelpaa.

Algoritmi tuottaa seuraavat taulut

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=3$	supply
$u_1=0$	5 50	8 -9	3 0	50
$u_2=5$	10 $30-\Delta$	4 $50+\Delta$	11 -3	80
$u_3=9$	M $14-M$	8 $0-\Delta$	12 $30+\Delta$	30
$u_4=-1$	15 -11	7 -9	2 40	40
$u_5=M-3$ dummy	0 $+\Delta$	0 $M-2$	M $30-\Delta$	30
demand	80	50	100	

kustannus = $1190 + 30M$

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=M+5$	supply
$u_1=0$	5 $50-\Delta$	8 -9	3 $+\Delta$	$M+7$ 50
$u_2=5$	10 30	4 50	11 $M-1$	80
$u_3=-M+7$	M $-2M+12$	8 $-M-2$	12 30	30
$u_4=-M-3$	15 $-M-13$	7 $-M-11$	2 40	40
$u_5=-5$ dummy	0 $0+\Delta$	0 -6	M $30-\Delta$	30
demand	80	50	100	

kustannus = $1190 + 30M$

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=3$	supply
$u_1=0$	5 20	8 -9	3 30	50
$u_2=5$	10 30	4 50	11 -3	80
$u_3=9$	M	8 0	12 30	30
$u_4=-1$	15 -11	7 -9	2 40	40
$u_5=-5$ dummy	0 30	0 -6	M	30
demand	80	50	100	

kustannus = 1130 **OPTIMI**

Saadaan siis ratkaisu, jonka kokonaiskustannus on

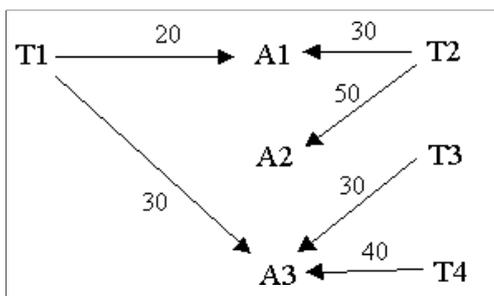
$$20 \cdot 5 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 10 + 50 \cdot 4 + 30 \cdot 12 + 40 \cdot 2 + 30 \cdot 0 = 1130$$

Viimeisessä kuljetustaulussa 0-rivin kerroin $c_{32}^* = 0$, joten tuomalla solu (3,2) kantaan ei kokonaiskustannus parane, muttei huononekaan. Saadaan siis yhtä hyvä ratkaisu

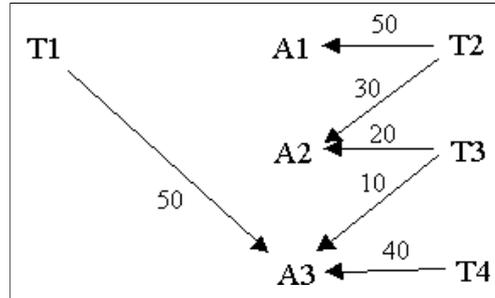
	A1	A2	A3	supply
T1	5	8	3	50
T2	10	4	11	80
T3	M	8	12	30
T4	15	7	2	40
dummy demand	0	0	M	30
demand	80	50	100	

kustannus = 1130 **OPTIMI**

Todelliset kuljetusmäärät ovat



1. ratkaisu



2. ratkaisu

3.3 Kuljetusongelman herkkyysoanalyysi

3.3.1 Kantaan kuulumattoman solun kustannus muuttuu

Oletamme nyt, että solu (p, k) ei kuulu optimikantaan ja kuljetuskustannus c_{pk} muuttuu määrän d eli

$$c_{pk}^{uusi} = c_{pk}^{alkup} + d$$

Suoritamme vanhan kannan optimaalisuustarkistuksen. u :iden ja v :iden laskeminen perustuu kantasolujen kuljetuskustannuksii, joista mikään ei ole muuttunut, joten u :t ja v :t eivät ole muuttuneet. Seuraavaksi laskemme 0-rivin kertoimet $c_{ij}^* = u_i + v_j - c_{ij}$. Ainoa 0-rivin kerroin joka muuttuu on c_{pk}^* ja muutos on

$$c_{pk}^{* uusi} - c_{pk}^{* alkup} = (u_i + v_j - c_{ij}^{uusi}) - (u_i + v_j - c_{ij}^{alkup}) = -d$$

Esimerkki 3.3.1 Tarkastellaan uudelleen edellisen esimerkin 1. ratkaisua.

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=3$	supply
$u_1=0$	5 20	8 -9	3 30	50
$u_2=5$	10 30	4 50	11 -3	80
$u_3=9$	M	8 0	12 30	30
$u_4=-1$	15 -11	7 -9	2 40	40
$u_5=-5$ dummy	0 30	0 -6	M	30
demand	80	50	100	
kustannus = 1130		OPTIMI		

Jos solun $(2, 3)$ kuljetuskustannus pienenee viisi yksikköä, niin solun $(2, 3)$ muuttunut 0-rivin kerroin on

$$c_{23}^* = -3 + 5 = 2 > 0$$

ja vanha kantaratkaisu ei ole enää optimaalinen. Solu $(2, 3)$ tuodaan kantaan (on tehtävä kaksi kierrosta kuljetusalgoritmilla!), jolloin uusi taulu ja sen mukainen ratkaisu

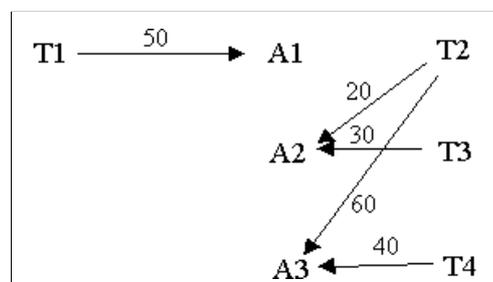
ovat

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=1$	supply
$u_1=0$	5 50	8 -9	3 -2	50
$u_2=5$	10 0	4 $50-\Delta$	6 $30+\Delta$	80
$u_3=11$	M	8 $+\Delta$	12 $30-\Delta$	30
$u_4=1$	15 -9	7 -7	2 40	40
$u_5=-5$ dummy	0 30	0 -6	M	30
demand	80	50	100	

kustannus = 1070

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=1$	supply
$u_1=0$	5 50	8 -9	3 -2	50
$u_2=5$	10 0	20	60	80
$u_3=9$	M	30	-2	30
$u_4=1$	15 -9	7 -7	2 40	40
$u_5=-5$ dummy	0 30	0 -6	M	30
demand	80	50	100	

kustannus = 1010 **OPTIMI**



Voimme hahmottaa seuraavan säännön. Jos kantaan kuulumattoman solun (p, k) kuljetuskustannus vähenee enemmän kuin $|c_{pk}^*|$, niin optimikanta vaihtuu. (huomaa,

että uuden optimin määrittäminen saattaa vaatia useamman askeleen kuljetusalgoritmissa.)

Esimerkki 3.3.2 Jos edellisen esimerkin alkutilanteessa solun (1, 2) kustannus laskee, niin muutoksen tulee olla enemmän kuin 9 ennen, kuin kanta muuttuu. Siis vaikka kuljetus lähteestä 1 kohteeseen 2 saataisiin hoidettua ilmaiseksi, niin kantaa ei kannata vaihtaa!

3.3.2 Kantaan kuuluvan solun kustannus muuttuu

Tarkastellaan edellisten esimerkkien tilannetta, jossa c_{13} saa arvon $3 + d$. Taulun optimaalisuuden testaus saa nyt seuraavan muodon

	$v_1=5$	$v_2=-1$	$v_3=3+d$	supply
$u_1=0$	5 20	8 -9	$3+d$ 30	50
$u_2=5$	10 30	4 50	11 $-3+d$	80
$u_3=9-d$	M	8 -d	12 30	30
$u_4=-1-d$	15 $-11-d$	7 $-9-d$	2 40	40
$u_5=-5$ dummy	0 30	0 -6	M	30
demand	80	50	100	

Vanha kanta on edelleen optimaalinen, jos

$$\begin{cases} -3 + d \leq 0 \\ d \leq 0 \\ -11 - d \leq 0 \\ -9 - d \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -9 \leq d \leq 0$$

3.3.3 Tarjonta tai kysyntä muuttuvat

Koska joudumme aina tasapainottamaan taulun, tapahtuu muutos sekä tarjonnassa että kysynnässä yhtä suurina. (Sivuutamme, nyt tilanteen, jossa dummy-rivi muutetaan dummy-sarakkeeksi tai päinvastoin.)

Jos muutos tapahtuu tarjonnassa s_i ja kysynnässä d_j ja solu (i, j) on optimikannassa eli optimitaulussa on $x_{ij} > 0$, niin lisäämme x_{ij} :n arvoa d :n verran. Näin saamme rivi-

ja sarakesummat täsmäämään eli muutetun ongelman ratkaisun. Koska optimaalisuustarkastelussa ei käytetä päätösmuuttujan arvoja x_{ij} lainkaan, ei kannan optimaalisuus muutu. Kuljetuskustannukset tietenkin kasvavat, koska nyt kuljetetaan enemmän.

Jos optimitaulussa on $x_{ij} = 0$, niin ne tauluun tehtävät muutokset, joilla rivi- ja sarakesummat saadaan täsmäämään, saattavat muuttaa kannan. Tilanne on siis mutkikkaampi ja sivuutamme sen tässä.

3.4 Kohdistusongelma

Kohdistusongelma syntyy, kun tarjonnat ja kysynät ovat ykkösiä. Tyypillinen esimerkki kohdistusongelmasta on seuraava.

Esimerkki 3.4.1 Konepajalla on neljä konetta, joilla se tekee neljä eri työtä. Kukin työ tehdään yhdellä koneella ja työn kustannukset riippuvat valitusta koneesta. Koneet eivät voi tehdä kuin yhden työn. Kustannukset käyvät ilmi seuraavasta taulukosta.

	työ1	työ2	työ3	työ4
kone1	14	5	8	7
kone2	2	12	6	5
kone3	7	8	3	9
kone4	2	4	6	10

Miten työt pitää kohdistaa koneille, jotta kustannukset olisivat minimissä?

Jos laadimme kuljetusalgoritmin mukaisen alkuratkaisun, tulee ensimmäiseen tauluun vain neljä ykköstä. Kuljetusalgoritmi perustuu siihen, että taulussa on $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ nollasta poikkeavaa lukua. Tästä seuraa, että kuljetusalgoritmi ei ole tehokas kohdistusongelman ratkaisemisessa.

Kohdistusongelman ratkaisualgoritmi perustuu seuraaviin ideoihin.

1. Jos taulukoidaan pelkät kustannukset, niin ongelma on ratkaistu kun osaamme poimia taulukosta neljä kustannusta siten, että jokaiselta riviltä poimittiin tasan yksi ja jokaisesta sarakkeesta poimittiin tasan yksi ja poimittujen kustannusten summa on oienin mahdollinen.
2. Jos jonkin rivin tai sarakkeen kaikista kustannuksista vähennetään sama luku, ei optimiratkaisun kanta vaihdu.

Ratkaisualgoritmi (Unkarilainen algoritmi) ($m \times m$ taulu)

1. Etsi jokaiselta riviltä pienin luku. Vähennä se kaikista rivin luvuista. Tee sama sarakkeille.
2. Piirrä pienin mahdollinen määrä vaaka- ja pystysuoria, jotka peittävät kaikki nollat. Jos suoria tuli yhtä monta kuin taulussa on rivejä, voit lukea taulusta optimiratkaisun poimimalla taulusta nollia.
3. Etsi pienin luku, jota ei ole yliviivattu. Vähennä tämä luku jokaisen rivin jokaisesta luvusta. Lisää edellä mainittu luku jokaisen yliviivatun rivin ja sarakkeen jokaiseen lukuun. Huomaa, että lisäys tehdään kaksi kertaa niihin ruutuihin, joissa suorat risteävät. Siirry kohtaan 2.

Esimerkin ?? ratkaisu etenee seuraavin vaihein

14	5	8	7	→	9	0	3	2	→	9	0	3	0	→
2	12	6	5		0	10	4	3		0	10	4	1	
7	8	3	9		4	5	0	6		4	5	0	4	
2	4	6	10		0	2	4	8		0	2	4	6	

9	0	3	0	→	10	0*	4	0
0	10	4	1		0	9	4	0*
4	5	0	4		4	4	0*	3
0	2	4	6		0*	1	4	5

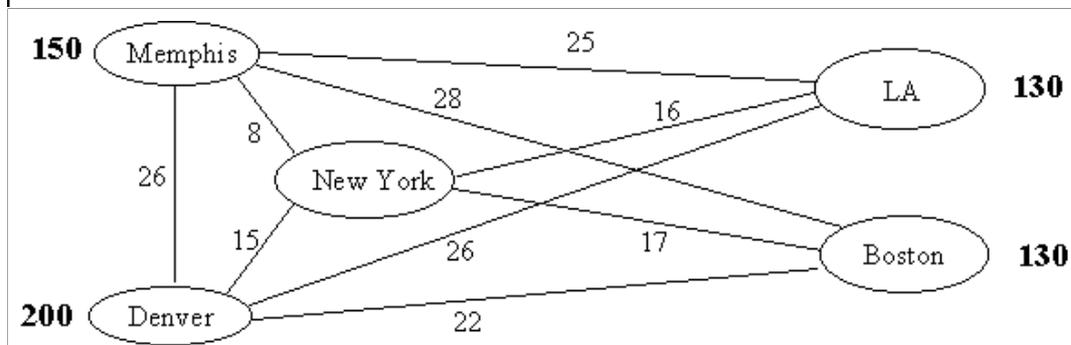
Työnjako luetaan viimeisestä taulusta ja kustannukset ensimmäisestä taulusta!

- Siis kone 1 tekee työn 2 (kustannus = 5)
 kone 2 tekee työn 4 (kustannus = 5)
 kone 3 tekee työn 3 (kustannus = 3)
 kone 4 tekee työn 1 (kustannus = 2)
 (kustannus yhteensä = 15)

3.5 Kauttakuljetusongelma

Seuraava esimerkki alkaa olla jo lähellä verkko-ongelmia, mutta se luokitellaan kuljetusongelmaksi ratkaisutapansa takia.

Esimerkki 3.5.1 Yritys valmistaa tuotteita kahdessa tehtaassa, joista toinen sijaitsee Memphisissä ja toinen Denverissä. Memphisin tehdas tuottaa 150 tuotetta päivässä ja Denverin tehdas tuottaa 200 tuotetta päivässä. Tuotteiden kysyntä on Los Angelesissa 130 tuotetta päivässä ja Bostonissa myös 130 tuotetta päivässä. Tuotteet kuljetetaan lentorahtina joko suoraan tai New Yorkin kautta. Kuljetuskustannukset on merkitty ohaiseen kuvaan.



Määritä halvin tapa kuljettaa tuotteet asiakkaille, kun

- New Yorkin kautta voidaan kuljettaa miten suuria tavaramääriä tahansa.
- New Yorkin kautta voidaan kuljettaa korkeintaan 100 tuotetta päivässä.

Ratkaisu (a): Rakennetaan tasapainoitettu kuljetusongelma, jossa New York on sekä lähde että kohde. Tasapainottaminen vaatii dummy-kohteen, jonka kysyntä on 90. New Yorkin tarjonnaksi ja kysynnäksi asetetaan 350, mikä takaa sen, että tarvittaessa koko kuljetettava määrä voi kulkea New Yorkin kautta. Ensimmäinen käypä ratkaisu on esitetty seuraavassa kuljetustaulussa.

	NY	LA	Boston	Dummy	supply	
Memphis	150	8	25	28	0	150
Denver	110	15	26	22	90	200
New York demand	90	0	130	17	M	350
	350	130	130	90		

Kuljetusalgoritmi johtaa seuraavaan tulokseen

	v1=	v2=	v3=	v4=	
u1=	8	25	28	0	150
u2=	15	26	22	0	200
u3=	0	16	17	M	350
	350	130	130	90	

	v1=	v2=	v3=	v4=	
u1=	8	25	28	0	150
u2=	15	26	22	0	200
u3=	0	16	17	M	350
	350	130	130	90	

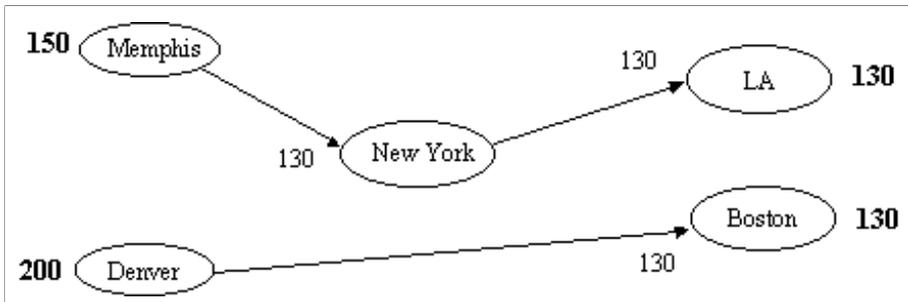
	v1=	v2=	v3=	v4=	
u1=	8	25	28	0	150
u2=	15	26	22	0	200
u3=	0	16	17	M	350
	350	130	130	90	

	NY	v1=8	LA	v2=24	Bo	v3=22	Dum	v4=0	
u1=0 Memphis	130	8	-1	25	-6	28	20	0	150
u2=0 Denver	-7	15	-2	26	130	22	70	0	200
u3=-8 NY	220	0	16	-3	17	M			350
	350	130	130	90					

$z = 5980$ **OPTIMI**

Solun (3,3) kuljetusmäärä $x_{31} = 220$ tulkitaan nyt siten, että New Yorkin kauttakuljetuskapasiteetista jää käyttämättä 220 yksikköä. A-kohdan kuljetusmäärät ovat

siis

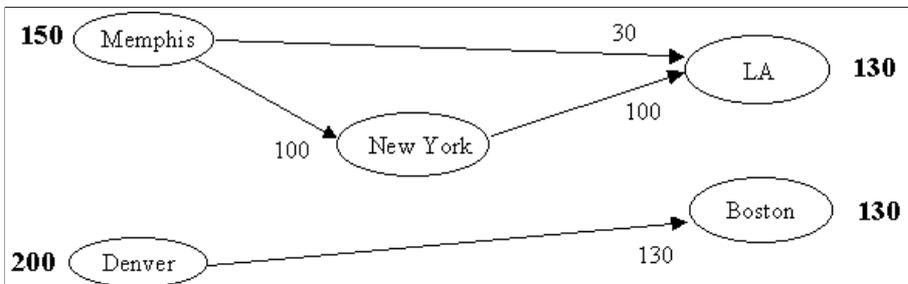


Ratkaisu (b): New Yorkin tarjonnaksi ja kysynnäksi merkitään nyt 100. Edellistä kohtaa mukailleen otamme alkuratkaisuksi

	NY	LA	Boston	Dummy		
Memphis	100	8	25	28	0	150
Denver	15	26	130	22	0	200
NY	0	16	17	M		100
	100	130	130	90		

$z = 6010$

Tämä on optimitaulu joten vastaavat kuljetusmäärät ovat



4. Verkkomallit

Verkkomallit muodostavat esitystapansa mukaan nimetyn ratkaisualgoritmeiltaan kirjavan joukon malleja. Tärkeimmät taloudelliset sovellukset liittyvät projektinhallintaan. Ennen projektinhallintaa esittelemme verkkomallien termistön ja muutaman erilaisen ongelmatyyppin.

4.1 Verkkomallin termit

Verkkomalli koostuu *solmujen* (node) ja *kaarien* (arc) muodostamasta *verkosta* (network). Solmut numeroidaan ja niihin viitataan joko pelkällä numerolla j tai kirjaimella N_j . Kaaren määrää alkusolmu i ja loppusolmu j , ja siihen viitataan lukuparilla (i, j) . Kaari on siis suunnattu, ja se piirretään nuolena. Jos solmujen i ja j välinen yhteys on kaksisuuntainen, piirretään kaksi kaarta (i, j) ja (j, i) tai yksi kaari ilman nuolenkärkeä.

Kun verkko esitetään graafisesti, merkitään kuvaan solmut numeroin, mutta kaaria ei yleensä erikseen merkitä koska se on tarpeetonta. Kaaren viereen yleensä merkitään ongelman kannalta tärkeitä tietoa (esim. kuljetuskustannus tai kapasiteetti). Joissakin ongelmissa on luonnollista nimetä kaaret erikseen. Silloin kaaret nimetään kirjaimin ja solmut numeroin.

Jono kaaria muodostaa *polun* (paht), kun edeltävän kaaren loppusolmu on sama kuin seuraavan kaaren alkusolmu. Kuvan 4.22 verkko sisältää polun $(1,3)-(3,4)-(4,5)$ (eli polun BDE , mutta ei polkua $(1,3)-(3,5)$ eikä polkua $(1,3)-(3,2)$). Vaikka polku muodostuu kaarista, se on yleensä luonteva ilmaista solmujen avulla. Edellä mainittu polku $(1,3)-(3,4)-(4,5)$ on solmujen avulla lausuttuna 1-3-4-5.

Sovelluksesta riippuen kaareen liittyvä tieto on etäisyys, kesto, kustannus tai jokin muu tavoitefunktioon liittyvä tekijä. Jos haluamme puhua yleisesti verkoista, niin val-

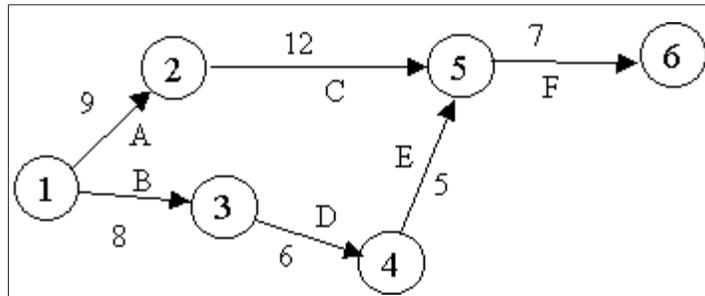


Figure 4.22: Suunnattu verkko

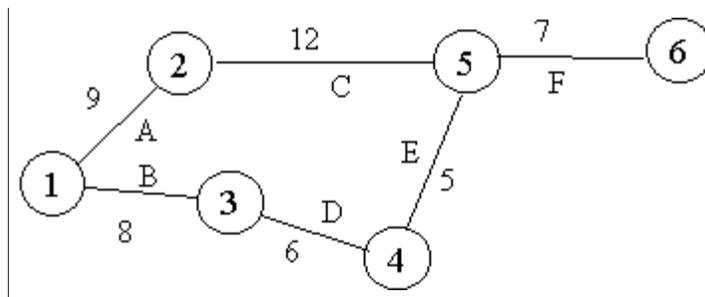


Figure 4.23: Suuntaamaton verkko

itsemme puhetavan, jossa kaareen liittyvä tieto d_{ij} on *kaaren* (i, j) *pituus* tai *solmujen* i ja j *etäisyys*. Voimme siis sanoa, että kuvan 4.22 verkossa lyhin polku alkusolmusta 1 loppusolmuun 6 on $BDEF$, eli 1-3-4-5-6, ja sen pituus on $8 + 6 + 5 + 7 = 26$.

Verkon 4.22 solmujen etäisyydet d_{ij} voidaan esittää etäisyysmatriisina

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & x & x & x \\ x & 0 & x & x & 12 & x \\ x & x & 0 & 6 & x & x \\ x & x & x & 0 & 5 & x \\ x & x & x & x & 0 & 7 \\ x & x & x & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

Puuttuva kaari on edellä esitetty matriisissa x :llä. Käytännön toteutuksessa voidaan asettaa $x = -1$, jos etäisyys ei voi olla negatiivinen (muista ettei ”etäisyys” aina ole etäisyys!)

Jos osa kaarista on kaksisuuntaisia, on myös diagonaalin alapuolella lukuja. Jos kaikki kaaret ovat kaksisuuntaisia, niin etäisyysmatriisi on symmetrinen. Jos verkosta 4.22 poistetaan suuntaus (nuolista kärjet pois), niin saadaan kuvan 4.23 verkko, jonka etäisyysmatriisi saa muodon

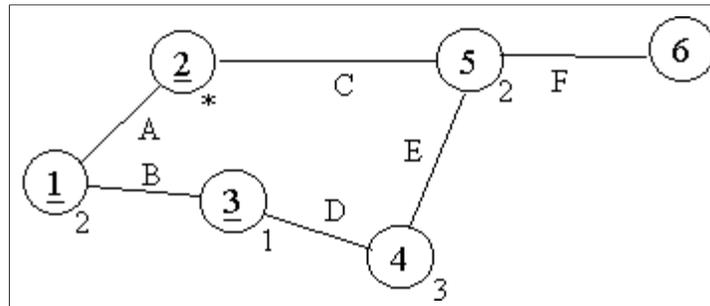


Figure 4.24: Etsitty polku: 2-1-3-4 eli ABD.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & x & x & x \\ 9 & 0 & x & x & 12 & x \\ 8 & x & 0 & 6 & x & x \\ x & x & 6 & 0 & 5 & x \\ x & 12 & x & 5 & 0 & 7 \\ x & x & x & x & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Solmu j on solmun i *naapuri*, jos verkko sisältää kaaren (i, j) . Solmuun j päästään solmusta i (reachable), jos on olemassa polku, jonka alkusolmu on i ja loppusolmu on j . Edellä kuvattu polku yhdistää solmun i solmuun j . Verkko on *yhtenäinen* (connected) jos kahta solmua aina yhdistää polku (ainakin toiseen suuntaan).

Jos polun loppusolmu on sama kuin sen alkusolmu, niin polku on *silmukka*. Yhtenäistä verkkoa, jossa ei ole silmukoita, sanotaan *puuksi*.

Verkkojen ominaisuuksia tutkiva matematiikan ala on *graafiteoria* (graph theory), jota käsitellään enemmän diskreetin matematiikan kursseilla.

Seuraavassa muutama hyödyllinen algoritmi graafisena sekä puolialgoritmina.

Polun etsiminen. Etsitään verkosta, jonka solmut ovat $1, \dots, n$ ja jonka etäisyysmatriisi on $\mathbf{D} = (d_{ij})$, polku solmusta (p) solmuun (q) .

Tarkastellaan esimerkkinä verkkoa kuvassa 4.23, josta etsimme polkua solmusta (2) solmuun (4). Aloitetaan merkitsemällä alkusolmu (2) indeksillä *. Otetaan seuraavan kaaren alkusolmuksi solmu (2). Merkitään kaikki sen naapurit indeksillä 2 ja alleviivataan solmu (2). Etsitään pienin indeksillä merkitty, mutta alleviivaamaton solmu (tällä kertaa se on solmu (1)). Merkitään kaikki sen indeksillä merkitsemättömät naapurit indeksillä 1 ja alleviivataan solmu (1). Toistetaan menettelyä kunnes loppusolmu (4) tulee merkittyä tai kaikki merkityt solmut ovat alleviivattu. Polku voidaan nyt lukea indekseistä takaperin. (Ks. kuva 4.24.)

Sama menettely puoliohjelmanä:

1. Alkutiedot: alkusolmu (p), loppusolmu (q), etäisyysmatriisi \mathbf{D} .
Apumuuttujat: taulukko \mathbf{M} , johon tehdään indeksimerkinnät. Alussa $M(j) = 0, j = 1, \dots, n$. Osoitinindeksit k, j .
2. Aseta $M(p) = \star$.
3. Toista kunnes $M(q) > 0$ tai kaikki merkityt solmut on alleviivattu:
 - (I) Etsi pienin k , jolle solmu (k) on merkitty mutta alleviivaamaton.
 - (II) For $j = 1$ to n : jos $d_{kj} > 0$ ja $M(j) = 0$, niin aseta $M(j) = k$.
 - (III) Alleviivaa $M(k)$.
4. Jos $M(q) > 0$, niin etsitty polku $s_1-s_2-\dots-s_t$ voidaan lukea takaperin rekursiolla $s_k = M(s_{k+1})$.

Esimerkki 4.1.1 Kun edellinen algoritmi suoritetaan verkon 4.23 solmuja (2) ja (4) yhdistävän polun löytämiseksi, saa M -taulukko seuraavat sisällöt

k	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)
2	2	*	0	0	2	0
1	<u>2</u>	*	1	0	2	0
3	<u>2</u>	*	<u>1</u>	3	2	0

Siis polun solmut takaperin lueteltuina ovat (4)-(3)-(1)-(2)

Esimerkki 4.1.2 Kun edellinen algoritmi suoritetaan verkon 4.22 solmuja (2) ja (4) yhdistävän polun löytämiseksi, saa M -taulukko seuraavat sisällöt

k	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)
2	0	*	0	0	2	0
5	0	*	0	0	<u>2</u>	5
6	0	*	0	0	<u>2</u>	<u>5</u>

Koska solua (4) ei merkitty, ei etsittyä polkua ole olemassa.

Minimivirittävä puu. (Minimum Spanning Tree.) Oletamme seuraavassa, että verkko on suuntaamaton, eli kaaret ovat kaikki kaksisuuntaisia. Eräissä sovelluksissa haluamme yhdistää kaikki verkon solmut yhtenäiseksi aliverkoksi mahdollisimman lyhyellä kaaristolla. Tätä varten määrittelemme, että verkon V virittäjä W on yhtenäinen verkko, jonka solmut ovat täsmälleen samat kuin V :n solmut ja jonka kaaret ovat V :n kaaria. (Toisin sanoen W on saatu aikaan karsimalla osa V :n kaarista pois.) Näistä virittäjistä valitsemme sen, jonka kaarien yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman

pieni. On helppo osoittaa, että tämä minimaalinen virittäjä on puu. Siksi käytämme nimitystä *minimivirittävä puu* (Minimum Spanning Tree).

Algoritmi, jolla minimivirittävä puu konstruoidaan voidaan kuvata sanallisesti seuraavasti. Aloitetaan mistä tahansa solmusta (vaikkapa solmusta (1)). Väritä alkusolmu. Olkoon kaari (i, j) lyhin niistä kaarista, jotka yhdistävät väritetyn solmun värittämättömään solmuun. Liitä kaari (i, j) virittävään puuhun ja väritä kaaren toinen pää. Toista edellä kuvattua askelta kunnes kaikki solmut on väritetty. Kuvassa 4.25 on esimerkki verkosta ja sen minimivirittävästä puusta.

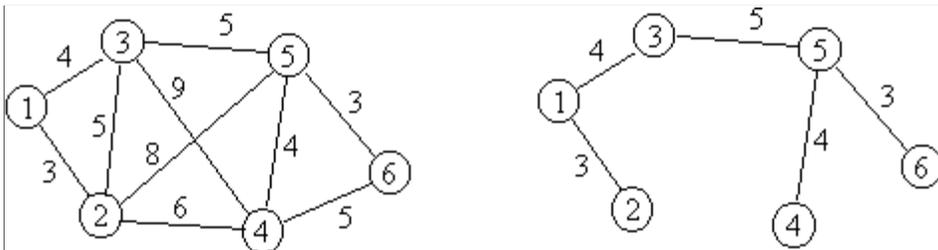


Figure 4.25: Verkko ja sen minimivirittävä puu.

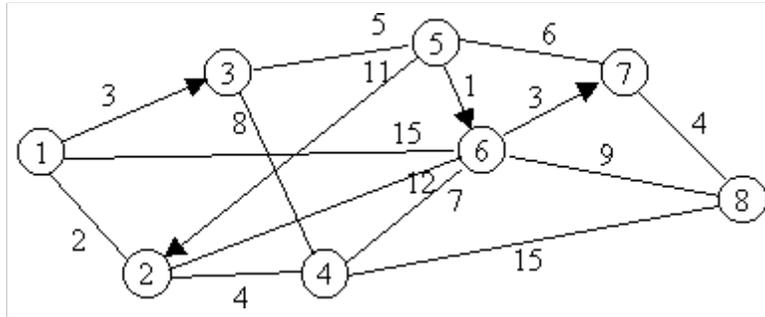


Figure 4.26: Lyhimmän polun ongelma.

4.2 Lyhimmän polun ongelma

Lyhimmän polun ongelma on verkko-ongelmien perusasioita. Dijkstra esitti jo 1959 algoritmin, joka on erittäin tehokas käytännön ongelmissa. Esitämme ensin esimerkkitalannetta käyttäen kuvallisen perustelun algoritmin esitystavalle.

Ihmiselle verkon kuvan värittäminen on helpoin tapa saada ongelma hallintaan, mutta tietokone rakentaa taulukoita. Dijkstran algoritmin vakiintunut esitystapa on syntynyt haettaessa tietokoneen muistin tehokasta käyttötapaa.

Tutkitaan seuraavassa kuvan 4.26 esittämää verkkoa. Etsimme lyhimmän polun solmusta (1) solmuun (8).

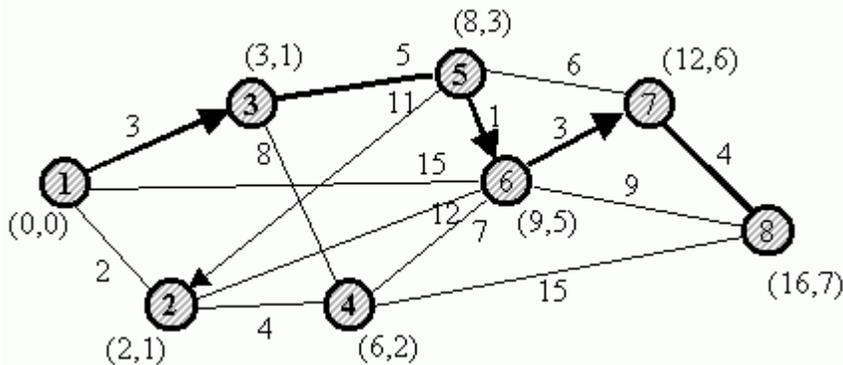
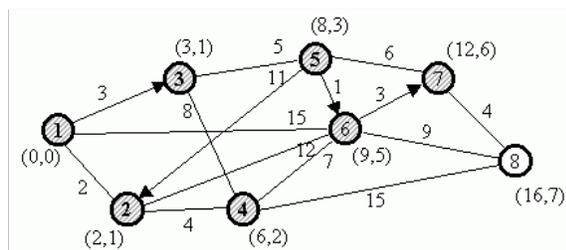
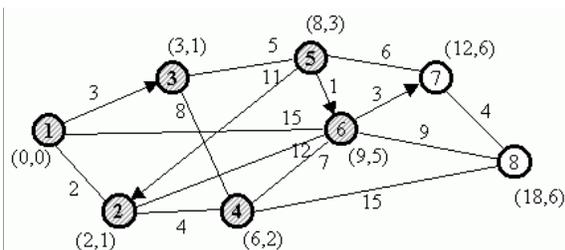
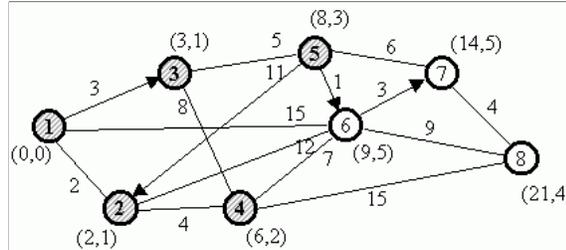
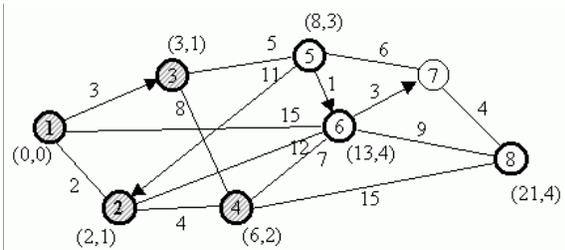
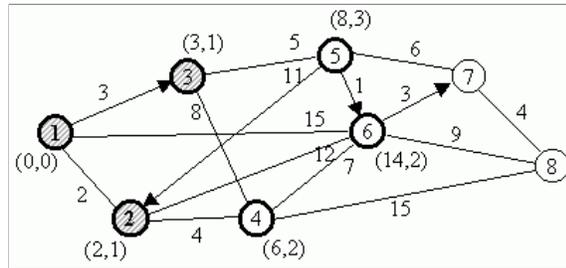
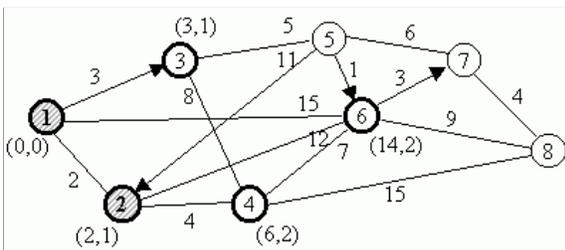
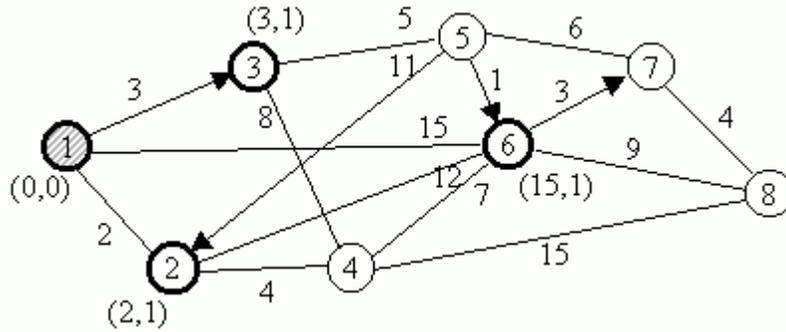
Merkitään $L(j)$:llä solmusta (1) solmuun (j) vievän lyhimmän polun pituutta ja merkitään $E(j)$:llä solmun (j) edeltäjää tällä polulla.

Väritetään alkusolmu (1) ja asetetaan $L(1) = 0$, $E(1) = 0$. Etsitään kaari (i, j) väritetystä solmusta värittämättömään solmuun niin, että luku $L(i) + d_{ij}$ on mahdollisimman pienin. Nyt voimme värittää solun (j) ja asettaa

$$L(j) = L(i) + d_{ij}, \quad \text{ja} \quad E(j) = i.$$

Kaikkia polkuja solmusta (1) solmuun (j) ei toki ole vielä tutkittu, mutta jokainen tutkimaton polku kulkee värittämättömän solmun kautta ja on siis pidempi kuin $L(i) + d_{ij}$. Edellä kuvattua askelta toistetaan, kunnes loppusolmu tulee väritettyä. Tämän

jälkeen lyhin polku $s_1-s_2-\dots-s_t$ voidaan lukea takaperin rekursiolla $s_k = E(s_{k+1})$.



Dijkstran algoritmin kirjanpito esitetään seuraavasti: Jokaiselta algoritmin kier-

rokselta kirjataan taulukko L , johon talletetaan lyhimpien polkujen pituudet. Solmun värittäminen korvataan L -taulukon alkion alleviivaamisella ja edeltäjä ilmaistaan L -taulukon alkion alaindeksinä. L -taulukkoa päivitettäessä riittää tutkia viimeksi väritetystä solusta lähtevät kaaret. Siksi L -taulukon viereen joka kierroksella kirjataan viimeksi väritettyä solmua vastaava etäisyysmatriisin rivi.

Näillä merkinnöillä edellisen esimerkin kulku on

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \infty] \\ d_{1\bullet} = [[0] \quad 2 \quad 3 \quad x \quad x \quad 15 \quad x \quad x] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad 3_1 \quad \infty \quad \infty \quad 15_1 \quad \infty \quad \infty] \\ d_{2\bullet} = [2 \quad [0] \quad x \quad 4 \quad x \quad 12 \quad x \quad x] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad \underline{3}_1 \quad 6_2 \quad \infty \quad 14_2 \quad \infty \quad \infty] \\ d_{3\bullet} = [x \quad x \quad [0] \quad 8 \quad 5 \quad x \quad x \quad x] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad \underline{3}_1 \quad \underline{6}_2 \quad 8_3 \quad 14_2 \quad \infty \quad \infty] \\ d_{4\bullet} = [x \quad 4 \quad 8 \quad [0] \quad x \quad 7 \quad x \quad 15] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad \underline{3}_1 \quad \underline{6}_2 \quad \underline{8}_3 \quad 13_4 \quad \infty \quad 21_4] \\ d_{5\bullet} = [x \quad 11 \quad 5 \quad x \quad [0] \quad 1 \quad 6 \quad x] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad \underline{3}_1 \quad \underline{6}_2 \quad \underline{8}_3 \quad \underline{9}_5 \quad 14_5 \quad 21_4] \\ d_{6\bullet} = [15 \quad 12 \quad x \quad 7 \quad x \quad [0] \quad 3 \quad 9] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad \underline{3}_1 \quad \underline{6}_2 \quad \underline{8}_3 \quad \underline{9}_5 \quad \underline{12}_6 \quad 18_6] \\ d_{7\bullet} = [x \quad x \quad x \quad x \quad 6 \quad x \quad [0] \quad 4] \end{array}$$

$$L = [\underline{0} \quad \underline{2}_1 \quad \underline{3}_1 \quad \underline{6}_2 \quad \underline{8}_3 \quad \underline{9}_5 \quad \underline{12}_6 \quad \underline{16}_7]$$

lyhin polku: (1)-(3)-(5)-(6)-(7)-(8) polun pituus 16

Puoliohjelma:

1. Alkutiedot: alkusolmu (p), loppusolmu (q), etäisyysmatriisi \mathbf{D} .

Apumuuttujat: taulukko \mathbf{L} , johon talletetaan etäisyydet ja taulukko \mathbf{E} , johon talletetaan edeltäjät. Alussa $L(j) = \infty, j = 1, \dots, n$ ja $E(j) = 0, j = 1, \dots, n$.
Osoitinindeksit k, j .

2. Aseta $L(p) = 0, E(p) = 0$, alleviivaa $L(p)$ ja aseta $k = p$.
3. Toista kunnes $L(q)$ on alleviivattu:
 - (I) For $j = 1$ to n

jos $d_{kj} \neq x$ ja $L(k) + d_{kj} < L(j)$, niin

asetta $L(j) = L(k) + d_{kj}$ ja $E(j) = k$.

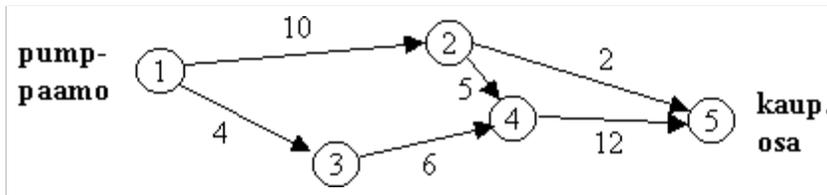
(II) Etsi alleviivaamattomista solmuista se, jolla L on pienin. Aseta löytämäsi solun numero k :n arvoksi.

(III) Alleviivaa $L(k)$.

4. Jos $L(q)$ on alleviivattu, niin etsitty polku $(p)-(s_1)-(s_2)-\dots-(s_t)-(q)$ voidaan lukea takaperin rekursiolla $s_k = E(s_{k+1})$ ja polun pituus on $L(q)$.

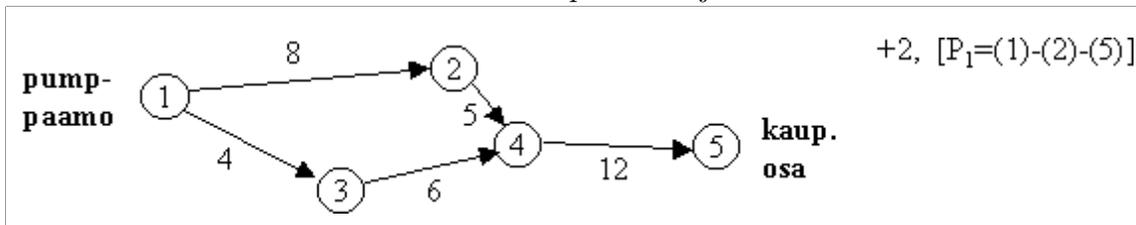
4.3 Maksimivirtauksen ongelma

Esimerkki 4.3.1 (Maximum flow) Kaupunki haluaa siirtää vettä vedenottamolta rakenteilla olevaan kaupunginosaan. Vesijohtoverkosto on rakennettu useassa vaiheessa ja sen eri osien kapasiteetit eroavat toisistaan. Oheiseen kuvaan on merkitty verkon rakenne ja sen eri osien käytettävissä oleva vapaa vedensiirtokapasiteetti. (m^3/min)

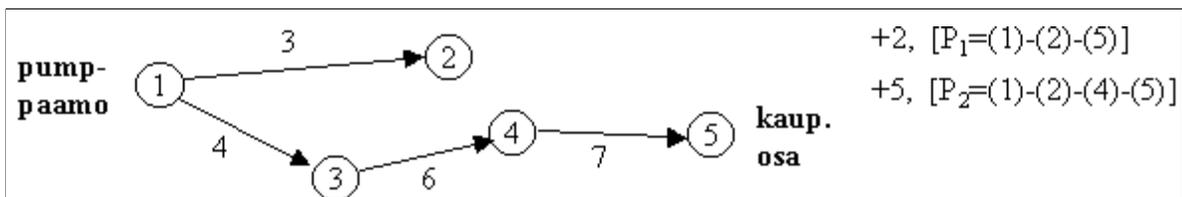


Mikä on suurin mahdollinen vesimäärä, joka voidaan pumppaamolta siirtää kaupunginosaan? Mitä vesijohtoverkon osia tulisi parantaa, jotta siirrettävää vesimäärää voitaisiin kasvattaa?

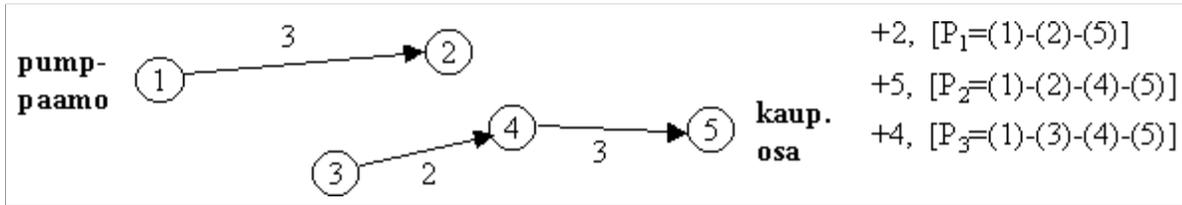
Määritetään jokin polku alkusolmusta (1) loppusolmuun (5). Eräs tällainen polku on $P_1 = (1)-(2)-(5)$. Polun P_1 kapasiteetti on sen kaarien kapasiteettien minimi, eli $K_1 = \min\{10, 2\} = 2$. Kirjataan muistiin, että P_1 :ä pitkin kuljetamme 2 yksikköä ja vähennetään kuvan vastaavien kaarien kapasiteetteja. Uusi kuva on



Seuraava polku on $P_2 = (1)-(2)-(4)-(5)$ ja sen kapasiteetti on $K_2 = \min\{8, 5, 12\} = 5$. Poistetaan tämä kapasiteetti kuvasta. Uusi kuva on



Seuraava polku on $P_3 = (1)-(3)-(4)-(5)$ ja sen kapasiteetti on $K_3 = \min\{4, 6, 7\} = 4$. Poistetaan tämä kapasiteetti kuvasta. Uusi kuva on



Enempää ei vettä voi siirtää verkoston läpi. Viimeisestä kuvasta nähdään yksittäisten kaarien käyttämätön kapasiteetti, kun systeemin läpi virtaa maksimaalinen virtaus. Kaupunginosaan voidaan siis siirtää vettä 11 yksikköä minuutissa.

Ongelma voidaan myös muotoilla LP-malliksi. Olkoon x_{ij} virtaus solmusta (i) solmuun (j). Silloin ongelman ratkaisee LP-malli

$$\begin{array}{llll}
 \max & & v & \\
 \text{st} & & v = x_{12} + x_{13} & \text{(solmu (1))} \\
 & & x_{12} = x_{24} + x_{25} & \text{(solmu (2))} \\
 & & x_{13} = x_{34} & \text{(solmu (3))} \\
 & & x_{34} + x_{24} = x_{45} & \text{(solmu (4))} \\
 & & x_{25} + x_{45} = v & \text{(solmu (5))} \\
 & & x_{12} \leq 10 & \text{(kaari (1,2))} \\
 & & x_{13} \leq 4 & \text{(kaari (1,3))} \\
 & & x_{24} \leq 5 & \text{(kaari (2,4))} \\
 & & x_{25} \leq 2 & \text{(kaari (2,5))} \\
 & & x_{34} \leq 6 & \text{(kaari (3,4))} \\
 & & x_{45} \leq 12 & \text{(kaari (4,5))}
 \end{array}$$

Lindon antama ratkaisu on

```

!-----
max v
st
solmu1) v - x12 - x13      = 0
solmu2)   x12 - x24 - x25 = 0
solmu3)   x13 - x34      = 0
solmu4)   x34 + x24 - x45 = 0
solmu5) -v + x25 + x45    = 0
1-2)                x12 <= 10
1-3)                x13 <= 4
2-4)                x24 <= 5
2-5)                x25 <= 2
3-4)                x34 <= 6
4-5)                x45 <= 12
end
!-----

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 11.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
V	11.000000	0.000000
X12	7.000000	0.000000
X13	4.000000	0.000000
X24	5.000000	0.000000
X25	2.000000	0.000000
X34	4.000000	0.000000
X45	9.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
SOLMU1)	0.000000	1.000000
SOLMU2)	0.000000	1.000000
SOLMU3)	0.000000	0.000000
SOLMU4)	0.000000	0.000000
SOLMU5)	0.000000	0.000000
1-2)	3.000000	0.000000
1-3)	0.000000	1.000000
2-4)	0.000000	1.000000
2-5)	0.000000	1.000000
3-4)	2.000000	0.000000
4-5)	3.000000	0.000000

!-----

Yleisesti maksimivirtauksen alkusolmusta (1) loppusolmuun (n) ratkaisee LP-malli

$$\begin{aligned}
 \max \quad & v \\
 \text{st} \quad & v = \sum_{j=1}^n x_{1j} \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{kj}, \quad k = 2, \dots, n-1 \\
 & \sum_{i=1}^n x_{in} = v \\
 & x_{ij} \leq k_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$

Aiheutukoon putken (i, j) käytöstä kustannus c_{ij} per virtausyksikkö. Jos v^* on edellä määritetty maksimivirtaus ja $v_o \leq v^*$, niin on tavallista kysyä: ”miten virtaus v_o kannattaa ohjata verkoston läpi, jotta kuljetuskustannus olisi mahdollisimman pieni?” Ongelman ratkaisee LP-malli

$$\min \sum c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 \text{st} \quad v_o &= \sum_{j=1}^n x_{1j} \\
 \sum_{i=1}^n x_{ik} &= \sum_{j=1}^n x_{kj}, \quad k = 2, \dots, n-1 \\
 \sum_{i=1}^n x_{in} &= v_o \\
 x_{ij} &\leq k_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$

Jos esimerkiksi edeltävän esimerkin kuljetuskustannukset ovat

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & 5 & 8 & x & x \\ x & x & x & 7 & 4 \\ x & x & x & 6 & x \\ x & x & x & x & 2 \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

niin LINDOn antama edullisin järjestely virtauksella $v_o = 9$ on

```

!-----
min 5x12 + 8x13 + 7x24 + 4x25 + 6x34 + 2x45
st
solmu1)  x12 + x13          = 9
solmu2)  x12 - x24 - x25    = 0
solmu3)  x13 - x34          = 0
solmu4)  x34 + x24 - x45    = 0
solmu5)  x25 + x45          = 9
1-2)          x12 <= 10
1-3)          x13 <= 4
2-4)          x24 <= 5
2-5)          x25 <= 2
3-4)          x34 <= 6
4-5)          x45 <= 12
end
!-----
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      5

```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 324.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X12	5.000000	0.000000
X13	4.000000	0.000000
X24	3.000000	0.000000
X25	2.000000	0.000000
X34	4.000000	0.000000
X45	7.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
SOLMU1)	0.000000	0.000000
SOLMU2)	0.000000	-45.000000
SOLMU3)	0.000000	-46.000000
SOLMU4)	0.000000	-52.000000
SOLMU5)	0.000000	-54.000000
1-2)	5.000000	0.000000
1-3)	0.000000	38.000000
2-4)	2.000000	0.000000
2-5)	0.000000	5.000000
3-4)	2.000000	0.000000
4-5)	5.000000	0.000000

!-----

Esimerkin ensimmäinen ratkaisu antoi kolme reittivaihtoehtoa: P_1 , P_2 ja P_3 . Jokainen siirrettävä yksikkö vettä kulkee jonkin näistä reiteistä. Reittivaihtoehtojen yksikkökustannukset ovat

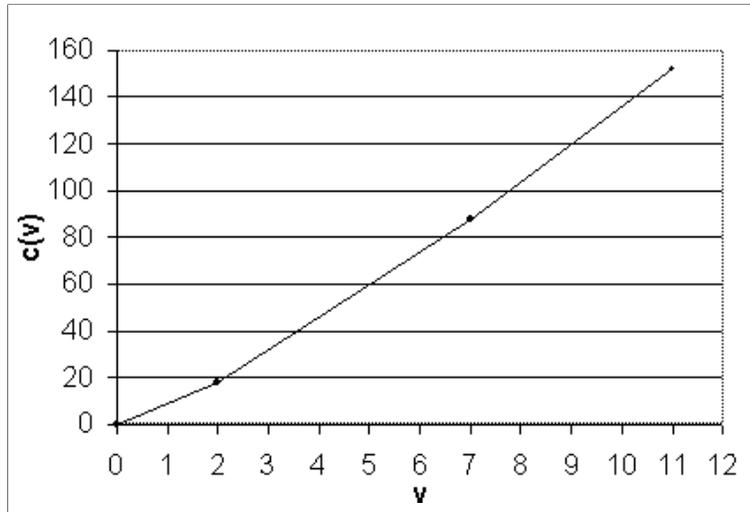
$$c_{P_1} = c_{12} + c_{25} = 5 + 4 = 9$$

$$c_{P_2} = c_{12} + c_{24} + c_{45} = 5 + 7 + 2 = 14$$

$$c_{P_3} = c_{13} + c_{34} + c_{45} = 8 + 6 + 2 = 16$$

Jos kaupunginosa on vasta rakenteilla, eikä kulutus heti ole maksimissa, kannattaa aluksi vesi kuljettaa pitkin edullisinta reittiä, eli P_1 :tä. Kun kulutus kasvaa, ei reitti P_1 enää riitä, vaan joudumme ottamaan käyttöön kalliimpia vaihtoehtoja. Koska reittivaihtoehtojen kapasiteetit ovat $k_{P_1} = 2$, $k_{P_2} = 5$ ja $k_{P_3} = 4$, niin kustannus virtauksen funktiona on

$$c(v) = \begin{cases} 9v, & \text{kun } 0 \leq v \leq 2 \\ 9 \cdot 2 + 14(v - 2) & \text{kun } 2 \leq v \leq 7 \\ 9 \cdot 2 + 14 \cdot 5 + 16(v - 7) & \text{kun } 7 \leq v \leq 11 \end{cases}$$



4.4 Projektinohjaus

Projektilla tarkoitetaan nyt suurehkoa monivaiheista tehtävää, jota suorittamassa on suurehko joukko eri alan työntekijöitä. Projekti voi olla

- rakennusprojekti
- uuden tuotteen suunnittelu, testaus ja markkinointi
- uuden tietojärjestelmän suunnittelu ja käyttöönotto
- hallinnon uudistus
- laivan rakentaminen, tms.

Projekti koostuu osatehtävistä, joista osa voidaan aloittaa vasta, kun tietyt edeltävät osatehtävät on saatettu päätökseen. Siten projekti voidaan luontevalla tavalla kuvata verkkona, jossa kaaret ovat osatehtäviä ja solmut ovat osatehtävien alkamis- tai päättymishetkiä.

Projektia suunniteltaessa tulee varmistaa, että

- osatehtävät ovat hyvin määriteltyjä
- projektiin osallistuvat henkilöt pystyvät kommunikoimaan keskenään
- osataan arvioida osatehtävien vaatimat resurssit ja niiden kestot
- osatehtävien keskinäinen järjestys on oikein määritetty
- projekti pystyy tarvittaessa suuntaamaan lisäresursseja osatehtävään, joka ei sujukaan ennakoidulla tavalla
- pystyykö projekti joustamaan, jos jokin osatehtävä epäonnistuu?

1950-luvun lopulla kehitettiin kaksi projektinhallintatekniikkaa, jotka ovat 30 vuoden kuluessa vakiinnuttaneet asemansa. CPM-tekniikan (Critical Path Method) kehitti Du Pont ja Sperry Rand ja PERT-tekniikan (Probabilistic Evaluation and Review Technique) kehittivät Polaris-ohjus projektissa olleet konsultit. Menetelmien piirteitä on koottu seuraavaan taulukkoon

	CPM	PERT
lähtökohta	tunnetaan osatehtävien tarkat kestot ja edeltäjä-seuraaja -suhteet	tunnetaan osatehtävien kestoille optimistiset, todennäköiset ja pessimistiset arviot, sekä edeltäjä-seuraaja -suhteet
tulokset	<ul style="list-style-type: none"> • koko projektin kesto • kriittiset osatehtävät • miten paljon ei-kriittinen osatehtävä saa myöhästyä ilman, että koko projekti myöhästyy • mihin osatehtäviin pitää osoittaa lisäresursseja, jos projektin halutaan valmistuvan laskettua nopeammin 	<ul style="list-style-type: none"> • projektin keston odotusarvo ja varianssi • kriittiset osatehtävät

4.4.1 Kriittisen polun menetelmä, CPM

CPM-tekniikassa tiedetään tehtävien tarkat kestot sekä tehtävien edeltäjät. Tehtäviä kuvataan kaarilla, ja solmut ovat tehtävien alkamis- ja päättymishetkiä. Projektia kuvaava verkko laaditaan seuraavien sääntöjen mukaisesti

1. Solmu (1) kuvaa projektin alkua ja jokainen tehtävä, jolla ei ole edeltäjää, kuvataan solmusta (1) alkavalla kaarella.
2. Verkossa tulee olla projektin loppumista kuvaava solmu. Loppusolmu on ainoa solmu, josta ei lähde kaarta.
3. Solmut numeroidaan siten, että kaaren loppusolmun numero on aina suurempi kuin kaaren alkusolmun numero. (Tämä sääntö ei vielä määritä numerointia yksikäsitteisesti!)
4. Kukin tehtävä kuvataan vain yhdellä kaarella.
5. Jos tehtävällä on edeltäjä, niin kaaren alkusolmuksi valitaan edeltäjän loppusolmu. Näennäistehtävien (dummy arc, kesto 0) avulla varmistetaan, että kahta

solmua yhdistää korkeintaan yksi kaari.

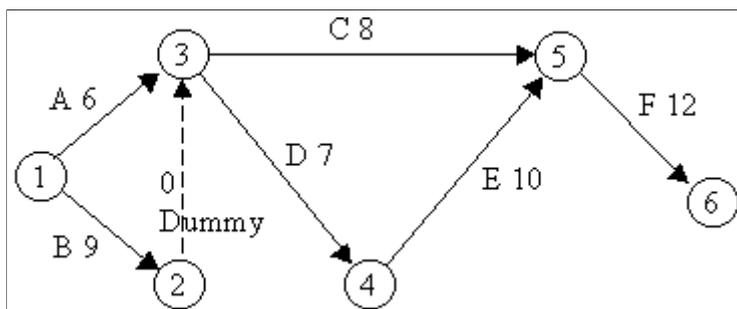
Esimerkki 4.4.1 Kuljetusliike päättää hankkia uuden siirtolavakuorma- auton. Koska tarvittavaa siirtolavatyyppeä ei ole valmiina saatavana, päätetään tehdä siirtolava ja autoon tarvittavat muutos- ja asennustyöt yrityksen omalla pajalla. Koska vastaavaa asennusta ei aiemmin ole tehty, käy työnjohtaja ja kaksi työntekijää opintomatalla selvittämässä tarvittavat tekniset yksityiskohdat.

Projektin tehtävät ja niiden kestot päivinä ovat seuraavat

tehtävä	edeltäjät	kesto
A = työntekijöiden koulutus	–	6
B = materiaalihankinnat	–	9
C = autoon tehtävät asennukset	A, B	8
D = siirtolavan rakentaminen	A, B	7
E = siirtolavan testaus	D	10
F = ajoneuvon katsastus	C, E	12

Tee projektista verkkomalli.

Ratkaisu:



Määritelmä 4.4.1

$$t_{ij} = \text{tehtävän } (i, j) \text{ kesto}$$

$$ET(i) = \text{varhaisin aika solmulle } i \text{ (earliest event time)}$$

$$ET(1) = 0$$

$$ET(i) = \max\{ET(j) + t_{ji}\}$$

$$LT(i) = \text{myöhäisin aika solmulle } i \text{ (latest event time)}$$

$$LT(\text{loppusolmu}) = ET(\text{loppusolmu})$$

$$LT(i) = \min\{LT(j) - t_{ij}\}$$

$$S(i, j) = \text{tehtävän } (i, j) \text{ kokonaispelivara (total float)}$$

$$= LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

Kokonaispelivara $S(i, j)$ ilmoittaa sen aikamäärän, jonka tehtävän (i, j) suorittaminen saa korkeintaan pidentyä ilman, että koko projektin kesto aika kasvaa.

Kriittinen polku muodostuu niistä tehtävistä, joiden kokonaispelivara on nolla.

Jos yksikin kriittisen polun tehtävistä myöhästyy aikataulustaan, koko projekti myöhästyy. Resursseja pyritään allokoimaan siten, että kriittisellä polulla sijaitsevat tehtävät saadaan suoritettua aikataulun mukaan.

Esimerkki 4.4.2 Määritämme siirtolavaesimerkin kriittisen polun.

$$ET(1) = 0$$

$$ET(2) = ET(1) + t_{12} = 0 + 9 = 9$$

$$ET(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} ET(1) + t_{13} = 0 + 6 \\ ET(2) + t_{23} = 9 + 0 \end{array} \right\} = 9$$

$$ET(4) = ET(3) + t_{34} = 9 + 7 = 16$$

$$ET(5) = \max \left\{ \begin{array}{l} ET(3) + t_{35} = 9 + 8 \\ ET(4) + t_{45} = 16 + 10 \end{array} \right\} = 26$$

$$ET(6) = ET(5) + t_{56} = 26 + 12 = 38$$

$$LT(6) = ET(6) = 38$$

$$\begin{aligned}
LT(5) &= LT(6) - t_{56} = 38 - 12 = 26 \\
LT(4) &= LT(5) - t_{45} = 26 - 10 = 16 \\
LT(3) &= \min \left\{ \begin{array}{l} LT(4) - t_{34} = 16 - 7 \\ LT(5) - t_{35} = 26 - 8 \end{array} \right\} = 9 \\
LT(2) &= LT(3) - t_{23} = 9 - 0 = 9 \\
LT(1) &= \min \left\{ \begin{array}{l} LT(2) - t_{12} = 9 - 9 \\ LT(3) - t_{13} = 9 - 6 \end{array} \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(1,2) &= LT(2) - ET(1) - t_{12} = 9 - 0 - 9 = 0 && \text{kriittinen} \\
S(1,3) &= LT(3) - ET(1) - t_{13} = 9 - 0 - 6 = 3 \\
S(2,3) &= LT(3) - ET(2) - t_{23} = 9 - 9 - 0 = 0 && \text{kriittinen} \\
S(3,4) &= LT(4) - ET(3) - t_{34} = 16 - 9 - 7 = 0 && \text{kriittinen} \\
S(3,5) &= LT(5) - ET(3) - t_{35} = 26 - 9 - 8 = 9 \\
S(4,5) &= LT(5) - ET(4) - t_{45} = 26 - 16 - 10 = 0 && \text{kriittinen} \\
S(5,6) &= LT(6) - ET(5) - t_{56} = 38 - 26 - 12 = 0 && \text{kriittinen}
\end{aligned}$$

Kriittinen polku on siis 1-2-3-4-5-6 ja projektin kokonaiskesto on 38 vuorokautta.

Projektin kokonaiskesto saadaan myös ratkaisemalla lp-malli, jossa x_i = solmun i tapahtumahetki ($x_1 = 0$).

$$\begin{array}{ll}
\min & z = x_6 \\
\text{st} & x_3 \geq 6 \\
& x_2 \geq 9 \\
& x_5 \geq x_3 + 8 \\
& x_4 \geq x_3 + 7 \\
& x_5 \geq x_4 + 10 \\
& x_6 \geq x_5 + 12 \\
& x_3 \geq x_2 \\
& x_i \geq 0
\end{array}$$

Mallin ratkaisu antaa z :lle arvon 38, joka on siis kriittisen polun pituus. Yksittäiset x_i :t saadaan kokonaispelivaran puitteissa, eikä lp-mallin ratkaisu siis kokonaan korvaa edellä tehtyä laskelmaa.

4.4.2 Projektin lyhentäminen

Esimerkki 4.4.3 Kuljetusliike haluaa kiirehtiä projektin valmistumista siten, että projekti valmistuu 25 päivässä. Kutakin tehtävää voidaan kiirehtiä korkeintaan 5 päivää ja kunkin tehtävän lyhentäminen päivällä aiheuttaa seuraavan taulukon mukaiset kustannukset

tehtävä	kust/pv
A	10
B	20
C	3
D	30
E	40
F	50

Merkitään solmun i toteutumishetkeä x_i :llä ja tehtävän A kestosta vähennettyjen päivien lukumäärää d_A (B, C, \dots vastaavasti). Projektin lyhentämisen edullisin tapa selviää ratkaisemalla lp-malli

$$\begin{array}{ll}
 \text{min} & z = 10d_A + 20d_B + 3d_C + 30d_D + 40d_E + 50d_F \\
 \text{st} & d_A \leq 5 \quad \text{max lyhennys tehtävälle A} \\
 & d_B \leq 5 \quad \text{" - B} \\
 & d_C \leq 5 \quad \text{" - C} \\
 & d_D \leq 5 \quad \text{" - D} \\
 & d_E \leq 5 \quad \text{" - E} \\
 & d_F \leq 5 \quad \text{" - F} \\
 & x_2 \geq 9 - d_B \quad \text{teht. B} \\
 & x_3 \geq 6 - d_A \quad \text{teht. A} \\
 & x_5 \geq x_3 + 8 - d_C \quad \text{teht. C} \\
 & x_4 \geq x_3 + 7 - d_D \quad \text{teht. D} \\
 & x_5 \geq x_4 + 10 - d_E \quad \text{teht. E} \\
 & x_6 \geq x_5 + 12 - d_F \quad \text{teht. F} \\
 & x_3 \geq x_2 + 0 \quad \text{dummy} \\
 & x_6 \leq 25 \quad \leftarrow \text{!! proj. pituus} \leq 25 \\
 & x_i, d_{(i,j)} \geq 0
 \end{array}$$

Ratkaisuksi tulee $z = 390$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 13$, $x_6 = 25$, $d_A = 2$, $d_B = 5$, $d_C = 0$, $d_D = 5$, $d_E = 3$, $d_F = 0$.

Esimerkki 4.4.4 Jos työnjohtaja saa omistajalta 500 rahaa käteensä ja ohjeet lyhentää projektia niin paljon kuin pystyy, niin tätä varten ratkaistaan lp-malli

$$\begin{array}{llll}
 \min & z = x_6 & & \\
 \text{st} & d_A \leq 5 & \max \text{ lyhennys tehtävälle } A & \\
 & d_B \leq 5 & - \text{''} - B & \\
 & d_C \leq 5 & - \text{''} - C & \\
 & d_D \leq 5 & - \text{''} - D & \\
 & d_E \leq 5 & - \text{''} - E & \\
 & d_F \leq 5 & - \text{''} - F & \\
 & x_2 \geq 9 - d_B & \text{teht. B} & \\
 & x_3 \geq 6 - d_A & \text{teht. A} & \\
 & x_5 \geq x_3 + 8 - d_C & \text{teht. C} & \\
 & x_4 \geq x_3 + 7 - d_D & \text{teht. D} & \\
 & x_5 \geq x_4 + 10 - d_E & \text{teht. E} & \\
 & x_6 \geq x_5 + 12 - d_F & \text{teht. F} & \\
 & x_3 \geq x_2 + 0 & \text{dummy} & \\
 & 500 \geq 10d_A + 20d_B + 3d_C + 30d_D + 40d_E + 50d_F & & \\
 & x_i, d_{(i,j)} \geq 0 & &
 \end{array}$$

Mallin ratkaisu on $z = 22.46$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 11$, $x_6 = 22.46$, $d_A = 2$, $d_B = 5$, $d_C = 1$, $d_D = 5$, $d_E = 5$, $d_F = 0.54$.

Kuvassa 4.27 on esitetty alkuperäinen ja sen kaksi lyhennettyä versiota. Kuvaan on ensin piirretty kriittisen polun osatehtävät (mittakaavassa) ja näiden rinnalle ei-kriittiset tehtävät. Pelivarat näkee tästä kuvasta hyvin. Isompien projektien kohdalla nuolikuva ei välttämättä esitä selkesti edeltäjä-seuraaja suhteita. Silloin on syytä varustaa nuolikaavio selvällä edeltäjätaulukolla. Huomaa, että lopulta kaikki tehtävät tulevat kriittisiksi, kun projektia kiirehditään riittävästi.

4.4.3 PERT

Project Evaluation and Review Technique, PERT. Tekniikan kehittivät Polaris ohjushankkeissa työskennelleet konsultit. Tekniikka huomioi osatehtävien kestoihin liittyvän epävarmuuden siten, että kunkin osatehtävän kestolle arvioidaan optimistinen, todennäköisin ja pessimistinen arvio. Sovitaan merkinnöistä:

$$a_{ij} = \text{tehtävän } (i, j) \text{ suorittamiseen kuluva lyhin mahdollinen aika} \\
 \text{(optimistinen arvio)}$$

$$m_{ij} = \text{tehtävän } (i, j) \text{ suorittamiseen kuluva todennäköisin aika}$$

$$b_{ij} = \text{tehtävän } (i, j) \text{ suorittamiseen kuluva pisin mahdollinen aika} \\
 \text{(pessimistinen arvio)}$$

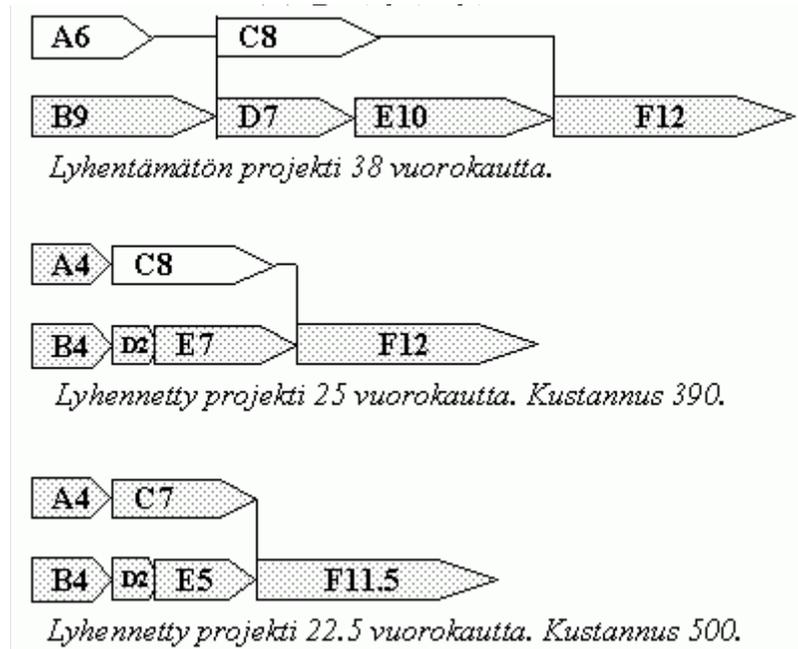
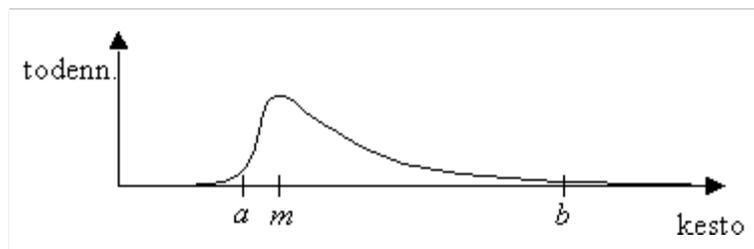


Figure 4.27: Projekti ja kaksi sen lyhennettyä versiota.

Tehtävän (i, j) kestoa kuvaavan satunnaismuuttujan t_{ij} jakauma on yleensä vino. Olkoon esimerkiksi tehtävän todennäköinen kesto 4 päivää. Optimistinen arvio on, että tehtävän suoritus aika voi olla päivän verran todennäköistä kestoa lyhyempi. Pessimistinen arvio lähtee siitä, että pahimmassa tapauksessa tehtävän suoritus venyy 7 päivällä. Nämä arviot eivät riitä määrittämään tehtävän keston jakaumaa, mutta varsin lähelle osuva arvaus jakauman muodosta on seuraavassa kuvassa.



Keston odotusarvo ja varianssi lasketaan beta-jakaumasta saaduilla kaavoilla

$$(4.1) \quad E(t_{ij}) = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

$$(4.2) \quad \text{Var}(t_{ij}) = \sigma_{ij}^2 = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36}$$

Odotusarvoja käyttäen määritetään kriittinen polku ja tehtävien pelivarat samoin kuin CPM-tekniikassa edell”a. Projektin keston liittyvä todennäköisyyslasku esitetään seuraavan esimerkin avulla.

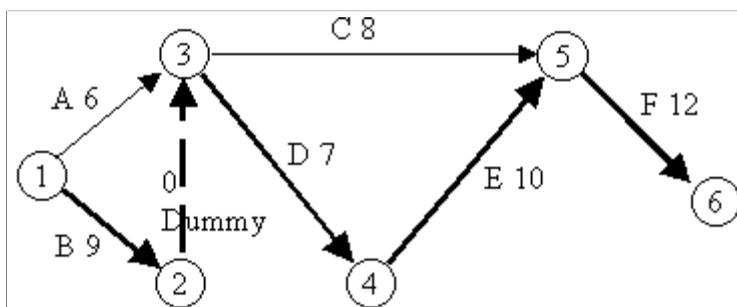
Esimerkki 4.4.5 Tarkastellaan uudelleen esimerkin 4.4.1 siirtolavaprojektia. Oletamme, että osatehtävien kestoarvot ovat

(i, j)	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
A (1,3)	2	6	10
B (1,2)	6	8	16
C (3,5)	3	8	13
D (3,4)	3	6	15
E (4,5)	8	10	12
F (5,6)	9	12	15
Dummy (2,3)	0	0	0

(4.1)
 (4.2)
 \Rightarrow

(i, j)	$E(t_{ij})$	$Var(t_{ij})$
A (1,3)	6	1.78
B (1,2)	9	2.78
C (3,5)	8	2.78
D (3,4)	7	4.00
E (4,5)	10	0.44
F (5,6)	12	1.00
Dummy (2,3)	0	0.00

Tehtävien kestojen odotusarvoja käyttäen lasketaan tehtävien pelivarat ja kriittinen polku CP.



Kriittinen polku on CP = B-Dummy-D-E-F. Kriittisen polun keston odotusarvo on siihen sisältyvien tehtävien kestojen odotusarvojen summa. Kriittisen polun keston varianssi on kriittiseen polkuun kuuluvien osatehtävien varianssien summa.

$$\begin{aligned}
 E(t_{CP}) &= \sum_{(i,j) \in CP} E(t_{ij}) = 9 + 0 + 7 + 10 + 12 = 38 \\
 \sigma_{CP}^2 &= \sum_{(i,j) \in CP} \sigma_{ij}^2 = 2.78 + 0.00 + 4.00 + 0.44 + 1.00 = 8.22 \\
 \Rightarrow \sigma_{CP} &= \sqrt{8.22} = 2.87
 \end{aligned}$$

PERT-tekniikan keskeiset oletukset ovat nyt seuraavat:

a) Projektin kesto = kriittisen polun kesto t_{CP} . Tämä on totta, jos mitään kovin poikkeuksellista ei satu. Jos kriittiseen polkuun kuulumaton tehtävä venähtää, niin kriittinen polku saattaa muuttua. Käytännössä ensimmäinen oletus on riittävän hyvin voimassa.

b) Projektin kesto on normaalisti jakautunut. Jos satunnaismuuttuja on monen pienen riippumattoman satunnaismuuttujan summa, niin sen jakauma on lähellä normaalia. Joskus projektissa on rinnakkaisia kriittisiä tehtäviä. Projekti pitkittyy, jos yksikin rinnakkaisista kriittisistä tehtävistä viivästyy. Tämä muuttaa todennäköisyyyslaskujen luonnetta. Käytännössä toinenkin ehto on riittävän hyvin voimassa.

Kriittisen polun kesto on esimerkissä jakautunut normaalisti $t_{CP} \sim N(38; 2.87)$. Kysytty todennäköisyys katsotaan normituksen jälkeen tilastollisista taulukoista

$$\begin{aligned} P(t_{CP} \leq 35) &= P\left(z \leq \frac{35 - 38}{2.87}\right) \\ &= P(z \leq -1.05) = 1 - \Psi(1.05) \\ &= 1 - 0.8531 = 0.147 \end{aligned}$$

Siis 14.7 prosentin todennäköisyydellä projekti valmistuu 35 vuorokaudessa tai nopeammin.

5. Johdatus epälineaariseen optimointiin

Epälineaarista optimointia tullaan käsittelemään tarkemmin optimoinnin jatkokurssilla, mutta nyt käydään läpi perusteet. Rajoitumme tässä johdannossa jatkuvien ja sileiden funktioiden optimointiin. Toisin sanoen funktiota voidaan derivoida niin monta kertaa kuin on tarvetta.

Koska emme voi kerrata kaikkea, on tärkeitä, että opiskelija tarvittaessa kertaan sen, mitä on aiemmin oppinut derivoinnista ja osittaisderivaatoista.

5.1 Ääriarvon tyyppi

Aloitamme tutusta asiasta eli suljetulla välillä määritellystä yhden muuttujan funktiosta. Kuvassa ?? on funktion

$$(5.1) \quad f(x) = \frac{25}{5x-4} + 3(x-3)^3 - 3x + 5$$

kuvaaja välillä $[1, 4]$. Kuvasta näkee, että funktiolla on kaksi lokaalia minimiä ja kolme lokaalia maksimia. Välin päätepisteissä on tällä kertaa lokaalit maksimit. Globaalit ääriarvokohdat ovat maksimikohta $x_1 = 1.000$ ja minimikohta $x_2 = 1.252$. Vastaavat globaalit ääriarvot ovat maksimiarvo $f(x_1) = 3.000$ ja minimiarvo $f(x_2) = -3,717$.

Määritelmä 5.1.1 (A) Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva välillä $[a, b] = I$ määritelty funktio. Määrittelyvälin piste $x^* \in I$ on *globaali maksimi(minimi)-kohta*, jos f saa suurimman(pienimmän) arvonsa välillä I kohdassa x^* .

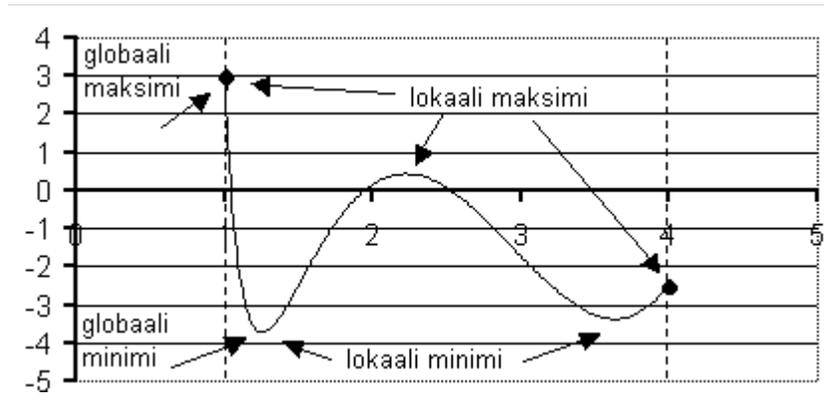


Figure 5.28: Funktion ääriarvot.

(A') Globaali maksimi(minimi) -kohta on siis optimointitehtävän

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max(min)} \quad z = f(x) \\ \text{ehdolla} \quad x \geq a \\ \quad \quad \quad x \leq b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{max(min)} \quad z = f(x) \\ \text{ehdolla} \quad x \in I \end{array} \right.$$

optimipiste.

(B) Avoin väli $J = (\alpha, \beta)$ on x :n avoin ympäristö, jos $\alpha < x < \beta$.

(C) Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva välillä $I = [a, b]$ määritelty funktio. Määrittelyvälin piste $x^* \in I$ on *lokaali maksimi(minimi)-kohta*, jos on olemassa x^* :n avoin ympäristö J niin, että f saa suurimman(pienimmän) arvonsa joukossa $J \cap I$ kohdassa x^* .

(C') Voimme yhtäpitävästi määrittellä, että $x^* \in I$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa x^* :n avoin ympäristö J siten, että x^* on optimointitehtävän

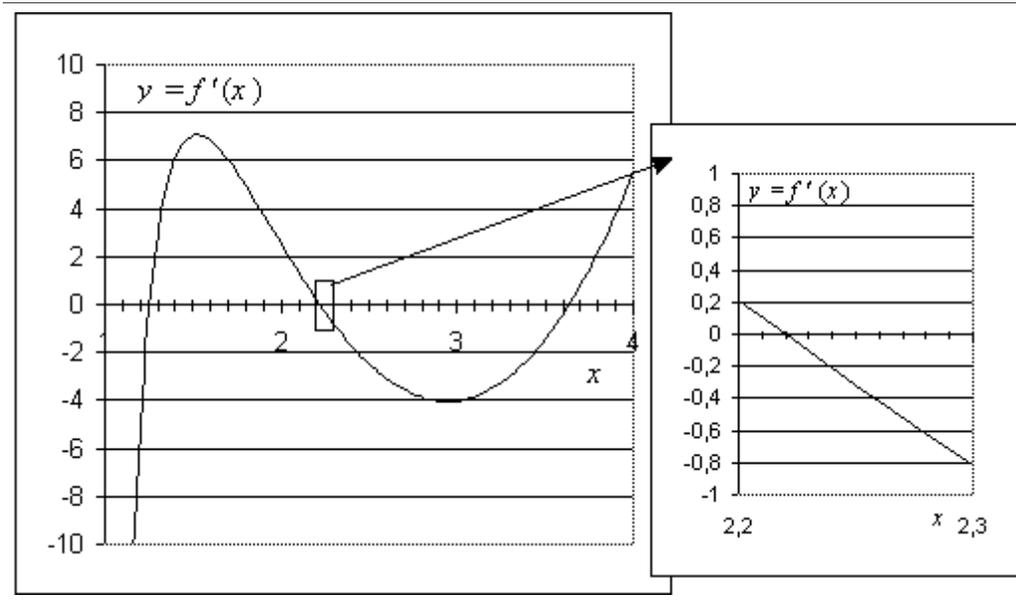
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{max(min)} \quad z = f(x) \\ \text{ehdolla} \quad x \in I \\ \quad \quad \quad x \in J \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{max(min)} \quad z = f(x) \\ \text{ehdolla} \quad x \geq a \\ \quad \quad \quad x \leq b \\ \quad \quad \quad x > \alpha \\ \quad \quad \quad x < \beta \end{array} \right.$$

optimipiste.

(C'') Vielä voimme yhtäpitävästi määrittellä, että $x^* \in [a, b]$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa x^* :n avoin ympäristö J siten, että kaikille $x \in J \cap I$ on voimassa

$$(5.2) \quad x \neq x^* \Rightarrow f(x) \leq (\geq) f(x^*)$$

(D) Jos epäyhtälössä (5.2) erisuuruus on aito kaikilla $x \in (J \cap I) \setminus \{x^*\}$ (eli x^* on ainoa optimikohta $J \cap I$:ssä) niin sanomme, että ääriarvo on *vahva ääriarvo*. Jos ääriarvo ei

Figure 5.29: $y = f'(x)$.

ole vahva, niin se on *heikko*.

Esimerkki 5.1.1 Kuvasta ?? näkee helposti funktion (??) ääriarvojen tyytit, mutta ääriarvokohtia on usein vaikea nähdä tarkasti. Lukiassa ongelma ratkaistiin etsimällä derivaattafunktion nollakohdat, $f'(x) = 0$. Nyt ratkaistavaksi tuleva yhtälö on neljättä astetta, joten emme osaa ratkaista sitä tarkasti. Hieman paremmin ääriarvokohta näkyy derivaattafunktion kuvaajasta, jonka voi piirtää vaikkapa Excelillä. Lokaalissa maksimikohdassa derivaatan merkkikaaviossa on ”+|−” ja minimikohdassa on derivaatan merkkikaaviossa ”−|+”. Kuvassa ?? on derivaattafunktion kuvaaja. Kuvasta näemme, että funktiolla on lokaali maksimikohta kohdassa $x \approx 2.22$. Jos haluamme tietää ääriarvokohdan tarkemmin, tulee kuvaajan tutkiminen työlääksi. Jatkamme esimerkin käsittelyä numeerisesti luvussa 5.4.

Seuraavaksi tarkastelemme optimointitehtävää, jossa päätösmuuttujia on n kappaletta, $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^\top$. Olkoon käypä alue $K \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon epälineaarinen tavoitefunktio $z = f(\mathbf{x})$ hyvin määritelty K :ssa. Voimme siis kirjoittaa optimointitehtävämme muotoon

$$\begin{array}{ll} \max & z = f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & \mathbf{x} \in K. \end{array}$$

Kahden ratkaisuvektorin välinen etäisyys on tavallinen euklidinen

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2}$$

Ratkaisuvektorin \mathbf{x}^* r -säteinen avoin palloympäristö $B_r(\mathbf{x}^*)$ muodostuu niistä ratkaisuvektoreista, jotka ovat lähempänä kuin r :n etäisyydellä \mathbf{x}^* :stä

$$B_r(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < r\}$$

Joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos sen jokaisella pisteellä $w \in U$ on U :hun sisältyvä palloympäristö, $B_r(w) \subset U$. (Toisin sanoen: mikään U :n piste ei ole U :n reunapiste.) Jos $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja $x \in U$, niin sanomme että U on x :n avoin ympäristö.

Määrittelemme seuraavaksi ääriarvon tyytit monen muuttujan funktion tapauksessa. (Huomaa, että määritelmät ovat lähes sanasta sanaan samat kuin edellä.)

Määritelmä 5.1.2 (A) Olkoon $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva käyvässä alueessa K määritelty funktio. Käypä $x^* \in K$ on *globaali maksimi(minimi)-kohta*, jos f saa suurimman(pienimmän) arvonsa K :ssa kohdassa x^* .

(A') Globaali maksimi(minimi) -kohta on siis optimointitehtävän

$$\begin{cases} \max(\min) & z = f(x) \\ \text{ehdolla} & x \in K \end{cases}$$

optimipiste.

(B) Avoin joukko U on x :n *avoin ympäristö*, jos $x \in U$.

(C) Olkoon $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Käypä piste $x^* \in K$ on *lokaali maksimi(minimi)-kohta*, jos on olemassa x^* :n avoin ympäristö U niin, että f saa suurimman(pienimmän) arvonsa joukossa $U \cap K$ kohdassa x^* .

(C') Voimme yhtäpitävästi määritellä, että $x^* \in K$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa x^* :n avoin ympäristö U siten, että x^* on optimointitehtävän

$$\begin{cases} \max(\min) & z = f(x) \\ \text{ehdolla} & x \in K \\ & x \in U \end{cases}$$

optimipiste.

(C'') Vielä voimme yhtäpitävästi määritellä, että $x^* \in K$ on lokaali maksimi(minimi) -kohta, jos on olemassa x^* :n avoin ympäristö U siten, että kaikille $x \in U \cap K$ on voimassa

$$(5.3) \quad x \neq x^* \Rightarrow f(x) \leq (\geq) f(x^*)$$

(D) Jos epäyhtälössä (??) erisuuruus on aito kaikilla $x \in (U \cap K) \setminus \{x^*\}$ (eli x^* on ainoa optimikohta $U \cap K$:ssä) niin sanomme, että ääriarvo on *vahva ääriarvo*. Jos ääriarvo ei ole vahva, niin se on *heikko*.

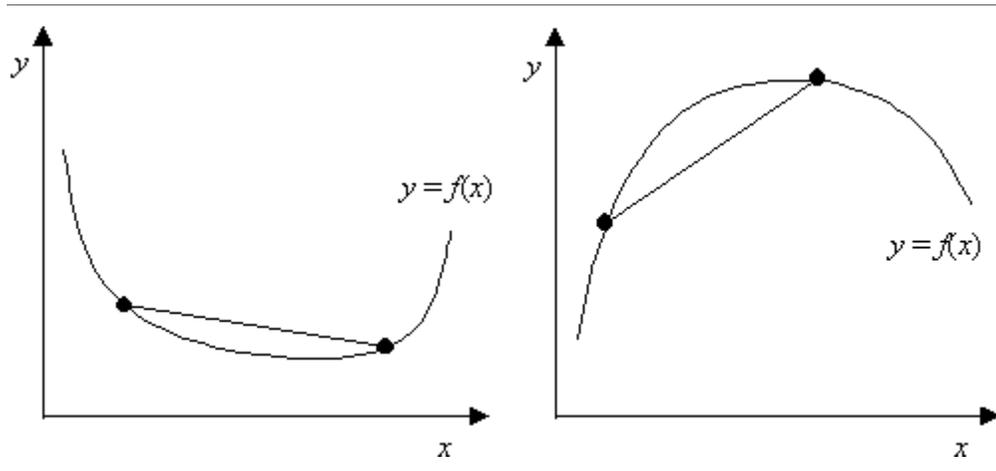


Figure 5.30: (a) Konvekssi funktio (b) konkaavi funktio.

5.2 Konveksisuus ja konkaavisuus

5.2.1 Yhden muuttujan tapaus

Yhden muuttujan funktio $f(x)$ on *Konvekssi* (*konkaavi*), jos mitä tahansa kahta funktion kuvaajan pistettä yhdistävä jana ei missään ole kuvaajan alapuolella (yläpuolella). Täsmällisempi määritelmä on seuraavassa:

Määritelmä 5.2.1 (A) Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on *konvekssi*, jos kaikilla $x, y \in [a, b]$ ja $t \in [0, 1]$ on voimassa

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t(f(x) + (1 - t)f(y))$$

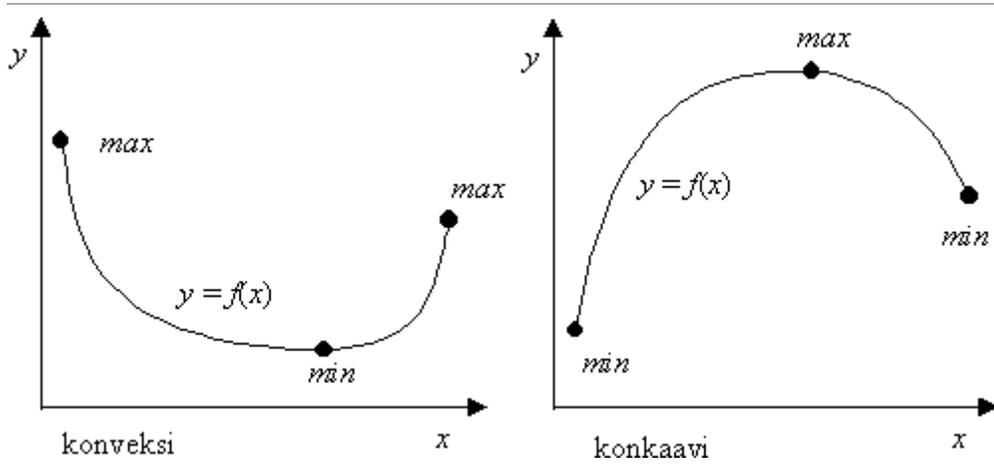
(B) Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on *konkaavi*, jos kaikilla $x, y \in [a, b]$ ja $t \in [0, 1]$ on voimassa

$$f(tx + (1 - t)y) \geq t(f(x) + (1 - t)f(y))$$

(C) Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *lineaarinen*, jos kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Huomautus: Lineaarinen funktio on sekä konvekssi, että konkaavi. Käänteinen tulos ei kuitenkaan pidä paikkaansa, sillä funktio on yhtäaikaan konvekssi ja konkaavi jos sen kuvaaja on suora, mutta lineaarisuus edellyttää lisäksi, että $f(0) = 0$.



Lause 5.2.1 (A) Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on konvekksi funktio ja x^* on sen lokaali minimikohta välillä $[a, b]$, niin x^* on f :n globaali minimikohta välillä $[a, b]$.

(B) Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on konkaavi funktio ja x^* on sen lokaali maksimikohta välillä $[a, b]$, niin x^* on f :n globaali maksimikohta välillä $[a, b]$.

Todistus: (A) Koska x^* on lokaali minimikohta on olemassa väli $(\alpha, \beta) \ni x^*$ siten, että

$$f(x) \geq f(x^*), \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Jos $y > \beta$, niin on olemassa $t \in [0, 1]$ siten, että $\beta = tx^* + (1-t)y$. Konveksisuudesta seuraa nyt, että

$$\begin{aligned} f(x^*) &\leq f(\beta) = f(tx^* + (1-t)y) \leq t(f(x^*) + (1-t)f(y)) \\ \Rightarrow f(x^*) &\leq f(y) \end{aligned}$$

Jos $y < \alpha$ nähdään vastaavalla tavalla, että $f(x^*) \leq f(y)$.

(B) Mutatis mutandis. ///

Lause 5.2.2 (A) Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on konvekksi funktio ja x^* on sen vahva lokaali maksimikohta välillä $[a, b]$, niin $x^* = a$ tai $x^* = b$.

(B) Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on konkaavi funktio ja x^* on sen vahva lokaali minimikohta välillä $[a, b]$, niin $x^* = a$ tai $x^* = b$.

Todistus: HT ///

Konvekksi (konkaavi) funktio on jatkuva, mutta sen ei tarvitse olla derivoituva. Jos kuitenkin funktio on jatkuvasti derivoituva, niin voimme antaa uuden tavan tutkia funktion konveksisuutta.

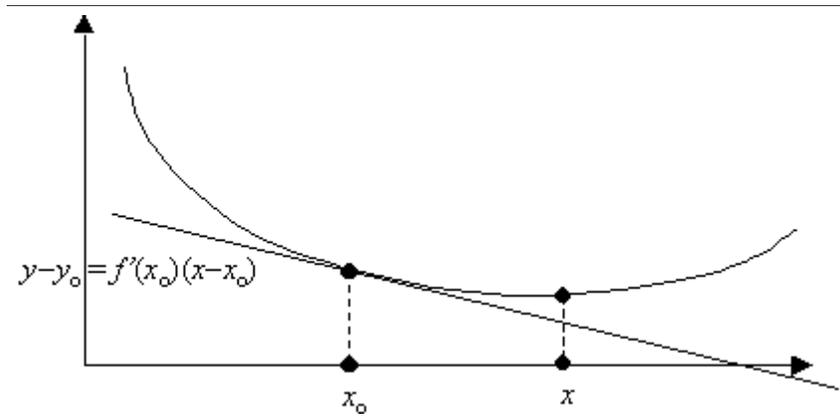


Figure 5.31: Sileän funktion konveksisuus

Idea perustuu siihen, että alkuperäinen konveksisuuden määritelmä on yhtäpitävä sen ominaisuuden kanssa, että funktion kuvaaja ei missään jää minkään tangenttinsa alapuolelle.

Lause 5.2.3 Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funktio.

(A) Jos f ja f' ovat jatkuvia, niin f on konvekxi, jos ja vain jos

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x_0, x \in [a, b]$$

(B) Jos f'' on jatkuva, niin f on konvekxi, joss

$$f''(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

(C) Jos f ja f' ovat jatkuvia, niin f on konkaavi, joss

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x_0, x \in [a, b]$$

(D) Jos f'' on jatkuva, niin f on konkaavi, joss

$$f''(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$$

Todistus: HT

///

Esimerkki 5.2.1 Määritetään funktion

$$f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \sin x$$

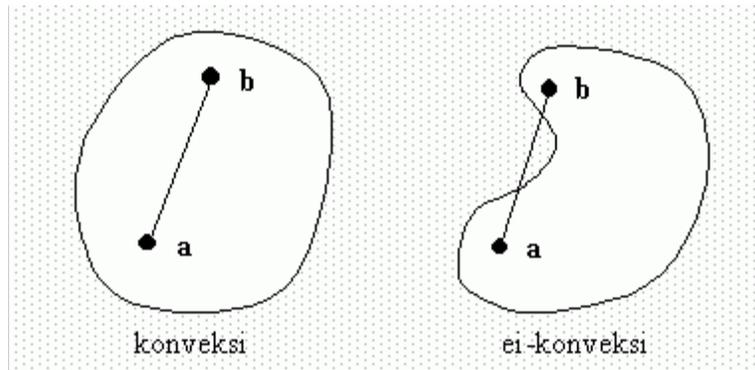


Figure 5.32: Alueen konveksisuus

suurin arvo. Eräs tapa lähestyä asiaa on tehdä derivaatan merkkikaavio, mutta nyt tarkistamme ensin konveksisuuden. Koska

$$f'(x) = 2x - \cos x \Rightarrow f''(x) = 2 + \sin x > 0, \forall x$$

Siis f on konvekksi ja se saa maksimiarvonsa määrittelyvälin päätepisteessä. $f(0) = 0$ ja $f(\pi/2) = \pi^2/4 - 1$, joten kysytty maksimi on $\pi^2/4 - 1$.

5.2.2 Usean muuttujan tapaus

Kun siirrymme yhden muuttujan reaaliarvoisesta funktiosta $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monen muuttujan funktioon $f : K \rightarrow \mathbb{R}, K \subset \mathbb{R}^n$, joudumme yleistämään edellä määritellyjä termejä. Perusideat ovat täsmälleen samat kuin edellä.

Määritelmä 5.2.2 Joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ on *konvekksi*, jos kahta K :n pistettä \mathbf{a} ja \mathbf{b} yhdistävä jana $[\mathbf{ab}]$ kokonaan kuuluu K :hon valitaan \mathbf{a} ja \mathbf{b} miten tahansa.

Esimerkkejä konvekseista joukoista on; kuutio, pallo, LP-mallin käypä alue. Olkoon jatkossa $K \subset \mathbb{R}^n$ konvekksi joukko. Jos $\mathbf{a} \in K$ ja $\mathbf{b} \in K$, niin kuvaus

$$\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \xi(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

on janan $[\mathbf{ab}]$ parametrisointi. Jokaista parametrin t arvoa $0 \leq t \leq 1$ vastaa yksikäsitteinen janan $[\mathbf{ab}]$ piste. ($\xi(0) = \mathbf{a}$ ja $\xi(1) = \mathbf{b}$.)

Määritelmä 5.2.3 Olkoon $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ funktio ja $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ janan $[\mathbf{ab}]$ parametrisointi. Kuvaus

$$f_{\mathbf{ab}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_{\mathbf{ab}}(t) = f(\xi(t))$$

on funktion f rajoittuma janalle $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$.

Esimerkki 5.2.2 Olkoon $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_i \leq 3, i = 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}^3$,

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + \frac{1}{1+x_2} + x_3^2, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

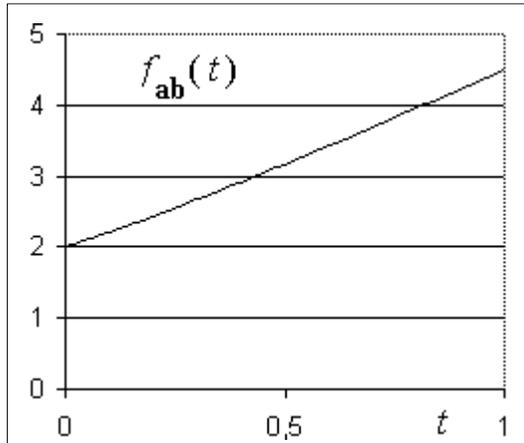
Silloin janan $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ parametrisointi on

$$\xi(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

ja funktion f rajoittuma janalle $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ on

$$f_{\mathbf{ab}}(t) = (1-t)t + \frac{1}{1+t} + (1+t)^2 = 3t + 1 + \frac{1}{1+t}$$

Koska $f_{\mathbf{ab}}(t)$ on yhden muuttujan funktio, sen kuvaaja on helppo piirtää.



Kuvan perusteellä rajoittuma näyttää konveksilta. Asia varmistuu laskemalla toinen derivaatta

$$f'_{\mathbf{ab}}(t) = 3 - \frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow f''_{\mathbf{ab}}(t) = \frac{2}{(1+t)^3} > 0, \forall t$$

Määritelmä 5.2.4 Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ konvekssi joukko.

(A) Funktio $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *konvekssi*, jos kaikilla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$ on voimassa

$$f(t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}) \leq tf(\mathbf{b}) + (1-t)f(\mathbf{a})$$

(B) Funktio $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *konkaavi*, jos kaikilla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$ on voimassa

$$f(t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{a}) \geq tf(\mathbf{b}) + (1-t)f(\mathbf{a})$$

(AB') Funktio $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *konvekksi* (*konkaavi*), jos f :n rajoittuma mille tahansa janalle $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ on konvekksi (konkaavi).

Lause 5.2.4 Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ konvekksi joukko.

(A) Jos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on konvekksi funktio ja \mathbf{x}^* on sen lokaali minimikohta K :ssa, niin \mathbf{x}^* on f :n globaali minimikohta K :ssa.

(B) Jos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on konkaavi funktio ja \mathbf{x}^* on sen lokaali maksimikohta K :ssa, niin \mathbf{x}^* on f :n globaali maksimikohta K :ssa.

Todistus: (A) Koska \mathbf{x}^* on lokaali minimikohta, on olemassa avoin ympäristö $U \ni \mathbf{x}^*$ siten, että

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \forall \mathbf{x} \in U$$

Jos $\mathbf{y} \in K$, niin on olemassa $t \in [0, 1]$ siten, että $\mathbf{z} = t\mathbf{x}^* + (1-t)\mathbf{y} \in U$. Konveksisuudesta seuraa nyt, että

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^*) &\leq f(\mathbf{z}) = f(t\mathbf{x}^* + (1-t)\mathbf{y}) \leq t f(\mathbf{x}^*) + (1-t)f(\mathbf{y}) \\ \Rightarrow f(\mathbf{x}^*) &\leq f(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(B) Mutatis mutandis.

///

Lause 5.2.5 Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ konvekksi joukko.

(A) Jos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on konvekksi funktio ja \mathbf{x}^* on sen vahva lokaali maksimikohta K :ssa, niin \mathbf{x}^* on K :n reunan piste.

(B) Jos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on konkaavi funktio ja \mathbf{x}^* on sen vahva lokaali minimikohta K :ssa, niin \mathbf{x}^* on K :n reunan piste.

Todistus: HT

///

Konveksisuus tai konkaavisuus, ei edellytä derivoiduvuutta. Käytännössä olemme useimmiten tekemisissä sileiden funktioiden kanssa, jolloin kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Oletamme seuraavassa, että funktio $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on ainakin kaksi kertaa jatkuvasti osittaisderivoituva ja että $K \in \mathbb{R}^3$ on konvekksi. Rajoittuminen kolmen muuttujan funktioon yksinkertaistaa lausekkeitä, mutta asioiden yleisempi tarkastelu on helppo yleistää kolmiulotteisesta.

Olkoon $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$ kaksi pistettä ja $\xi(t)$ niiden välisen janan parametrisointi. Merkitsemme

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{ja}$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + u_1 t \\ a_2 + u_2 t \\ a_3 + u_3 t \end{pmatrix}$$

Nyt voimme ketjusäännöllä laskea derivaatat rajoittumalle $f_{[\mathbf{ab}]}(t)$.

$$f_{[\mathbf{ab}]}(t) = f(\xi(t))$$

$$\begin{aligned} f'_{[\mathbf{ab}]}(t) &= f_{x_1}(\xi(t))\xi'_1(t) + f_{x_2}(\xi(t))\xi'_2(t) + f_{x_3}(\xi(t))\xi'_3(t) \\ &= u_1 f_{x_1}(\xi(t)) + u_2 f_{x_2}(\xi(t)) + u_3 f_{x_3}(\xi(t)) = \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{[\mathbf{ab}]}(t) &= u_1 f_{x_1 x_1}(\xi(t))u_1 + u_1 f_{x_1 x_2}(\xi(t))u_2 + u_1 f_{x_1 x_3}(\xi(t))u_3 \\ &\quad \dots + u_2 f_{x_2 x_1}(\xi(t))u_1 + u_2 f_{x_2 x_2}(\xi(t))u_2 + u_2 f_{x_2 x_3}(\xi(t))u_3 \\ &\quad \dots + u_3 f_{x_3 x_1}(\xi(t))u_1 + u_3 f_{x_3 x_2}(\xi(t))u_2 + u_3 f_{x_3 x_3}(\xi(t))u_3 \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^\top \mathbf{H} \mathbf{u} \end{aligned}$$

missä $\nabla \mathbf{f}$ on funktion f gradientti ja \mathbf{H} on funktion f Hessin matriisi,

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} \end{pmatrix},$$

ja kaikki osittaisderivaatat lasketaan pisteessä $\xi(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$.

Lineaarialgebran kirjoista luetta: $n \times n$ -matriisia \mathbf{A} sanotaan *positiivisesti definiitiksi*, jos

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

ja *negatiivisesti definiitiksi*, jos

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} \leq 0, \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Jos merkitsemme k -rivistä alideterminanttia

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

niin \mathbf{A} on positiivisesti definiitti jos

$$a_{11} \geq 0, \quad \text{ja } |A_k| \geq 0, \quad \forall k = 2, \dots, n$$

ja \mathbf{A} on negatiivisesti definiitti jos

$$a_{11} \leq 0, \quad \text{ja } \begin{cases} |A_k| \geq 0, & k = 2, 4, \dots \\ |A_k| \leq 0, & k = 3, 5, \dots \end{cases}$$

Yhdistämällä edellinen tarkastelu ja määrittelmä (?? (AB')) ja lause (??(BD)) saadaan tulos

Lause 5.2.6 Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti osittaisderivoituva funktio. f on konvekso (konkaavi), joss funktion f Hessin matriisi on positiivisesti (negatiivisesti) definiitti K :ssa.

Esimerkki 5.2.3 Tutkitaan funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_2^3,$$

konveksisuutta joukossa $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_i \leq 3, i = 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R}^3$. Nyt

$$\begin{aligned} f_{x_1} = 2x_1 &\Rightarrow f_{x_1x_1} = 2, & f_{x_1x_2} = 0, & f_{x_1x_3} = 0 \\ f_{x_2} = 6x_2 + 6x_2^2 &\Rightarrow f_{x_2x_1} = 0, & f_{x_2x_2} = 6 + 12x_2, & f_{x_2x_3} = 0 \\ f_{x_3} = 2x_3 &\Rightarrow f_{x_2x_1} = 0, & f_{x_2x_2} = 0, & f_{x_2x_3} = 2 \end{aligned}$$

Siis

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6(1+2x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} h_{11} = 2 > 0 \\ |H_2| = 12(1+2x_2) > 0 \quad (K\text{:ssa}) \\ |H_3| = 24(1+2x_2) > 0 \quad (K\text{:ssa}) \end{cases}$$

joten \mathbf{H} on positiivisesti definiitti K :ssa ja f on konvekso K :ssa.

5.3 Välttämätön ja riittävä ehto

5.3.1 Yhden muuttujan tapaus

Olkoon seuraavassa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio. Määrittelyjoukko on nyt \mathbb{R} , joten reunapisteet eivät aiheuta ongelmia. Seuraavat väitteet on helppo todistaa.

Välttämätön ehto:

Jos x^* on lokaali maksimi- tai minimikohta, niin $f'(x^*) = 0$.

Riittävä ehto minimille:

Jos $f'(x^*) = 0$ ja $f''(x^*) > 0$, niin x^* on lokaali minimikohta.

Riittävä ehto maksimille:

Jos $f'(x^*) = 0$ ja $f''(x^*) < 0$, niin x^* on lokaali maksimikohta.

5.3.2 Usean muuttujan tapaus

Olkoon seuraavassa funktiolla $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Välttämätön ehto:

Jos \mathbf{x}^* on lokaali maksimi- tai minimikohta, niin $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Riittävä ehto minimille:

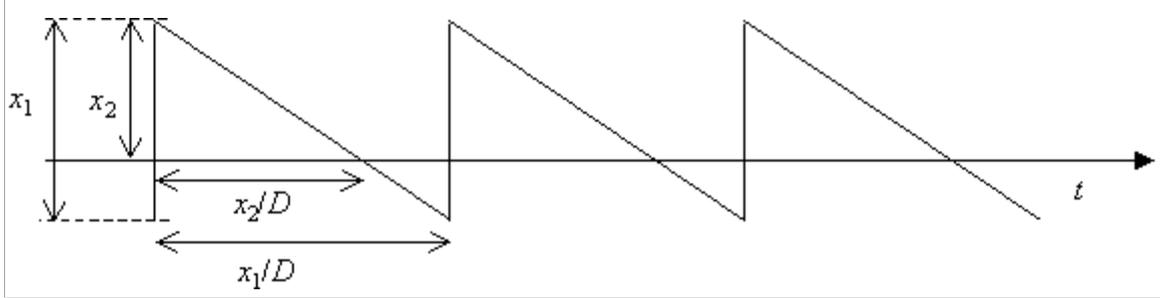
Jos $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ ja \mathbf{H} on positiivisesti definiitti, niin x^* on lokaali minimikohta.

Riittävä ehto maksimille:

Jos $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ ja \mathbf{H} on negatiivisesti definiitti, niin x^* on lokaali maksimikohta.

Esimerkki 5.3.1 Tarkastellaan varastomallia, jossa varaston kautta toimitetaan tuotteita asiakkaille. Asiakkaiden kysyntä on D tuotetta vuodessa. Tuotteet tuodaan varastoon x_1 tuotteen erissä. Jos asiakas ei saa haluamaansa tuotetta, niin asiakas jää odottamaan. Kun seuraava täydennyserä saapuu, toimitetaan ensin odottavien asiakkaiden tarve ja loput sijoitetaan varastoon. Tilaukset ajoitetaan siten, että varaston

maksimikoko on x_2 . Jos kysyntä on tasaista, niin varaston koko ajan funktiona on seuraavan kuvan mukainen.



Keskimääräinen varaston koko on $x_2^2/(2x_1)$. Keskimääräinen puutteen määrä on $(x_1 - x_2)^2/(2x_1)$. Ja tilauksia tehdään D/x_1 (per vuosi). Kustannukset ovat:

- varaston ylläpitokustannus h (€ / tuote / vuosi),
- puuttekustannus s (€ / tuote / vuosi),
- tilauskustannus K (€ / tilaus)

Vuotuinen kokonaiskustannus on nyt

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_2^2 h}{2x_1} + \frac{(x_1 - x_2)^2 s}{2x_1} + \frac{KD}{x_1} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} s/2 + (s+h)x_2^2/(2x_1^2) - KD/x_1^2 \\ (s+h)x_2/x_1 - s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \begin{pmatrix} ((s+h)x_2^2 + 2KD)/x_1^3 & -(s+h)x_2/x_1^2 \\ -(s+h)x_2/x_1^2 & (s+h)/x_1 \end{pmatrix}$$

Haluamme nyt määrittää päätösmuuttujien x_1 ja x_2 optimiarvot, joilla f saa minimiarvonsa. Välttämätön ehto on

$$\nabla f = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} s/2 - (s+h)x_2^2/(2x_1^2) - KD/x_1^2 = 0 \\ (s+h)x_2/x_1 - s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \sqrt{2KD(s+h)/(sh)} \\ x_2^* = \sqrt{2KDs/((s+h)h)} \end{cases}$$

Koska päätösmuuttujat x_1 ja x_2 sekä parametrit K, D, h, s kaikki saavat positiiviset arvot, voimme päätellä

$$h_{11} = ((s+h)x_2^2 + 2KD)/x_1^3 > 0 \quad \text{ja} \quad |H_2| = |H| = 2(s+h)KD/x_1^4 > 0$$

joten \mathbf{H} on positiivisesti definiitti ja piste \mathbf{x}^* toteuttaa riittävän ehdon minimille.

5.4 Optimin etsiminen numeerisesti

Välttämätön ehto johtaa epälineaariseen yhtälöryhmään, jonka ratkaiseminen on usein liian työlästä. Silloin voidaan menetellä seuraavasti. (Taas käymme läpi perustelut kolmen muuttujan tapauksessa, mutta johtopäätökset on helppo yleistää.)

Olkoon päätösmuuttujien alkuarvovektori $\xi_0 = (x_0, y_0, z_0)^\top$. Jos seuraava likiarvo on $\xi_1 = (x_1, y_1, z_1)^\top$ ja merkitsemme

$$\mathbf{u}_1 = \xi_1 - \xi_0 = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

niin kokonaisdifferentiaalimukaan vastaavien funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ arvojen erotus on

$$f(\xi_1) - f(\xi_0) = f_x(\xi_0)dx + f_y(\xi_0)dy + f_z(\xi_0)dz = \nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{u}_1$$

Olkoon $h > 0$. Jos nyt valitsemme $\mathbf{u}_1 = h\nabla \mathbf{f}$, niin

$$f(\xi_1) - f(\xi_0) = h\nabla \mathbf{f}^\top \nabla \mathbf{f} \geq 0$$

Jos vastaavasti valitsemme $\mathbf{u}_1 = -h\nabla \mathbf{f}$, niin

$$f(\xi_1) - f(\xi_0) = -h\nabla \mathbf{f}^\top \nabla \mathbf{f} \leq 0$$

Siis:

Etsittäessä maksimia otetaan askelia gradientin suuntaan.

Etsittäessä minimiä otetaan askelia gradientin vastavektorin suuntaan.

Karkea algoritmi maksimin etsimiseksi on seuraava:

- Valitse alkuarvo ξ_0 ja parametrit $h > 0$, $\varepsilon > 0$.

- Toista kunnes $\|\xi_{k+1} - \xi_k\| < \varepsilon$

$$\xi_{k+1} = \xi_k + h\nabla \mathbf{f}(\xi_k)$$

Ongelmaksi muodostuu joskus se, että epälineaarisen funktion osittaisderivaatat saattavat saada itseisarvoltaan melko suuria arvoja, jolloin gradienttivektori on pitkä. Edellä kuvattu rekursio ”karkaa helposti käsistä.” Eräs mahdollisuus on korjata algoritmi muotoon

- Valitse alkuarvo ξ_0 ja parametrit $h > 0$, $\varepsilon > 0$.

- Toista kunnes $\|\nabla \mathbf{f}(\xi_{k+1})\| < \varepsilon$

$$\xi_{k+1} = \xi_k + h \nabla \mathbf{f}^\circ(\xi_k) = \xi_k + h \frac{\nabla \mathbf{f}(\xi_k)}{\|\nabla \mathbf{f}(\xi_k)\|}$$

Kolmas versio samasta naivista ideasta on

- Valitse alkuarvo ξ_0 ja parametrit $h > 0$, $\varepsilon > 0$.
- Toista kunnes $h < \varepsilon$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \nabla \mathbf{f}(\xi_k)$$

$$\xi_{k+1} = \xi_k + h \mathbf{u}_{k+1}^0$$

jos $\mathbf{u}_{k+1}^\top \mathbf{u}_k < 0$, niin pienennä h :ta

Kun numeerinen optimin etsintä tehdään oikeaoppisesti, suoritetaan niin sanottu ”viivahaku”. Tämä menettely käsitellään optimoinnin jatkokurssilla. Edellä esitellyt algoritmit ovat hyödyllisiä siksi, että ne on helppo toteuttaa vaikkapa excelillä.

Esimerkki 5.4.1 Määritä funktion $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 3x - xy$ minimikohta. Valitaan

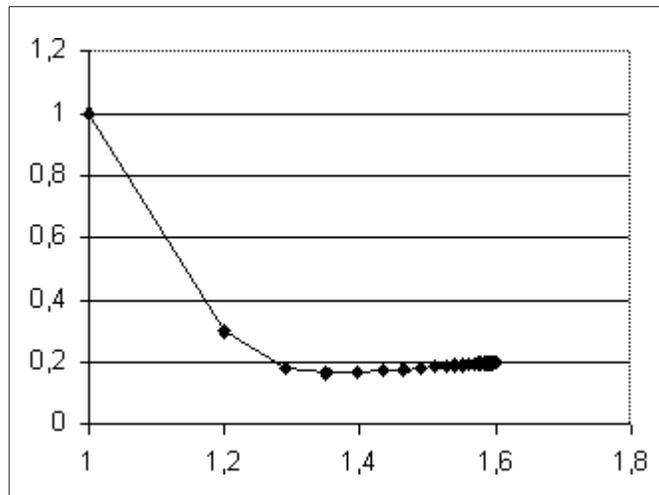
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja } h = 0.1$$

Rekursio yhtälö on

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} 2x_k - y_k - 3 \\ 8y_k - x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8x_k + 0.1y_k + 0.3 \\ 0.1x_k + 0.2y_k \end{pmatrix}$$

ja excelin antama likiarvopisteiden jono tasossa lähestyy pistettä

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$



5.5 Rajoitettu epälineaarinen optimointi

Tässä luvussa rajoitumme tutkimaan optimointiongelmia, jotka ovat muotoa

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{array}$$

Oletamme siis, että

1. ongelma on minimointiongelma,
2. epäyhtälörajoitteet ovat tyyppiä " \leq " ja
3. lisäksi oletamme, että kaikki funktiot (f, g_i, h_j) voidaan derivoida jatkuvasti niin monta kertaa kuin kulloinkin haluamme.

Oletukset 1 ja 2 saadaan aina järjestettyä, mutta sileysvaatimus 3 ei ole aina järjestettävissä. Sivuumme nyt tämän ongelman.

5.5.1 Graafinen ratkaisu

Kun $\mathbf{x} = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ voidaan ongelmaa tutkia graafisesti (x, y) -tasossa. Ongelman

$$\begin{cases} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & (h_j(\mathbf{x}) = 0) \end{cases}$$

graafisen ratkaisemisen vaiheet voidaan kuvata karkeasti seuraavasti.

(1) Piirrä käypä alue K

(1.1) Kaikilla i : Piirrä käyrä $g_i(x, y) = 0$ ja piirrä käyrän pisteeseen \mathbf{x} pieni nuoli suuntaan $-\nabla g_i$. (Nuoli osoittaa käyvän puolen.) (1.3) Piirrä käyrä $h(x, y) = 0$. (1.4)

Merkitse kuvaan K

(2) Piirrä kuvaan tasa-arvokäyriä

Muutamalla z :n arvolla: Piirrä käyrä $f(x, y) = z$ ja piirrä käyrälle $-\nabla f$

(3) Tee johtopäätös

Esimerkki 5.5.1 Tutkitaan ongelmaa

$$\begin{cases} \min & 2x + y \\ \text{st} & x^2 - y - 3 \leq 0 \\ & -x^2 + y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

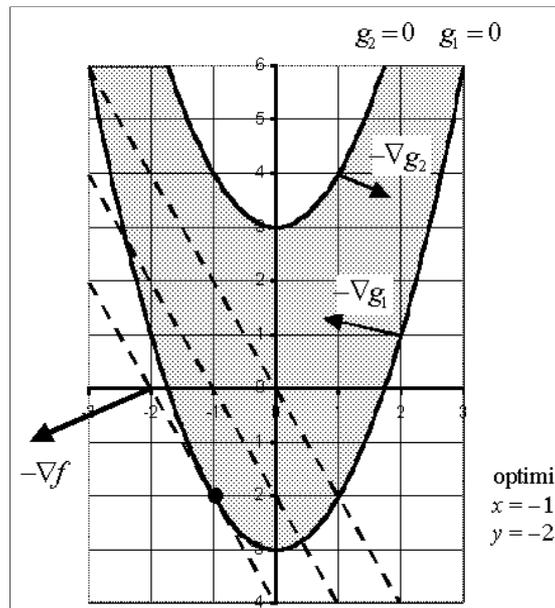


Figure 5.33: Esimerkin 5.5.1 graafinen ratkaisu.

$$g_1(x, y) = x^2 - y - 3 \Rightarrow -\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -\nabla g_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2(x, y) = -x^2 + y - 3 \Rightarrow -\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -\nabla g_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = 2x + y \Rightarrow -\nabla f = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kuvasta 5.33 näemme, että optimipiste on paikassa, jossa tavoitesuora sivuaa käyrää $g_1(x, y) = 0$. Siis

$$\begin{aligned} \nabla f &= -\nabla g_1 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Esimerkki 5.5.2 Tarkastellaan yritystä, joka toimittaa varastonsa kautta tuotteita asiakkaille. Vuotuinen kysyntä on $D = 1000$ (tuotetta/vuosi), varaston yksikköylläpitokustannus on $h = 9$ (€ / tuote / vuosi), puutekustannus on $s = 16$ (€ / tuote / vuosi) ja tilauskustannus on $K = 5$ (€ / tilaus). Yritys määrittää tilauserän koon x_1 ja maksimivaraston koon x_2 puutteen sallivan varastomallin (5.3.1) mukaisesti. Päätösmuuttujien optimiarvoiksi saadaan

$$x_1^* = \sqrt{2KD(s+h)/(sh)} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot (16+9)/(16 \cdot 9)} = 500/12 \approx 42$$

$$x_2^* = \sqrt{2KDs/((s+h)h)} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot 16/((16+9) \cdot 9)} = 400/15 \approx 27$$

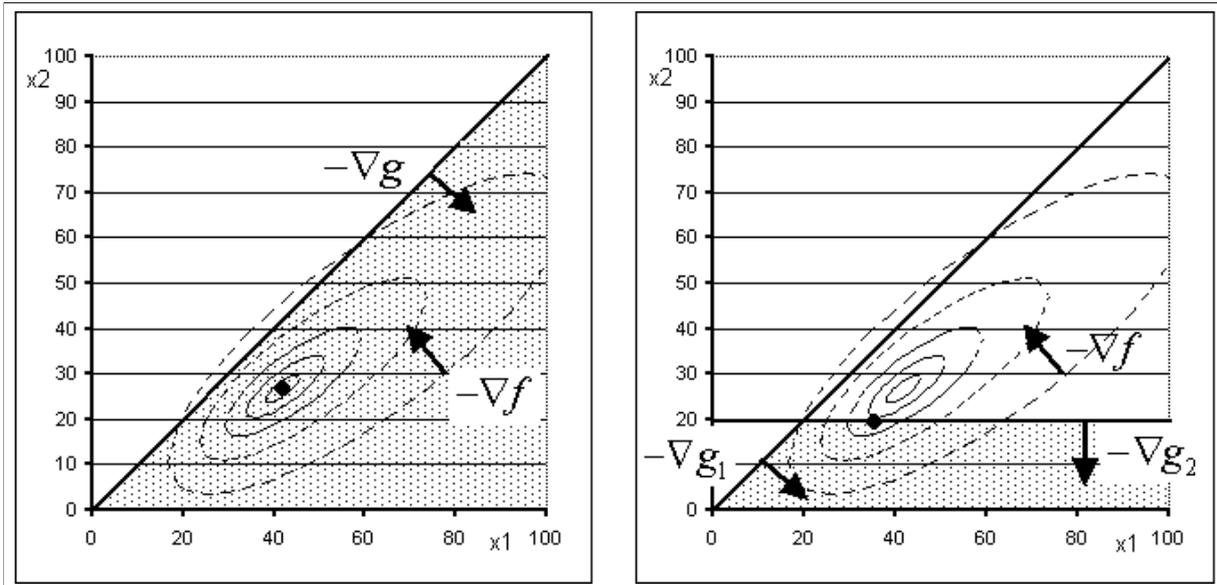


Figure 5.34: Esimerkin 5.5.2 graafinen ratkaisu a) alkuperäinen ja b) lisäehdolla $x_2 \leq 20$.

Yrityksen käytettävissä olevaan varastoon mahtuu vain 20 tuotetta. Alkuperäisen optimointimallin

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 h}{2x_1} + \frac{(x_1 - x_2)^2 s}{2x_1} + \frac{KD}{x_1} \\ \text{ehdolla} \quad & x_2 - x_1 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

sijasta on siis ratkaistava rajoitettu versio

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 h}{2x_1} + \frac{(x_1 - x_2)^2 s}{2x_1} + \frac{KD}{x_1} \\ \text{ehdolla} \quad & x_2 - x_1 \leq 0 \\ & x_2 - 20 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Kummankin mallin graafinen tarkastelu on kuvassa (5.34). Kuvasta nähdään, että ratkaisu on $x_2 = 20$ (tasan) ja $x_1 \approx 35$. Asia varmistuu kokeilemalla

$$\begin{aligned} f(34; 20) &= \frac{400 \cdot 9}{68} + \frac{14^2 \cdot 16}{68} + \frac{5000}{34} \approx 246.12 \\ f(35; 20) &= \frac{400 \cdot 9}{70} + \frac{15^2 \cdot 16}{70} + \frac{5000}{35} \approx 245.71 \\ f(36; 20) &= \frac{400 \cdot 9}{72} + \frac{16^2 \cdot 16}{72} + \frac{5000}{36} \approx 245,78 \end{aligned}$$

5.5.2 Laskeva ja käypä suunta

Kun ratkaistaan numeerisesti optimointitehtävää

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{array}$$

lähdetään liikkeelle alkuratkaisusta \mathbf{x}_0 . Parannetaan ratkaisua siirtymällä askelen \mathbf{d} verran uuteen ratkaisuun

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$$

Oletamme nyt, että askel \mathbf{d} on nyt niin lyhyt, että voimme arvioida funktioiden arvojen muutoksia kokonaisdifferentiaalilla avulla

$$df = f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} d_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d_n = \nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{d}$$

ja

$$dg_i = g_i(\mathbf{x}_1) - g_i(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_1} d_1 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n} d_n = \nabla \mathbf{g}_i^\top \mathbf{d}$$

Mahdollinen askelvektori \mathbf{d} on *laskeva suunta*, jos

$$\nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{d} < 0$$

ja aktiivisen rajoitteen g_i kannalta *käypä suunta*, jos

$$\nabla \mathbf{g}_i^\top \mathbf{d} \leq 0.$$

Jos \mathbf{x}_0 on käyvän alueen sisäpiste (ei aktiivisia rajoitteita), niin kannattaa valita

$$\mathbf{d} = -\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Jos f :n gradientti pisteessä \mathbf{x}_0 ei ole nolla, niin uusi ratkaisu \mathbf{x}_1 on edellistä parempi. Jos f :n gradientti pisteessä \mathbf{x}_0 on nolla, niin prosessi pysähtyy välttämättömän ehdon ($\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$) toteuttavaan pisteeseen. (Huom: Tämä ei todista, että \mathbf{x}_0 olisi optimi-ratkaisu!).

Jos \mathbf{x}_0 on käyvän alueen reunapiste (aktiiviset rajoitteet $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \dots, p$), niin edellä tehty askelvalinta ei välttämättä ole käypä. Nyt on valittava mahdollisimman hyvä käypä suunta. Ratkaistaan siis tehtävä

$$\begin{cases} \text{Min} & z = \nabla \mathbf{f}^\top \mathbf{d} \\ \text{st.} & \nabla \mathbf{g}_i^\top \mathbf{d} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & |d_k| \leq h, \quad k = 1, \dots, n \end{cases}$$

missä $h > 0$ on valittu askelpituus. Jos LP-mallin tavoitefunktion optimiarvo $z^* < 0$, niin \mathbf{d}^* on laskeva käypä askelsuunta ja asetamme $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}^*$. Jos $z^* \geq 0$, niin emme löydä laskevaa käypää askelsuuntaa, ja \mathbf{x}_0 on lokaali minimikohta.

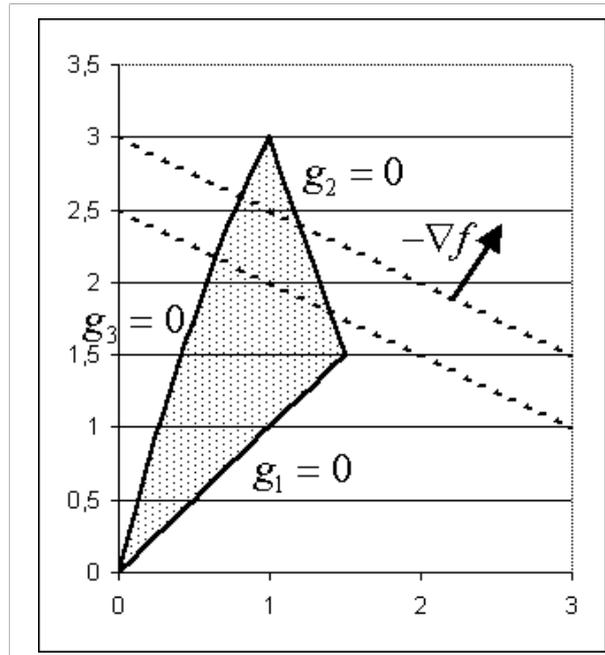


Figure 5.35: Esimerkin 5.5.3 käypä alue.

Esimerkki 5.5.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \\ \text{st.} \quad g_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \leq 0 \\ \quad \quad g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \\ \quad \quad g_3(x_1, x_2) = -4x_1 + x_2 + x_1^2 \leq 0 \end{array} \right.$$

Tutkimme nyt käyvän alueen nurkkapisteet (ks. kuva (5.35))

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pisteessä A:

$$-\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad -\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -\nabla g_3 = \begin{pmatrix} 4 + 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paras käypä laskeva askelsuunta löytyy mallilla

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad z = -d_1 - 2d_2 \\ \text{st.} \quad \begin{array}{l} d_1 - d_2 \leq 0 \\ -4d_1 + d_2 \leq 0 \\ |d_1| \leq 1 \\ |d_2| \leq 1 \end{array} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{LINDO}} z^* = -3, \mathbf{d}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Siis A ei ole minimipiste.}$$

Pisteessä B:

$$-\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad -\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -\nabla g_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Paras käypä laskeva askelsuunta löytyy mallilla

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad z = -d_1 - 2d_2 \\ \text{st.} \quad \quad \quad d_1 - d_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad 3d_1 + d_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad |d_1| \leq 1 \\ \quad \quad \quad |d_2| \leq 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{LINDO}} z^* = -1.67, \mathbf{d}^* = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siis B ei ole minimipiste.

Pisteessä C:

$$-\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad -\nabla \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -\nabla \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 4 + 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paras käypä laskeva askelsuunta löytyy mallilla

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad z = -d_1 - 2d_2 \\ \text{st.} \quad \quad \quad 3d_1 + d_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad -6d_1 + d_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad |d_1| \leq 1 \\ \quad \quad \quad |d_2| \leq 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{LINDO}} z^* = 0, \mathbf{d}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siis C on lokaali minimipiste.

5.5.3 Yhtälörajoite

Jos optimointitehtävässä on yhtälörajoite, ja jokin muuttuja voidaan ratkaista rajoiteyhtälöstä, niin sijoitetaan saatu lauseke muuttujan paikalle funktioon ja muihin rajoitteisiin.

Esimerkki 5.5.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st} \quad \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3 \leq 10 \\ \quad \quad \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$$

Viimeisestä rajoitteesta voimme ratkaista

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

jolloin malli menee muotoon

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2 + 1 \\ \text{st} \quad \quad x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \leq 9 \end{array} \right.$$

Esimerkki 5.5.5 Esimerkin (5.5.2) rajoitetun ($x_2 \leq 20$) ongelman graafinen esitys osoittaa, että toinen rajoite on optimissa aktiivinen (toteutuu yhtälönä). Jotta saisimme päätösmuuttujien optimiarvot tarkasti, voimme siis ratkaista ongelman

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = \frac{9x_2^2 + 16(x_1 - x_2)^2 + 10000}{2x_1} \\ \text{ehdolla} \quad & x_2 - x_1 \leq 0 \\ & x_2 - 20 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x_2=20} \min \quad & f(x_1, x_2) = \frac{6800 + 8(x_1 - 20)^2}{x_1} \\ \text{ehdolla} \quad & x_1 \geq 20 \end{aligned}$$

josta derivaatan nollakohtana saadaan optimiksi

$$x_1^* = \frac{100}{2\sqrt{2}} \approx 35.36$$

Esimerkki 5.5.6 Sijoituskeino ei aina ole helppo ratkaisu. Esimerkiksi ongelma

$$\begin{cases} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st} & x_1^2 + x_2^2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

on hankala. Yhtälörajoitteen käsittely vaatii huolellisuutta. Tarjolla oleva ”helpon tuntuinen” temppu

$$\begin{cases} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st} & x_1^2 + x_2^2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2} \begin{cases} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st} & -x_3^2 + x_3 \leq 9 \end{cases}$$

on suorastaan harhaanjohtava. Saatujen ratkaisujen mielekkyys kannattaa aina tarkistaa alkuperäisten rajoitteiden avulla. Sijoituskeinoa parempi menetelmä on Lagrangen kertojat, jotka esitellään seuraavassa.

5.5.4 Lagrangen kertojat

Lähestymme päätulosta useassa vaiheessa ja aloitamme melko yksinkertaisesta ongelmasta.

Tapaus: yksi yhtälörajoite

Tarkastellaan ensin perusongelmaa, jossa on yksi yhtälörajoite

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \\ \text{st} \quad & h(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

(Huomaa: Vaikka yhtälörajoite tasossa merkitsee sitä, että käypä alue rajoittuu jonkin käyrän pisteiksi, niin useamman päätösmuuttujan tilanteessa ($n \geq 3$) käypä alue ei ole käyrän osa vaan sillä on vapausasteita enemmän kuin yksi. Vrt. esim. 5.5.4)

Olkoon $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$ optimipiste ja olkoon differentiaali $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^\top$ sellainen, että

$$\mathbf{x}^* + d\mathbf{x} \in K \Leftrightarrow h(\mathbf{x}^* + d\mathbf{x}) = 0$$

Silloin koska \mathbf{x}^* on optimipiste, niin

$$(5.4) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

ja koska $\mathbf{x}^* + d\mathbf{x} \in K$, niin

$$(5.5) \quad dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Toisin sanoen

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)^\top d\mathbf{x} = 0 \text{ ja } \nabla h(\mathbf{x}^*)^\top d\mathbf{x} = 0$$

Yhtälön (5.5) takia differentiaalia $d\mathbf{x}$ ei voi valita miten tahansa. Oletamme, nyt että optimipisteessä

$$(5.6) \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \neq 0$$

(Tarvittaessa vaihdetaan muuttujien järjestystä.)

Differentiaalın $d\mathbf{x}$ komponentit $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$ voidaan nyt valita vapaasti.

$$\left. \begin{array}{l} h\text{:n sileyks} \\ \text{ehto (5.6)} \end{array} \right\} \Rightarrow dx_n \text{ voidaan ratkaista ehdosta (5.5)}$$

Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Ehdoista (5.4) ja (5.5) seuraa, että

$$(5.7) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

Valitaan λ siten, että

$$(5.8) \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_n} = 0$$

Siis yhtälö (5.7) voidaan kirjoittaa

$$(5.9) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

Koska dx_1, dx_2, \dots, dx_n voidaan valita vapaasti, voi yhtälö (5.9) olla tosi vain ehdolla

$$(5.10) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

Saadut $n+1$ yhtälöä ($h(\mathbf{x}) = 0$, (5.8), (5.10)) muodostavat ryhmän, josta ratkaistaan $n+1$ tuntematonta

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*$$

Määritelmä 5.5.1 On tapana määritellä *Lagrangen funktio* (engl. Lagrangian)

$$L = f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$$

Lause 5.5.1 Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & h(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

on minimipiste \mathbf{x}^* , niin on olemassa $\lambda^* \in \mathbb{R}$ siten, että pisteessä $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= h(\mathbf{x}^*) = 0 \end{aligned}$$

(eli $\nabla L = \mathbf{0}$)

Huomaa, että tämä on välttämätön mutta ei riittävä ehto. Yleensä saadaan monta ehdokasta, joista yksi on optimi.

Esimerkki 5.5.7

$$\begin{cases} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st.} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Lagrangen funktio on

$$L = 2x_1 + x_2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10)$$

Välttämätön ehto optimille on

$$\nabla L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ 2x_3 + 2\lambda x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Kolmannen yhtälön perusteella joko $x_3 = 0$ tai $\lambda = -1$.

Tapaus $x_3 = 0$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x_1 = 0 & (1) \\ 1 + 2\lambda x_2 = 0 & (2) \\ x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0 & (3) \end{cases} \quad \begin{aligned} (1)\&(2) \Rightarrow x_1 = -\lambda^{-1} = 2x_2 - 2 & (4) \\ (3)\&(4) \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Saamme kaksi välttämättömät ehdot toteuttavaa pistettä

ehdoka #1:

$$\mathbf{x}_{\#1} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{\#1} = -1/(2\sqrt{2}), \quad f(\mathbf{x}_{\#1}) = 5\sqrt{2}$$

ehdoka #2:

$$\mathbf{x}_{\#2} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{\#2} = 1/(2\sqrt{2}), \quad f(\mathbf{x}_{\#2}) = -5\sqrt{2}$$

Tapaus $\lambda = -1$

$$\begin{cases} 2 - 2x_1 = 0 & \rightarrow x_1 = 1 \\ 1 - 2x_2 = 0 & \rightarrow x_2 = 1/2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10 = 0 & \rightarrow x_3 = \pm\sqrt{35}/2 \end{cases}$$

Saamme vielä kaksi välttämättömät ehdot toteuttavaa pistettä

ehdoka #3:

$$\mathbf{x}_{\#3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{35} \end{pmatrix}, \lambda_{\#3} = -1, \quad f(\mathbf{x}_{\#3}) = 45/4$$

ehdoka #4:

$$\mathbf{x}_{\#4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{35} \end{pmatrix}, \lambda_{\#4} = -1, \quad f(\mathbf{x}_{\#4}) = 45/4$$

Paras ehdoka on #2 eli

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^* &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ f(\mathbf{x}^*) &= -5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tapaus: monta yhtälörajoitetta

Vastaavalla tavalla kuin edellä voidaan perustella seuraava lause

Lause 5.5.2 Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{st} & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

on minimipiste \mathbf{x}^* , niin on olemassa reaalityyppiset $\lambda_j^*, j = 1, \dots, m$ siten, että pisteessä $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

(eli $\nabla L = \mathbf{0}$)

Huomaa, että tämä on välttämätön mutta ei riittävä ehto. Yleensä saadaan monta ehdokasta, joista yksi on optimi.

Esimerkki 5.5.8

$$\begin{cases} \text{Min} & 2x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{st.} & x_1^2 + x_3^2 - 10 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Lagrangen funktio on

$$L = 2x_1 + x_2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_3^2 - 10) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Välttämätön ehto optimille on

$$\nabla L = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0 \\ \quad \quad \quad 1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_3 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 = 0 \\ \quad \quad \quad x_1^2 + x_3^2 - 10 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Toinen yhtälö $\rightarrow \lambda_2 = -1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 = -1 & \rightarrow x_1 = -1/(2\lambda_1) \\ (1 + \lambda_1)x_3 = 1/2 & \rightarrow x_3 = 1/(2 + 2\lambda_1) \\ x_1^2 + x_3^2 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Kun sijoitetaan x_1 ja x_3 kolmanteen yhtälöön ja tehdään muuttujan vaihto $\lambda_1 = u - 1/2$, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{4(1 + \lambda_1)^2} &= 10 \\ \Leftrightarrow (1 + \lambda_1)^2 + \lambda_1^2 &= 40\lambda_1^2(1 + \lambda_1)^2 \\ \Leftrightarrow (u + 1/2)^2 + (u - 1/2)^2 &= 40(u - 1/2)^2(u + 1/2)^2 \\ \Leftrightarrow 2u^2 + 1/2 &= 40(u^2 - 1/4)^2 \\ \Leftrightarrow 40u^4 - 22u^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{11 \pm \sqrt{41}}{40}} \end{aligned}$$

Saamme neljä ehdokasta minimipisteeksi

λ_1	x_1	x_3	x_2	$f(\mathbf{x})$
0.1596	-3.1327	0.4312	3.7016	-2.3780
-0.1610	3.1056	0.5959	-2.7016	3.8648
-1.1596	0.4312	-3.1327	3.7016	14.3780
-0.8390	0.5959	3.1056	-2.7016	8.1352

Paras ehdokas on ensimmäinen, joten minimi on

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} -3.1327 \\ 3.7016 \\ 0.4312 \end{pmatrix}, \quad \lambda^* = \begin{pmatrix} 0.1596 \\ -1.0000 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^*) = -2.3780$$

Tapaus: epäyhtälörajoitteet

Seuraavaksi tutkimme yleistä ongelmaa. Muotoilemme ensin lauseen ja annamme esimerkin. Todistus jätetään jatkokurssille.

Lause 5.5.3 Jos optimointitehtävällä

$$\begin{cases} \text{Min} & f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{st} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

on minimipiste \mathbf{x}^* , niin on olemassa reaalityyppiset $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$ ja λ_j^* , $j = 1, \dots, m$ siten, että optimipisteessä $(\mathbf{x}^*, \mu^*, \lambda^*)$ Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \mu_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \\ g_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Käytämme ehdoille nimityksiä

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L &= \mathbf{0} && \text{optimaalisuus (optimality)} \\ \mu &\geq \mathbf{0} && \text{ei-negatiivisuus (non-negativity)} \\ \mu^\top \mathbf{g} &= 0 && \text{komplementtaarisuus (complementarity)} \\ \mathbf{g} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} &= \mathbf{0} && \text{käyppöisyys (feasibility)} \end{aligned}$$

Komplementtaarieusehto sanoo, että jos rajoite $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ei ole aktiivinen optimissa, niin $\mu_i = 0$. Vastaavasti, jos optimissa $\mu_i > 0$, niin $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ eli ollaan sillä käyän alueen reunan osalla, jossa $g_i(\mathbf{x}) = 0$.

Esimerkki 5.5.9

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x, y) = 2x + y \\ \text{st.} & g_1(x, y) = x^2 - y - 4 \leq 0 \\ & g_2(x, y) = x^2 + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$L = 2x + y + \mu_1(x^2 - y - 4) + \mu_2(x^2 + y - 4)$$

Välttämätön ehto minimille saa muodon

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0 \quad (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{L} = \mathbf{0}) \\ 1 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu_1(x^2 - y - 4) = 0 \quad (\mu_i g_i = 0) \\ \mu_2(x^2 + y - 4) = 0 \\ \hline \mu_1 \geq 0 \quad (\mu_i \geq 0) \\ \mu_2 \geq 0 \\ x^2 - y - 4 \leq 0 \quad (g_i \leq 0) \\ x^2 + y - 4 \leq 0 \end{array} \right.$$

Tapaus $\mu_1 = \mu_2 = 0$ eli käyvän alueen sisäpisteet.

Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = 0 \quad rr \\ \vdots \end{array} \right.$$

Tapaus $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$ (g_2 on aktiivinen).

Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\mu_2 x = 0 \\ 1 + \mu_2 = 0 \quad \rightarrow \mu_2 = -1 \\ x^2 + y - 4 = 0 \\ \hline \mu_2 > 0 \quad rr \\ x^2 - y - 4 \leq 0 \end{array} \right.$$

Ei siis ehdokaspisteitä tässä reunan osassa.

Tapaus $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$ (g_1 on aktiivinen).

Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\mu_1 x = 0 \quad \rightarrow x = -1 \\ 1 - \mu_1 = 0 \quad \rightarrow \mu_1 = 1 \\ x^2 - y - 4 = 0 \quad \rightarrow y = -3 \\ \hline \mu_1 > 0 \quad ok \\ x^2 + y - 4 \leq 0 \quad ok \end{array} \right.$$

Saadaan ehdokaspiste $x = -1, y = -3, f(-1, -3) = 2 \cdot (-1) + (-3) = -5$.

Tapaus $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ (g_1 ja g_2 aktiivisia).

Välttämätön ehto saa muodon

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 x = 0 \quad \rightarrow \mu_1 = 3/2 \\ 1 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \quad \rightarrow \mu_2 = 1/2 \\ x^2 - y - 4 = 0 \quad \rightarrow y = 0 \\ x^2 + y - 4 = 0 \quad \rightarrow x = -2 \\ \hline \mu_1 > 0 \quad ok \\ \mu_2 > 0 \quad ok \end{array} \right.$$

Saadaan ehdokaspiste $x = -2$, $y = 0$, $f(-2, 0) = 2 \cdot (-2) + (0) = -4$.

Valitsemalla ehdokkaista paras, saamme

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}^*) = -5$$

Esimerkki 5.5.10 Seuraavaa esimerkkiä emme ratkaise loppuun saakka, vaan kirjoitamme vain välttämättömät ehdot minimille.

Tarkastellaan tuotevalintaongelmaa, kun yhden tuotteen kysyntä riippuu voimakkaasti myyntihinnasta (eli tuotteesta saatava kate riippuu valmistusmäärästä).

Yritys valmistaa kolmea tuotetta seuraavalla tavalla

	tuote 1	tuote 2	tuote 3	resurssi
valmistusmäärät	$x_1 = 25$	$x_2 = 20$	$x_3 = 70$	
kate / tuote	4	5	3	
valmistusaika / tuote	2	4	1	200
raaka-aine1 / tuote	10	6	12	1210
raaka-aine2 / tuote	20	15	10	1500

tuotteen 1 myyntihinta on nyt 20 ja valmistuskustannus 16, joista erotuksena saadaan kate 4. Kysynnän hintajousto on markkinointiosaston arvion mukaan -0.2 , joten voimme arvioida hinnan muutosta, jos tuotannon määrää muutetaan

$$-0.2 = \frac{p}{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dp} = \frac{20}{25} \cdot \frac{dx_1}{dp} \Rightarrow \frac{dp}{dx_1} = -0.25$$

Jos mallinamme kysynnän lineaarisella kysyntäfunktiolla, niin

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0.25(x_1 - 25) = 26.25 - 0.25x_1 \\ \Rightarrow \text{kokonaiskate} &= (p - 16)x_1 = 10.25x_1 - 0.25x_1^2 \end{aligned}$$

Kun otamme huomioon tuotteen 1 hintajouston, saamme optimoitavaksi tuotevalintaongelman

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 10.25x_1 - 0.25x_1^2 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{st.} \quad \quad \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 200 \\ \quad \quad \quad 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 1210 \\ \quad \quad \quad 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 \leq 1500 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_1 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_2 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = -10.25x_1 + 0.25x_1^2 - 5x_2 - 3x_3 \\ \text{st.} \quad \quad \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200 \leq 0 \\ \quad \quad \quad 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210 \leq 0 \\ \quad \quad \quad 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -x_1 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -x_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

Lagrangen funktio on

$$\begin{aligned} L = & -10.25x_1 + 0.25x_1^2 - 5x_2 - 3x_3 + \mu_1(2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200) \\ & + \mu_2(10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210) + \mu_3(20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500) - \mu_4x_1 - \mu_5x_2 - \mu_6x_3 \end{aligned}$$

ja minimin välttämättömät ehdot saavat muodon

$$\left\{ \begin{array}{l} -10.25 + 0.5x_1 + 2\mu_1 + 10\mu_2 + 20\mu_3 - \mu_4 = 0 \\ \quad \quad \quad -5 + 4\mu_1 + 6\mu_2 + 15\mu_3 - \mu_5 = 0 \\ \quad \quad \quad -3 + \mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 - \mu_6 = 0 \\ \quad \quad \quad \mu_1(2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200) = 0 \\ \quad \quad \quad \mu_2(10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210) = 0 \\ \quad \quad \quad \mu_3(20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500) = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_4x_1 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_5x_2 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_6x_3 = 0 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \mu_1 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_2 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_3 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_4 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_5 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \mu_6 \geq 0 \\ \quad \quad \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 200 \leq 0 \\ \quad \quad \quad 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 1210 \leq 0 \\ \quad \quad \quad 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 1500 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -x_1 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -x_2 \leq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -x_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

Vaihtoehtoisia tapauksia ($\mu_i = 0$ / $\mu_i > 0$) on $2^6 = 64$ tapausta, joista eräät näkee helposti mahdottomiksi. Jos esimerkiksi $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, niin toinen ja kolmas ehto ovat epätosia (tämä poistaa listalta 8 tapausta.) Tapausten läpikäynti on suoraviivainen, mutta työläs tehtävä, jonka nyt jätämme kesken.

Tutkitaan kuitenkin yrityksen nykyinen toimintapiste, jossa kaikki resurssirajoitteet ovat aktiivisia ($\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0$) ja kaikki merkkirajoitteet ovat epäaktiivisia

($\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 0$). Minimivälttämättömät ehdot menevät silloin muotoon

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.5x_1 + 2\mu_1 + 10\mu_2 + 20\mu_3 = 10.25 \\ 4\mu_1 + 6\mu_2 + 15\mu_3 = 5 \\ \mu_1 + 12\mu_2 + 10\mu_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 200 \\ 10x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 1210 \\ 20x_1 + 15x_2 + 10x_3 = 1500 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 25 \\ x_2 = 20 \\ x_3 = 70 \\ \mu_1 = 3.03 \\ \mu_2 = 0.59 \\ \mu_3 = -0.71 \rightarrow \mathbf{EI\ OPTIMI} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \\ \mu_3 > 0 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \end{array} \right.$$

Siis toteamme, että yrityksen nykyinen toimintatapa, joka on lineaarisen mallin mukainen optimiratkaisu, ei ole epälineaarisen mallin optimiratkaisu.

5.6 Epälineaarisen mallin resurssin varjohinta

Tutkitaan ongelmaa

$$\begin{cases} \min & z = f(\mathbf{x}, p) \\ \text{st.} & g_i(\mathbf{x}, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}, p) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

missä $p \in \mathbb{R}$ on mallin reaaliarvoinen parametri.

Kun parametrin arvo muuttuu hieman, muuttuu myös optimikohta ja tavoitefunktion optimiarvo.

$$p \rightarrow p + \Delta p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x}^* \rightarrow \mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}^* \\ z^* \rightarrow z^* + \Delta z^* \end{cases}$$

Raja-arvo

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta p} = \frac{dz^*}{dp} \in \mathbb{R}$$

on reaaliluku ja raja-arvo

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}^*}{\Delta p} = \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} = \begin{pmatrix} dx_1^*/dp \\ \vdots \\ dx_n^*/dp \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

on vektori.

Kokonaisdifferentiaalin mukaan optimipisteessä

$$\begin{aligned} \frac{dz^*}{dp} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{dp} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2^*}{dp} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n^*}{dp} + \frac{\partial f}{\partial p} \\ (5.11) \quad &= \nabla \mathbf{f}^\top \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} + \frac{\partial f}{\partial p} \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$(5.12) \quad \mu_i \frac{dg_i}{dp} = \mu_i \nabla \mathbf{g}_i^\top \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} + \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial p} = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$(5.13) \quad \lambda_j \frac{dh_j}{dp} = \lambda_j \nabla \mathbf{h}_j^\top \frac{d\mathbf{x}^*}{dp} + \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial p} = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Optimipisteessä pätee edellisen kappaleen mukaan

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{x}} L = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \nabla_{\mathbf{x}} \left(f + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j \right) = \mathbf{0} \\ (5.14) \quad \Leftrightarrow & \nabla \mathbf{f} = - \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla \mathbf{g}_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla \mathbf{h}_j \end{aligned}$$

Yhdistämällä kaavat (5.11), (5.14), (5.12) ja (5.13) saadaan tavoitefunktion optimaarivon muutosherkkyys

$$(5.15) \quad \frac{df(\mathbf{x}^*, p)}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial p} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial p}$$

Esimerkki 5.6.1

$$\begin{cases} \min & z = -x_1 x_2 \\ \text{st.} & x_1^2 - 4x_1 + x_2 \leq 0 \\ & px_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Kun $p = 1$ saamme Lagrangen funktioksi

$$L = -x_1 x_2 + \mu_1 (x_1^2 - 4x_1 + x_2) + \mu_2 (x_1 - x_2)$$

ja välttämättömät ehdot minimille

$$\begin{cases} -x_2 + 2\mu_1 x_1 - 4\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ -x_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 (x_1^2 - 4x_1 + x_2) = 0 \\ \mu_2 (x_1 - x_2) = 0 \\ \hline \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Tapaus $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Toinen ja ensimmäinen ehto antavat suoraan $x_1 = x_2 = z = 0$

Tapaus $\mu_1 > 0, \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} -x_2 + 2\mu_1 x_1 - 4\mu_1 = 0 \\ -x_1 + \mu_1 = 0 \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2 = 0 \\ \hline \mu_1 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2.5 \\ x_2 = 3.75 \\ \mu_1 = 2.5 \\ \mu_2 = 0 \\ z = -9.375 \end{cases}$$

Tapaus $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$

$$\begin{cases} -x_2 + \mu_2 = 0 \\ -x_1 - \mu_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ \hline \mu_2 > 0 \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_2 = 0 \text{ ei käy}$$

Tapaus $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_2 + 2\mu_1 x_1 - 4\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ -x_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 3 \quad (\text{tai } x_1 = 0) \\ x_1 - x_2 = 0 \quad \rightarrow x_2 = x_1 \\ \hline \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{array} \right.$$

Siis

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu_1 + \mu_2 = 3 \\ \mu_1 - \mu_2 = 3 \quad \rightarrow \mu_1 = 2, \mu_2 = -1 \quad \text{ei käy} \\ \hline \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{array} \right.$$

Kun $p = 1$ optimiratkaisu on siis

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = 2.5 \\ x_2^* = 3.75 \\ \mu_1^* = 2.5 \\ \mu_2^* = 0 \\ z^* = -9.375 \end{array} \right.$$

Laskemme seuraavaksi dz^*/dp kaavalla (5.15)

$$\begin{aligned} \frac{dz^*}{dp} &= \frac{\partial f}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial p} + \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial p} \\ &= \frac{\partial(-x_1 x_2)}{\partial p} + \mu_1 \frac{\partial(x_1^2 - 4x_1 + x_2)}{\partial p} + \mu_2 \frac{\partial(px_1 - x_2)}{\partial p} \\ &= \mu_2^* x_1^* = 0 \end{aligned}$$

5.6.1 Resurssin varjohinta

Tarkastellaan erityisesti resurssia parametrina.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{st.} \quad \tilde{g}_i(\mathbf{x}) \leq b_i \\ \quad \quad \tilde{h}_j(\mathbf{x}) = \beta_j \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{st.} \quad g_i(\mathbf{x}) = \tilde{g}_i(\mathbf{x}) - b_i \leq 0 \\ \quad \quad h_j(\mathbf{x}) = \tilde{h}_j(\mathbf{x}) - \beta_j = 0 \end{array} \right.$$

Kaavan (5.15) avulla saamme resurssin b_k varjohinnan.

$$\frac{dz^*}{db_k} = \frac{\partial f}{\partial b_k} + \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial b_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial b_k} = -\mu_k$$

Vastaavasti

$$\frac{dz^*}{d\beta_k} = \frac{\partial f}{\partial \beta_k} + \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial \beta_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial \beta_k} = -\lambda_k$$

Siis

μ_i on epäyhtälörajoitteen $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ varjohinta

λ_j on yhtälörajoitteen $h_j(\mathbf{x}) = \beta_j$ 'varjohinta'

6. Jonoteoriaa (Queueing theory)

Tarinan mukaa eräs torimyyjä tarjosi joka aamu naapureilleen ilmaisen kyydin kaupunkiin. Vastapalvelukseksi naapurit muodostivat torimyyjän kojun eteen jonon, jota hiukan hidasteleva myyjä yritti pitää yllä. Jono houkutteli lisää asiakkaita ja hyvinä päivinä kauppa saatiin käyntiin vauhdikkaasti.

Tarkastellaan toiseksi esimerkkiä, jossa yrityksen oma huoltoyksikkö korjaa tuotantolaitoksen vioittuneet koneet. Oletamme, että huoltoyksikkö voi korjata vain yhtä konetta kerrallaan. Vioittuneen koneen korjaus kestää ajan, joka riippuu vian laadusta. Korjauksen kuluessa saattaa muihin koneisiin tulla uusia vikoja. Vioittuneet koneet "alkavat jonottaa" huoltoyksikön palveluja.

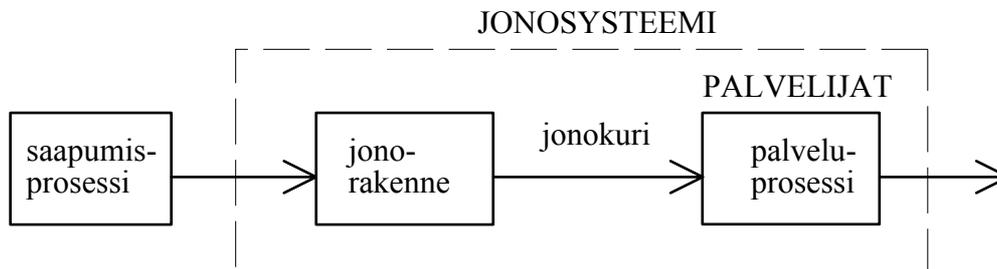
Kustannuksia aiheutuu huoltopalvelun ylläpidosta, korjaustyön aiheuttamasta materiaali- ja varaosakulutuksesta sekä siitä, että jonottaessaan korjausta kone on pois tuottavasta toiminnasta. Jos huoltopalvelu ylimitoitetaan, ovat huoltomiehet suuren osan ajasta jouten, mikä aiheuttaa turhia kustannuksia. Jos huoltopalvelu alimitoitetaan, ovat huoltomiehet suuren osan ajastaan työssä. Silloin palvelukustannus per korjausoperaatio saadaan alas. Mutta samalla korjausta odottavat koneet joutuvat jonottamaan kauan, ja tästä aiheutuva tuotannon menetys saattaa olla suuri.

Optimaalinen jono huomioi palvelun ylläpidon kustannukset sekä jonotuksesta aiheutuvat kustannukset ja minimoi näiden summan.

Eräitä esimerkkejä jonotuksesta ovat

- * kassajono valintamyymälässä,
- * autojono liikennevaloissa,
- * potilasjono terveyskeskuksessa,
- * lähtövuoroa jonottavat lentokoneet,
- * korjausta jonottavat koneet (edellä),
- * puhtaaksikirjoitusta odottavat kirjeet,
- * tietokoneen resursseja jonottavat prosessit (esim. kirjoitinjono).

Kuvatessamme jonosysteemiä käytämme seuraavaa kaaviota.



Saapumisprosessi (Arrival process) :

Asiakkaiden saapuminen jonosysteemiin on yleensä satunnaista. (Asiakkaat voivat nyt olla paitsi ihmisiä, myös koneita, tilauksia, sanomia, anomuksia tms.) Kahden peräkkäin saapuneen asiakkaan saapumisaikojen aikaväli vaihtelee. Aikavälin odotusarvosta voimme laskea keskimääräisen palvelutarpeen.

Mitä enemmän aikavälit vaihtelevat, sitä useammin jonot venähtävät, vaikka palveluprosessi olisikin mitoitettu yli keskimääräisen palvelutarpeen. Jonoa optimoitaessa ei siis riitä tuntea keskimääräinen aikaväli, vaan on tunnettava aikavälin **jakauma**. Yleisesti mallia luotaessa käytetään eksponenttijakaumaa tai Poisson-jakaumaa.

Lähde, josta asiakkaat tulevat voi olla äärellinen (vikautuvia koneita äärellinen määrä) tai niin suuri, että sitä sanotaan äärettömäksi (kaupan asiakaskunta).

Jonorakenne (queue structure) :

Jonoja voi olla yksi tai useampi rinnakkainen. Jonossa ei saa etuilla, mutta joskus voi siirtyä viereisen jonon hännille. Jonon pituus on rajallinen, mutta tilanteesta riippuu, onko tällä merkitystä. (Jos jonon rajallisella pituudella ei ole merkitystä, sanomme, että jonon pituus on ääretön.)

Jonokuri eli palvelujärjestys (service discipline) :

Jonokuri kertoo, miten palvelija(t) valitsee seuraavan palveltavan asiakkaan. Yleisin jonokuri on FIFO (first-in-first-out) josta jonomallien yhteydessä joskus käytetään nimitystä FCFS (first-come-first-served). Tietojenkäsittelyssä voidaan käyttää vastaavaa

pino-kuria LIFO (tai LCFS). Voidaan myös jakaa asiakkaat tärkeysluokkiin, jolloin tärkeät asiakkaat läpäisevät jonot muita nopeammin.

Palvelijat (service facility, server) :

Palveluprosessissa voi olla rinnakkaisia **kanavia** ja/tai peräkkäisiä **palveluasemia**.

Palveluaika voi olla vakio tai satunnainen. Satunnaisen palveluajan jakaumana käytetään yleensä eksponenttijakaumaa tai ns. Erlang-jakumaa.

Keskiarvosuureet:

Kus systeemin toimintaa seurataan tietty aika (1 min, 1 h tms.) ja tarkastelu toistetaan riittävän monta kertaa, saadaan määritettyä eräitä systeemiä kuvaavia keskiarvolukuja

Saapumistiheys (arrival rate, input rate) =

$$\lambda = \frac{\text{saapuvien asiakkaiden keskimääräinen lukumäärä}}{\text{tarkastelun kesto}}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \text{saapumisten keskimääräinen aikaväli}, \quad (2)$$

palvelukanavan palvelutiheys (service rate, throughput rate) =

$$\mu = \frac{\text{palveltavien asiakkaiden keskimääräinen lukumäärä}}{\text{palveluun käytetty aika}}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu} = \text{keskimääräinen palveluaika}, \quad (4)$$

Huomaa, että saapumistiheyttä määritettäessä kellot käyvät koko ajan, ja suure siis kuvaa todellista asiakasvirtaa koko systeemin läpi. Palvelutiheyttä määritettäessä kello pysäytetään joutoajaksi, joten suure kuvaa yhden palvelukanavan kapasiteettia (suurinta mahdollista keskimääräistä asiakasvirtaa kanavan läpi).

Jos palvelukanavien lukumäärä on m , niin systeemin kuormituskerroin (facility utilization) =

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} \quad (5)$$

Kuormituskertoimen tulee olla ykköstä pienempi, muuten systeemi ei suoriudu tehtävästään vaan tukkiutuu. Jos kuormituskerroin on pieni, on palvelijoilla runsaasti joutoaikaa. Kohtuullisena pidetään arvoa välillä $0.6 < \rho < 0.8$.

Jonomalleja tutkittaessa olemme kiinnostuneita seuraavista tilastomuuttujista ja erityisesti niiden odotusarvoista (keskimääräisistä arvoista).

		muuttuja	odotusarvo
* peräkkäin saapuvien asiakkaisen aikaväli		t_a	$1/\lambda$
* asiakasmäärä	- jonossa	n_q	N_q
	- palveltavana	n_s	$\lambda/\mu = m\rho$
	- koko systeemissä	n	N
* viipymisaika - jonossa		w_q	W_q
	- palveltavana	w_s	$1/\mu$
	- koko systeemissä	w	W

Jos todennäköisyys, että koko systeemissä on n asiakasta on p_n ja palvelukanavien lukumäärä on m , niin

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \quad \text{ja} \quad (6)$$

$$N_q = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m)p_n \quad (7)$$

$$W = N/\lambda \quad (8)$$

$$W_q = N_q/\lambda \quad (9)$$

6.1 Eksponenttijakauma

Olkoon h seuraavassa "hyvin lyhyt" aikaväli. Oletamme, että asiakkaiden saapuminen on satunnaisilmiö, jolla on seuraavat ominaisuudet.

Ehto 1: Todennäköisyys, että asiakas saapuu lyhyen aikavälin $[t, t+h]$ kuluessa riippuu vain aikavälin pituudesta h .

Ehto 2: Todennäköisyys, että asiakas saapuu lyhyen aikavälin $[t, t+h]$ kuluessa on positiivinen mutta pienempi kuin 1.

Ehto 3: Lyhyen aikavälin $[t, t+h]$ kuluessa voi saapua korkeintaan yksi asiakas.

Merkitsemme

$$p_n(t) = \text{todennäköisyys, että } n \text{ asiakasta saapuu ajassa } t. \quad (10)$$

Nyt $t:n$ ei tarvitse olla "lyhyt aika". Ehdosta 1 seuraa, että $p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h)$. Tästä voidaan päätellä, että

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (= \text{todennäköisyys sille, että ajassa } t \text{ ei tule yhtään asiakasta}) \quad (11)$$

missä λ on positiivinen vakio. Vastaavasti voidaan hyvin lyhyen aikavälin h tapauksessa päätellä, että

$$p_1(h) \approx \lambda h \quad (= \text{todennäköisyys sille, että ajassa } h \text{ tulee yksi asiakas}) \quad (12)$$

(Edeltävä kaava, $p_1(h) \approx \lambda h$, tulkitaan usein sanomalla, että asiakkaiden saapuminen on "Poisson-prosessi".)

Jos merkitsemme kahden peräkkäin saapuneen asiakkaan tuloaikojen erotusta (aikaeroa) tilastomuuttujalla \underline{t} , niin sen kertymäfunktio on

$$F(T) = P(\underline{t} \leq T) = 1 - P(\underline{t} > T) = 1 - p_0(T) = 1 - e^{-\lambda T}. \quad (13)$$

Aikaeron tiheysfunktio (eksponenttijakauma) on

$$f(T) = \frac{d}{dT} F(T) = \lambda e^{-\lambda T} \quad (14)$$

ja aikaeron odotusarvo on

$$E(\underline{t}) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (15)$$

Merkintä on siis yhteensopiva kaavan (2) kanssa.

6.2 Poisson-jakauma

Seuraavaksi toteamme kaavan todennäköisyydelle, että n asiakasta saapuu ajassa t . Tarkastelu perustuu seuraavaan itsestäänselvyteen.

$$P \begin{pmatrix} n \\ \text{ajassa} \\ t+h \end{pmatrix} = P \left(\left[\begin{pmatrix} n \\ \text{ajassa} \\ t \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 0 \\ \text{ajassa} \\ h \end{pmatrix} \right] \text{ tai } \left[\begin{pmatrix} n-1 \\ \text{ajassa} \\ t \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 \\ \text{ajassa} \\ h \end{pmatrix} \right] \right) \quad (16)$$

Edellisen kappaleen merkinnöin sama asia voidaan ilmaista kaavalla

$$p_n(t+h) = p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h) \quad n = 0 \quad (18)$$

Koska lyhyelle aikavälille h pätee kaavat $p_1(h) \approx \lambda h$ ja $p_0(h) \approx 1 - \lambda h$, voidaan edeltävät yhtälöt saattaa muotoon

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \approx -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad (19)$$

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} \approx -\lambda p_0(t) \quad (20)$$

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad (21)$$

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t). \quad (22)$$

Tästä saamme lopulta induktiolla kaavan

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (= \text{todennäköisyys, että ajassa } t \text{ saapuu } n \text{ asiakasta}) \quad (23)$$

Kaavat (11), (12), (14) ja (23) ovat keskenään yhtäpitävät. Jos ne ovat voimassa, sanomme asiakkaiden saapumisen olevan Poisson-prosessi (joskus sanotaan myös Markovin prosessiksi).

6.3 Jonomallien luokittelu

Jonomallien luokittelussa on tapana käyttää Kendallin merkintätapaa

A / B / C / D / E

jossa

A esittää saapumisprosessin jakaumaa

M = Poisson-prosessi (Markov)

D = deterministinen prosessi

E = Erlangin prosessi (gamma-jakauma)

G = yleinen jakauma

B esittää palveluprosessin jakaumaa

C esittää palvelukanavien lukumäärää

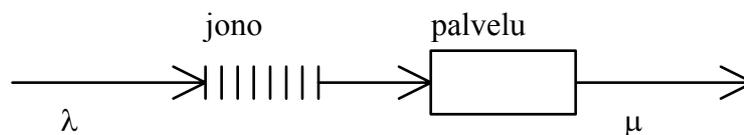
D esittää jonokapasiteettia

E esittää jonokuria

Yhden palvelukanavan klassinen perusmalli on tällä merkintätavalla

M / M / 1 / ∞ / FIFO. Tarkastelemme tätä seuraavassa.

6.4 Yhden kanavan perusmalli (M / M / 1 / ∞ / FIFO)



Olkoon saapumisprosessi Poisson-prosessi parametrina λ ja palveluprosessi Poisson-prosessi parametrina μ . Tarkastellaan "hyvin lyhyttä" aikaväliä h . Tarkastellaan systeemiin saapuvia asiakkaita ja systeemistä poistuvia (palveltuja) asiakkaita.

$$P(0 \text{ saapumista ajassa } h) = e^{-\lambda h} \approx 1 - \lambda h \quad (24)$$

$$P(1 \text{ saapuminen ajassa } h) = 1 - e^{-\lambda h} \approx \lambda h \quad (25)$$

$$P(0 \text{ poistumista ajassa } h) = e^{-\mu h} \approx 1 - \mu h \quad (26)$$

$$P(1 \text{ poistuminen ajassa } h) = 1 - e^{-\mu h} \approx \mu h \quad (27)$$

Merkitään

$$p_n(t) = \text{todennäköisyys, että systeemissä on } n \text{ asiakasta hetkellä } t. \quad (28)$$

Jos hetkellä $t + h$ systeemissä on n asiakasta, niin tämä on mahdollista kolmella tavalla.

1. "hetkellä t systeemissä n asiakasta, 0 sisään ja 0 ulos ajassa h ",
2. "hetkellä t systeemissä $n - 1$ asiakasta, 1 sisään ja 0 ulos ajassa h ",
3. "hetkellä t systeemissä $n + 1$ asiakasta, 0 sisään ja 1 ulos ajassa h ".

(Oletamme, että h on niin lyhyt aikaväli, että voimme jättää huomioimatta sen mahdollisuuden, että ajassa h tapahtuisi sekä saapuminen että poistuminen.)

Käyttäen merkintää (28) saamme ehdon

$$p_n(t+h) \approx p_n(t)(1-\lambda h)(1-\mu h) + p_{n-1}(t)(\lambda h)(1-\mu h) + p_{n+1}(t)(1-\lambda h)(\mu h) \quad (29)$$

$$p_0(t+h) \approx p_0(t)(1-\lambda h) + p_1(t)(1-\lambda h)(\mu h) \quad (30)$$

Sivuutamme yksityiskohdat, jotka muistuttavat kaavoja (14) - (18) ja toteamme, että edeltävistä kaavoista voidaan päätellä, että

$$p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

missä $\rho = \lambda/\mu$ on jo sivulla 144 mainittu kuormitusaste. Lasketaan seuraavaksi systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärän odotusarvo kaavalla (6).

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned} \quad (32)$$

Palveltavina olevien asiakkaiden lukumäärän odotusarvo on $N_s = \lambda/\mu = \rho$. Lopulta saamme seuraavat keskiarvosuureet.

$$N = E(n) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \quad (33)$$

$$N_s = \lambda/\mu = \rho \quad (34)$$

$$N_q = N - N_s = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (35)$$

$$W = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad (36)$$

$$W_q = \frac{N_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (37)$$

missä

λ = saapumistiheys,

μ = palvelutiheys,

$\rho = \lambda/\mu$ = kuormituskerroin.

6.5 Usean palvelukanavan malli (M / M / m / ∞ / FIFO)

Usean palvelukanavan systeemille

$$\bar{n}_q = \frac{(\lambda/\mu)^m \lambda \mu}{(m-1)!(m\mu-\lambda)^2} P_0 \quad (38)$$

$$\bar{n} = \bar{n}_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (39)$$

$$\bar{w}_q = \bar{n}_q / \lambda \quad (40)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_q + 1/\mu \quad (41)$$

missä

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \left(\frac{m\mu}{m\mu - \lambda} \right) \right)^{-1}$$

on todennäköisyys sille, että systeemi on tyhjä.

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, \quad \text{jos } 1 \leq n \leq m$$

$$P_n = \frac{1}{m^{n-m} m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, \quad \text{jos } n > m$$

6.6 Jonosysteemin optimoinnista (M / M / 1 / ∞ / FIFO)

Optimaalinen palvelutiheys μ (M / M / 1 / ∞ / FIFO)

Oletetaan nyt, että palvelun ylläpitokustannus on suoraan verrannollinen palvelutiheyteen, ja jonotuskustannus on suoraan verrannollinen systeemissä olevien asiakkaiden määrään. Tällöin näiden summa on

$$TC(\mu) = C_1\mu + C_2N = C_1\mu + C_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (38)$$

Derivoimalla μ :n suhteen ja ratkaisemalla derivaatan nollakohta löytyy lauseke palvelutiheyden optimiarvolle. (Huomaa, että $\mu > \lambda$).

Optimaalinen palvelukanavien määrä m (M / M / m / ∞ / FIFO)

Oletetaan nyt, että palvelun ylläpitokustannus on suoraan verrannollinen palvelukanavien määrään, ja jonotuskustannus on suoraan verrannollinen systeemissä olevien asiakkaiden määrään. Tällöin näiden summa on

$$TC(m) = C_1m + C_2N(m) \quad (39)$$

Systeemissä olevien asiakkaiden määrä riippuu mutkikkaalla tavalla päätösmuuttujasta m . Koska m voi saada vain kokonaislukuarvoja, on yleensä kohtalaisen helppo laskea

kokonaiskustannus $TC(m)$ riittävän monella m :n arvolla ja valita se m :n arvo, jolla kustannus on pienin.

7. Osita ja rajoita menetelmä (Branch-and-bound)

Kun LP-malliin lisätään vaatimus, että muuttujien tulee saada kokonaislukuarvot, saadaan IP-malli. IP-mallin LP-relaksaatio on LP-malli, jolla on muuttujien kokonaisarvorajoitusta lukuunottamatta samat rajoitteet kuin IP-mallissa.

Koska LP-relaksaation käypien ratkaisujen alue sisältää kaikki IP-mallin käyvät ratkaisut, ei IP-mallin optimiratkaisu voi olla parempi kuin LP-relaksaation optimiratkaisu.

Jos LP-relaksaation optimiratkaisun muuttujat ovat kokonaislukuarvoisia, on ratkaisu myös IP-mallin optimiratkaisu.

Osita ja rajoita menetelmässä alkuperäisen IP-mallin LP-relaksaation käypien ratkaisujen aluetta aletaan pilkkoa, kunnes löydetään kokonaislukuratkaisu, joka on ainakin yhtä hyvä kuin alkuperäisen IP-mallin optimiratkaisu.

Esimerkki 7.1: *Telfa Oy valmistaa pöytiä ja tuoleja . Pöytä vaatii yhden tunnin työtä ja 9 yksikköä puuta, ja tuoli vaatii yhden tunnin työtä ja 5 yksikköä puuta. Käytävissä on 6 tuntia työtä ja 45 yksikköä puuta. Jokainen pöytä tuottaa \$8 voittoa ja jokainen tuoli tuottaa \$5 voittoa. Muodosta IP-malli ja ratkaise se.*

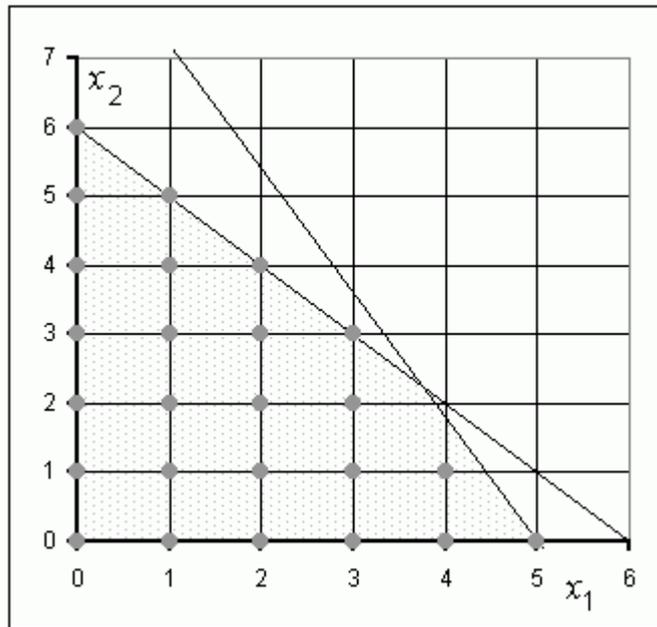
Ratkaisu: olkoon x_1 = valmistettujen pöytien lukumäärä ja x_2 = valmistettujen tuolien lukumäärä. IP-malli on nyt

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{työrajoite}) \\ &9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (\text{puurajoite}) \\ &x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \text{ kokonaislukuja} \end{aligned}$$

Vastaavan LP-relaksaation

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 \leq 6 \quad (\text{työrajoite}) \\ &9x_1 + 5x_2 \leq 45 \quad (\text{puurajoite}) \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

optimiratkaisu on $z = 165/40 = 41,25$, $x_1 = 15/4 = 3,75$ ja $x_2 = 9/4 = 2,25$.
(Katso kuvaa 7.1 seuraavalla sivulla.)



Kuva 7.1

Tämä ei tietenkään ole alkuperäisen IP-mallin ratkaisu. Koska IP-mallin käyville ratkaisuille on voimassa joko $x_1 \geq 4$ tai $x_1 \leq 3$, muodostamme LP-relaksaatiosta (alioingelma 1) kaksi alioingelmaa

alioingelma 2 = alioingelma 1 + rajoite: $x_1 \geq 4$

alioingelma 3 = alioingelma 1 + rajoite: $x_1 \leq 3$

Alioingelmia 2 ja 3 vastaavat käyvät alueet on piirretty kuvaan 7.2. Alioingelmien ratkaisut ovat

	alioingelma 1 $z = 165/4$ $x_1 = 15/4$ $x_2 = 9/4$	
$x_1 \geq 4$		$x_1 \leq 3$
alioingelma 2 $z = 41$ $x_1 = 4$ $x_2 = 9/5$		alioingelma 3 $z = 39$ $x_1 = 3$ $x_2 = 3$

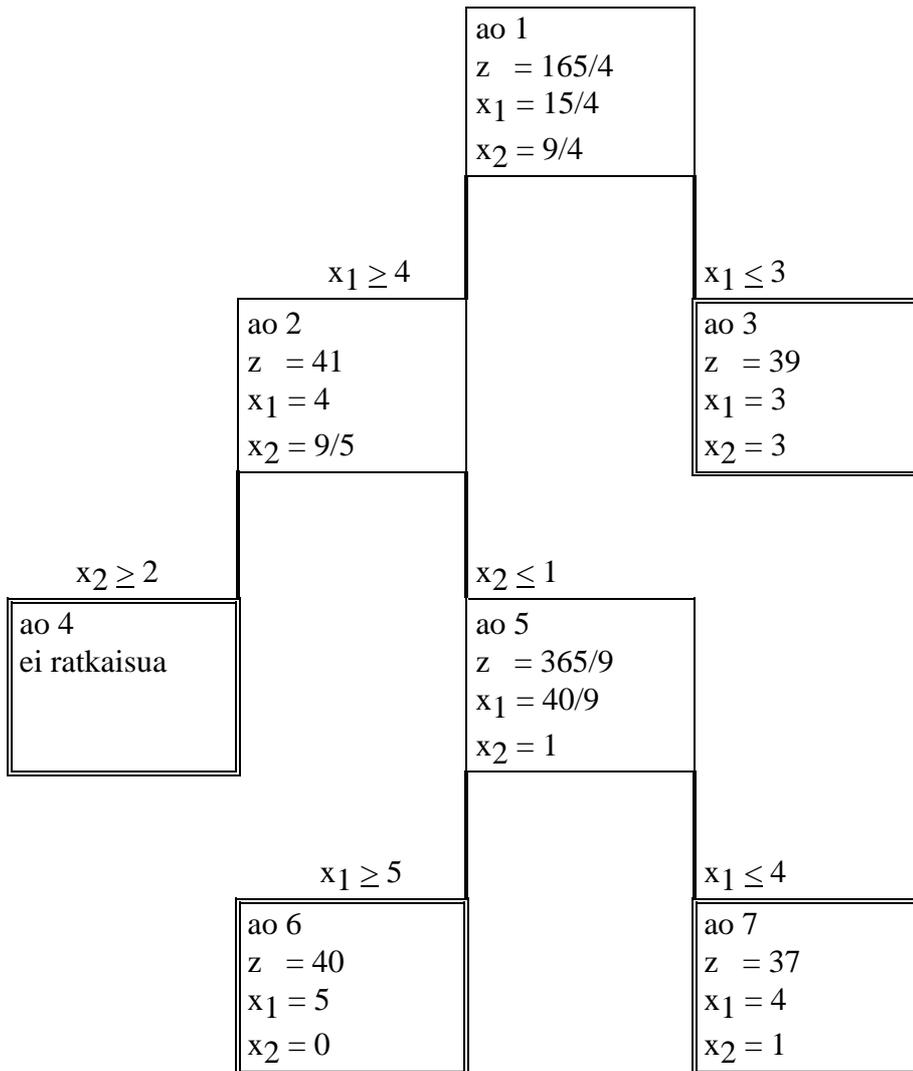
Kuva 7.2

Aliongelman 3 ratkaisu on kokonaislukuratkaisu ja se antaa alarajan alkuperäisen IP-mallin ratkaisulle. Aliongelman 2 ratkaisu ei ole kokonaislukuratkaisu, joten ositamme sen seuraaviksi aliongelmiä (AO)

$$\text{AO 4} = \text{AO 2} + \text{rajoite } x_2 \geq 2$$

$$\text{AO 5} = \text{AO 2} + \text{rajoite } x_2 \leq 1$$

Näin jatkaen saamme lopulta seuraavan puun



Mikä tahansa alkuperäisen IP-mallin käypä ratkaisu on nyt jonkin aliongelman AO3, AO4, AO6 tai AO7 käypä ratkaisu. Jokaiselle mainituista aliongelmistä löytyy IP-optimi tai sitten sillä ei ole käypää ratkaisuja lainkaan (kuten AO4:lla). IP-mallin optimiratkaisu on $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, sillä mikään käypä ratkaisu ei voi olla sitä parempi.

Tarkastellaan uudelleen esimerkkiä 4 kappaleesta 2.6.4

Esimerkki 4 Dorian Auto valmistaa urheiluautoja ja kuorma-autoja. Yhtiön johto uskoo, että yrityksen potentiaalisimpia asiakkaita ovat varakkaat miehet ja naiset. Saavuttaakseen mainitut kohderyhmät Dorian Auto suunnittelee laajaa TV-mainos-kampanjaa. Yhtiö on päättänyt ostaa

minuutin mittaisia mainoksia kahta eri tyyppiä oleviin TV-ohjelmiin: perhesarjoihin ja jalkapallo-otteluihin.

Katsojatutkimusten perusteella yhtiö tietää, että perhesarjan keskelle sijoitetun mainoksen näkee keskimäärin 7 miljoonaa varakasta naista ja 2 miljoonaa varakasta miestä. Jalkapallo-ottelun keskelle sijoitetun mainoksen näkee puolestaan keskimäärin 2 miljoonaa varakasta naista ja 12 miljoonaa varakasta miestä.

Minuutin mittainen mainos keskellä perhesarjaa maksaa keskimäärin 50 000€, kun taas jalkapallo-ottelun keskelle sijoitettu mainos maksaa keskimäärin 100 000€.

Dorian Auto haluaa, että mainoksen näkee ainakin 28 miljoonaa varakasta naista ja 24 miljoonaa varakasta miestä. Miten yhtiö kykenee saavuttamaan tavoitteensa minimikustannuksin?

Päätösmuuttujat ovat

x_1 = perhesarjoihin sijoitettavien mainosten lukumäärä

x_2 = jalkapallo-otteluihin sijoitettavien mainosten lukumäärä

LP-malli:

$$\min z = 5x_1 + 10x_2$$

$$\text{ehdoin } 7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ kokonaislukuja}$$

Ongelman LP-relaksaation (AO1) optimiratkaisu on $z = 32$, $x_1 = 3.6$ ja $x_2 = 1.4$.

Jaamme tämän aliongelmiin

$$\text{AO2} = \text{AO1} + \text{rajoite: } x_1 \leq 3 \text{ ratk: } z = 50, x_1 = 3 \text{ ja } x_2 = 3.5 \text{ (jaetaan) []}$$

$$\text{AO3} = \text{AO1} + \text{rajoite: } x_1 \geq 4 \text{ ratk: } z = 33.33, x_1 = 4 \text{ ja } x_2 = 1.33 \text{ (jaetaan) []}$$

AO2:n jaamme edelleen

$$\text{AO4} = \text{AO2} + \text{rajoite: } x_2 \leq 3 \text{ ei ratkaisua (lopetta oksan kasvu)}$$

$$\text{AO5} = \text{AO2} + \text{rajoite: } x_2 \geq 4 \text{ ratk: } z = 54.29, x_1 = 2.86, x_2 = 4 \text{ (jaetaan) []}$$

AO3:n jaamme edelleen

$$\text{AO6} = \text{AO3} + \text{rajoite: } x_2 \leq 1 \text{ ratk: } z = 40, x_1 = 6, x_2 = 1 \text{ (IP, lopeta oksan kasvu)}$$

$$\text{AO7} = \text{AO3} + \text{rajoite: } x_2 \geq 2 \text{ ratk: } z = 40, x_1 = 4, x_2 = 2 \text{ (IP, lopeta oksan kasvu)}$$

Aliongelmaa AO5 ei enää kannata jakaa, sillä olemme jo löytäneet paremman IP-ratkaisun kuin aliongelman AO5 ratkaisu.



Saatiin siis kaksi optimia $z = 40$, $x_1 = 6$, $x_2 = 1$ ja $z = 40$, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

```

min 5x1 + 10x2          ! AO1
st                          ! z=32, x1=3.6, x2=1.4
r1) 7x1 + 2x2 >= 28      ! -> AO2(x1<=3)
r2) 2x1 + 12x2 >= 24     ! -> AO3(x1>=4)
end

min 5x1 + 10x2          ! AO2 <- AO1
st                          ! z=50, x1=3, x2=3.5
r1) 7x1 + 2x2 >= 28
r2) 2x1 + 12x2 >= 24
ao2) x1 <= 3
end

min 5x1 + 10x2          ! AO3 <- AO1
st                          ! z=33.33, x1=4, x2=1.33
r1) 7x1 + 2x2 >= 28
r2) 2x1 + 12x2 >= 24
ao3) x1 >= 4
end

min 5x1 + 10x2          ! AO4 <- AO2
st                          ! ei ratkaisua
r1) 7x1 + 2x2 >= 28      ! lopeta
r2) 2x1 + 12x2 >= 24
ao2) x1 <= 3
ao4) x2 <= 3
end

min 5x1 + 10x2          ! AO5 <- AO2
st                          ! z=54.29, x1=2.86, x2=4
r1) 7x1 + 2x2 >= 28      !
r2) 2x1 + 12x2 >= 24
ao2) x1 <= 3
ao5) x2 >= 4
end

min 5x1 + 10x2          ! AO6 <- AO3
st                          ! z=40, x1=6, x2=1
r1) 7x1 + 2x2 >= 28      ! IP-ratkaisu
r2) 2x1 + 12x2 >= 24
ao3) x1 >= 4
ao6) x2 <= 1
end

min 5x1 + 10x2          ! AO7 <- AO3
st                          ! z=40, x1=4, x2=2
r1) 7x1 + 2x2 >= 28      ! IP-ratkaisu
r2) 2x1 + 12x2 >= 24
ao3) x1 >= 4
ao7) x2 >= 2
end

```