

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

6. harjoitus, viikko 10 (3.–7.3.2014)

R1	ma	10–12	D115	R5	ti	14–16	C209
R2	ma	14–16	D115	R6	to	12–14	C209
R3	ti	08–10	D115	R7	pe	08–10	D115
R4	ti	12–14	C209	R8	pe	10–12	D115

1. Laske integraalit

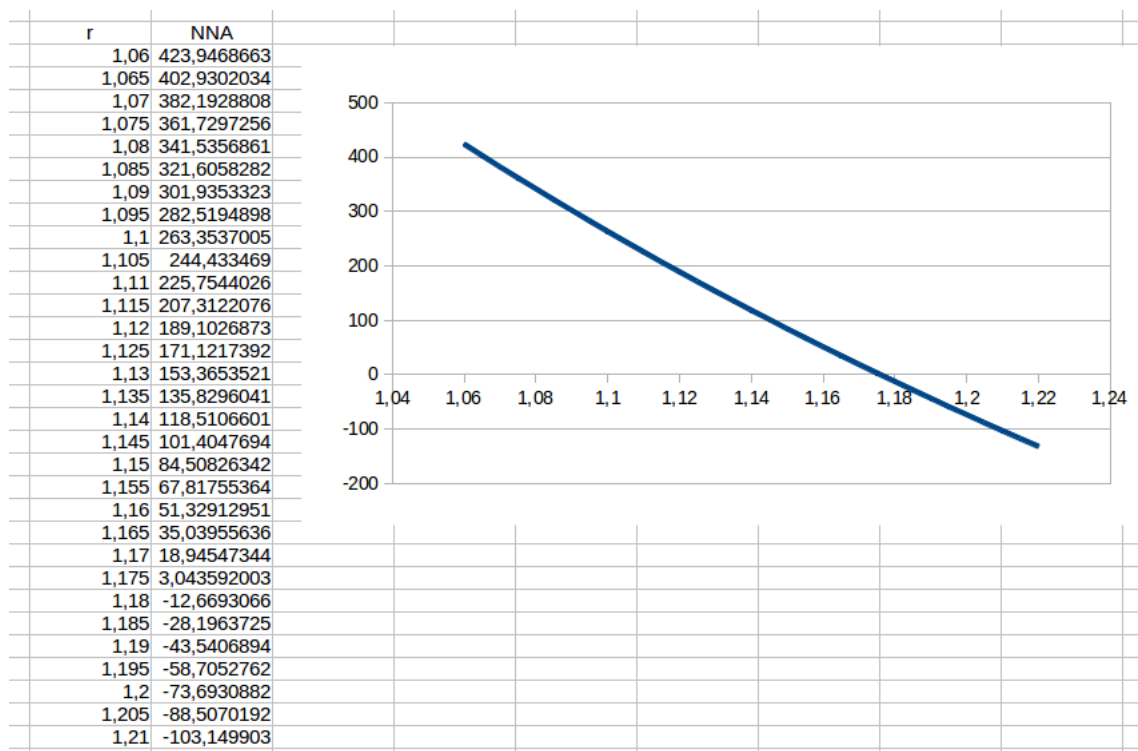
a) $\int (3x^2 + 4x + 7)dx,$ b) $\int_2^5 (4x - 2)dx$

Ratkaisu:

a) $\int (3x^2 + 4x + 7)dx = \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 7x + C = x^3 + 2x^2 + 7x + C$

b) $\int_2^5 (4x - 2)dx = \int_2^5 (2x^2 - 2x) = (2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5) - (2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2) = 36$

Tehtävän 2 kuva:



Kuva on piirretty tähän, jotta tehtävän kaikki laskut mahtuisivat samalle sivulle. Kuvan selitys on seuraavan sivun lopussa.

2. Projektin perusinvestointi on $H = 2800\text{€}$. Syntyvän jatkuvan kassavirran voimakkuus on $k = 100\text{ €/kk}$. Kassavirta alkaa hetkellä $t_1 = 0$ (vuotta) ja päättyy hetkellä $t_2 = 2,5$ (vuotta). Jäännösarvo on $JA = +500\text{€}$. Laskentakorkokanta on 6% (p.a.) eli $\rho = \ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}}$. Jatkuvan korkolaskun mukaan projektin NettoNykyArvo on

$$NNA = -H + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} k(t) dt + e^{-\rho t_2} JA = -H + \frac{k}{\rho} (e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA.$$

- a) Laske NNA, kun ($k = 1200\text{€/vuosi}$, $\rho = \ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}}$, $t_1 = 0\text{vuotta}$ $t_2 = 2,5\text{vuotta}$)
b) Laske NNA, kun ($k = 100\text{€/kk}$, $\rho = \ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}}$, $t_1 = 0\text{kk}$ $t_2 = 30\text{kk}$)
c) Mitä voit sanoa sisäisestä korkokannasta?

Ratkaisu:

a)

$$\begin{aligned} NNA &= -H + \frac{k}{\rho} (e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA \\ &= -2800\text{€} + \frac{1200 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}{\ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}}} \cdot \left(e^0 - e^{-\ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2,5 \text{vuosi}} \right) + \dots \\ &\quad \dots + e^{-\ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2,5 \text{vuosi}} \cdot 500\text{€} \\ &= -2800\text{€} + \frac{1200\text{€}}{\ln(1,06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,06^{2,5}} \right) + \frac{1}{1,06^{2,5}} \cdot 500\text{€} = 423,95\text{€} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} NNA &= -H + \frac{k}{\rho} (e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA \\ &= -2800\text{€} + \frac{100 \frac{\text{€}}{\text{kk}}}{\ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}}} \cdot \left(e^0 - e^{-\ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}} \cdot 30\text{kk}} \right) + \dots \\ &\quad \dots + e^{-\ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}} \cdot 30\text{kk}} \cdot 500\text{€} \\ &= -2800\text{€} + \frac{100\text{€}}{\frac{1}{12} \cdot \ln(1,06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,06^{\frac{1}{12} \cdot 30}} \right) + \frac{1}{1,06^{\frac{1}{12} \cdot 30}} \cdot 500\text{€} = 423,95\text{€} \end{aligned}$$

c) Koska nettonykyarvo on positiivinen, niin sisäinen korkokanta on suurempi kuin nykyarvolaskussa käytetty laskentakorko 6% (per annum).

Jos vuotuinen laskentakorkotekija on $r = 1 + i_{\text{tod}}$, niin

$$NNA = -2800\text{€} + \frac{1200\text{€}}{\ln(r)} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^{2,5}} \right) + \frac{1}{r^{2,5}} \cdot 500\text{€}$$

Kun tämän lausekkeen arvoja lasketaan Exelillä, saadaan edellisen sivun kuva. Kuvan perusteella sisäinen korkokanta on noin 17,5%.

3. Verrataan kahta projektia. Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk. Projektin B perusinvestointi on 16 000€ ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk. Kassavirroissa on huomioitu vain liiketoiminnan tuotot ja kustannukset. Rahoitusmenoja ei ole vielä laskettu mukaan. Laske projektien nettonykyarvot, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko). Ovatko projektit kannattavia?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} NNA_A &= -2000\text{€} - \sum_{j=1}^{24} \frac{100\text{€}}{(1,08^{1/12})^j} \\ &= -2000\text{€} - \frac{100\text{€}}{1,08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1 - (1,08^{-1/12})^{24}}{1 - (1,08^{-1/12})} \right) = 217,29\text{€} > 0\text{€} \text{ (ok)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NNA_B &= -16000\text{€} - \sum_{j=1}^{120} \frac{200\text{€}}{(1,08^{1/12})^j} \\ &= -16000\text{€} - \frac{200\text{€}}{1,08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1 - (1,08^{-1/12})^{120}}{1 - (1,08^{-1/12})} \right) = 686,48\text{€} > 0\text{€} \text{ (ok)} \end{aligned}$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla).

B-projektin nettonykyarvo on suurempi (kolminkertainen), mutta silti tulos tuntuu B:n kannalta lievältä pettymykseltä, sillä B-projektissa kiinnitettiin kahdeksankertainen pääoma, ja tuottoja odotettiin 10 vuotta!

4. Suhteellinen nykyarvo määritellään kaavalla:

$$\text{suhteellinen nykyarvo} = SNA = \frac{\text{tulovirrannykyarvo}}{\text{kustannusvirrannykyarvo}}$$

Laske tehtävän 3 projekteille suhteelliset nettonykyarvot. Kumpi projekteista on kannattavampi?

Ratkaisu:

$$SNA_A = \frac{2217,29\text{€}}{2000\text{€}} = 1,1086 > 1 \text{ (ok)}$$

$$SNA_B = \frac{16686,48\text{€}}{16000\text{€}} = 1,0429 > 1 \text{ (ok)}$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla). Projekti A on suhteellisesti parempi ($SNA_A > SNA_B$).

5. Laske Excelin IRR-funktion avulla tehtävän 3 projekteille sisäiset korkokannat (per annum). Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

Ratkaisu: Excelin laskemat jaksoon (kk) liittyvät sisäiset korkokannat ovat $IRR_{kk,A} = 1,513\%$ ja $IRR_{kk,B} = 0,724\%$. Vuosijakson sisäiset korkokannat ovat silloin.

$$\begin{aligned} IRR_{a,A} &= (1,01513)^{12} - 1 = 0,19747 \longrightarrow i_{sis,A} = 19,75\% \\ IRR_{a,B} &= (1,00724)^{12} - 1 = 0,09044 \longrightarrow i_{sis,B} = 9,04\% \end{aligned}$$

Projekti A antaa tuoton nopeammin ja antaa paremman koron sijoitetulle pääomalle. Se on siis kiistatta parempi.

6. a) Laske pääoman tuottoasteet ROI_{II} tehtävän 3 projekteille. (Tulokset eivät välttämättä ole järkeviä, sillä ROI on hyvä kannattavuuden mittari vain pitkälle projektille.) Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

b) Laske tehtävän 3 projekteille seuraava ROI_I :n tapainen tunnusluku:

$$\text{myRate} = \frac{k_a - b_a}{H/2} \cdot 100\%,$$

missä k_a on vuodessa kertynyt nettokassakertymä (A: 1200€, B: 2400€), b_a on vuodessa hoidettavat pääoman palautukset (A: 1000€, B: 1600€), ja $H/2$ on keskimäärin sidottu pääoma (A: 1000€, B: 8000€).

Ratkaisu:

$$\text{a) } ROI_{II,A} = \frac{1\,200\text{€}}{2\,000\text{€}} \cdot 100\% = 60\%,$$

$$ROI_{II,B} = \frac{2\,400\text{€}}{16\,000\text{€}} \cdot 100\% = 15\%.$$

ROI antaa nyt selvästi liian isoja arvoja. (Kannattavuutta ei kannat nyt ratkaista näiden perusteella.)

$$\text{b) } \text{myRate}_A = \frac{1\,200\text{€} - 1\,000\text{€}}{1\,000\text{€}} \cdot 100\% = 20\%,$$

$$\text{myRate}_B = \frac{2\,400\text{€} - 1\,600\text{€}}{8\,000\text{€}} \cdot 100\% = 10\%.$$

Nämä luvut ovat hyvin linjassa edellisen tehtävän tulosten kanssa.

7. Laske takaisinmaksuajat tehtävän 3 projekteille. Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

Ratkaisu: Takaisinmaksuaika on $n = \frac{\ln(k/(k - iH))}{\ln(1 + i)}$.

$$n_A = \frac{\ln(100\text{€}/(100\text{€} - (1,08^{1/12} - 1) \cdot 2\,000\text{€}))}{\ln(1,08^{1/12})} = 21,5 \text{ kk} = 1 \text{ vuosi } 9,5 \text{ kk}$$

$$n_B = \frac{\ln(200\text{€}/(200\text{€} - (1,08^{1/12} - 1) \cdot 16\,000\text{€}))}{\ln(1,08^{1/12})} = 112,7 \text{ kk} = 9 \text{ vuotta } 4,7 \text{ kk}$$

Ainakin kumpikin projekti on kannattava siinä mielessä, että ne maksavat itsensä takaisin. Koska projektien kestot ovat erilaisia, niiden vertailu ei ole helppoa takaisinmaksuajan perusteella.

Joitakin vastauksia:

2a) 423,95€

3A) $NNA_A = 217,29\text{€}$ 4A) $SNA_A = 1,109$ 5A) $i_{sis,A} = 19,75\%$ 6aA) $ROI_{IIA} = 60,0\%$ 6bA) $myROI_A = 20,0\%$ 7A) A:n takaisinmaksuaika on $21,5\text{kk} = 1,8\text{vuotta}$.**Kaavoja:****Korkolasku**

yksinkertainen korkolasku: $K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0$, kun $0 < t < 1$

koronkorkolasku: $K_t = (1 + i)^t K_0$, kun $t = 1, 2, 3, \dots$

jatkuva korkolasku: $K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0$, kun $t > 1$ ja $(1 + i) = e^{\rho}$

Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \quad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$k = c_{n,i}K_0, \quad k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Kassavirran nettonykyarvo

$$NPV = k_0 + \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{(1+i)^j}$$

Projektin nettonykyarvo

$$NPV = -H + \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{(1+i)^j}$$

Pääoman tuottoaste

$$ROI^I = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

$$ROI^{II} = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{alussa sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

Takaisinmaksu-aika

$$n = \frac{\ln(k/(k - iH))}{\ln(1 + i)}$$