

Summat ja keskiluvut

Aritmeettinen summa

Geometrinen summa

Lukujen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$  summa ja tulo voidaan kirjoittaa seuraavasti

**Summa** 
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

"summa  $k$  käy 1:stä 10:een  $a_k$ "

**Tulo** 
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{10} = \prod_{k=1}^{10} a_k$$

"tulo  $k$  käy 1:stä 10:een  $a_k$ "

Ensimmäinen summausindeksin arvo ei aina ole 1, ja silloin termien lukumäärä ei ole sama kuin indeksin viimeinen arvo. Esim.

$$\begin{aligned}\sum_{j=4}^9 2j &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \\ &= 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18\end{aligned}$$

Summausindeksi saa ensimmäisessä termissä arvon 4 ja viimeisessä termissä arvon 9.

Termejä on kaikkiaan  $9 - 4 + 1 = 6$  kappaletta!

Kolmen luvun  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a_3$  keskimääräistä kokoa voidaan kuvata kahdella tavalla

**Keskiarvo.** Summa ei muutu, jos summan jokainen termi korvataan termien keskiarvolla  $ka$

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= ka + ka + ka \\ \Rightarrow ka &= \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\end{aligned}$$

**Keskiverto.** Tulo ei muutu, jos tulon jokainen tekijä korvataan termien keskiverrolla  $kv$

$$\begin{aligned}a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= kv \cdot kv \cdot kv \\ \Rightarrow kv &= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Yleisemmin:

Lukujen  $a_1, a_2, \dots, a_N$  keskiarvo on

$$ka = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N a_s.$$

Lukujen  $a_1, a_2, \dots, a_N$  keskiverto on

$$kv = \left( \prod_{s=1}^N a_s \right)^{\frac{1}{N}}$$

Kuriositeetti: "Logaritmi lukujen keskiarvosta on keskiarvo lukujen logaritmeista."

$$\begin{aligned}\log kv &= \log \left( \left( \prod_{t=1}^N a_t \right)^{\frac{1}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \log \left( \prod_{t=1}^N a_t \right) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log a_t\end{aligned}$$

Olkoon  $p_t$  osakkeen hinta päivänä  $t$ . Silloin  $r_t = \ln(p_t/p_{t-1})$  on päivätuotto. Keskimääräinen päivätuotto on

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ln p_t / p_{t-1} = \frac{1}{N} \cdot \ln \left( \prod_{t=1}^N \frac{p_t}{p_{t-1}} \right) = \frac{1}{N} \cdot \ln \left( \frac{p_N}{p_0} \right)$$

Summa on aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen termin erotus on aina sama luku.

### Esimerkki 1. Sarja

$$s = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

on aritmeettinen koska  $7 - 5 = 2$ ,  $9 - 7 = 2$ ,  $11 - 9 = 2$  jne...

Sarjan summa voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{array}{rcccccccc} s & = & 5 & + & 7 & + & 9 & + & 11 & + & 13 & + & 15 \\ s & = & 15 & + & 13 & + & 11 & + & 9 & + & 7 & + & 5 \\ \hline 2s & = & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 & + & 20 \end{array}$$

$$\Rightarrow s = 6 \cdot \frac{(5+15)}{2}$$

Aiheet

Summat ja  
keskiluvut

Aritmeettinen  
summa

Geometrisen  
summa

Aritmeettisen summan

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

summa on

$$s = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

"Summa on termien lukumäärä kertaa ensimmäisen termin ja viimeisen termin keskiarvo."

$$\sum_{j=4}^9 5j = 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 6 \cdot \frac{(20 + 45)}{2} = 195$$

(tarkistus:  $20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 195$  OK)



**Esimerkki 2.** Summa

$$s = 1,0 + 1,2 + 1,4 + 1,6 + 1,8 + 2,0 + 2,2 + 2,4 + 2,6 + 2,8 + 3,0$$

on aritmeettinen ja sen arvo on

$$s = 11 \cdot \frac{1,0 + 3,0}{2} = 22$$

**Esimerkki 3.** Summa

$$s = \sum_{k=2}^{100} (1 + 0,1 \cdot k)$$

on aritmeettinen ja sen arvo on

$$s = 99 \cdot \frac{(1,2 + 11,0)}{2} = 99 \cdot 6,1 = 603,9$$

Aiheet

Summat ja  
keskiluvutAritmeettinen  
summaGeometrisen  
summa

Summa on geometrinen, jos kahden peräkkäisen termin suhde on aina sama luku  $q$ .

### Esimerkki 4. Sarja

$$s = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

on geometrinen koska  $8/16 = 0,5$ ,  $4/8 = 0,5$ ,  $2/4 = 0,5$  jne... Siis  $q = 1/2$  ja  $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ .

Sarjan summa voidaan laskea seuraavasti

$$\begin{array}{r} s = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot s = \phantom{16} - 8 - 4 - 2 - 1 - 0,5 \\ \hline (1 - \frac{1}{2})s = 16 \phantom{+ 8 + 4 + 2 + 1} - \frac{1}{2} \cdot 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow s = \frac{(16 - \frac{1}{2} \cdot 1)}{(1 - \frac{1}{2})} = \frac{(a_1 - q \cdot a_1 \cdot q^{n-1})}{(1 - q)} = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Aiheet

Summat ja  
keskiluvut

Aritmeettinen  
summa

Geometrinen  
summa

## Geometrisen summan

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \left( \frac{a_k}{a_{k-1}} = q \right)$$

summa on

$$s = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}.$$

"Summa on ensimmäinen termi kertaa (1 miinus q potenssiin termien lukumäärä) per (1 miinus q)"

$$\sum_{j=0}^4 \frac{16}{2^j} = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 16 \cdot \frac{(1 - (0,5)^5)}{(1 - 0,5)} = 31$$

(tarkistus:  $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$  OK)

**Esimerkki 5. Summa**

$$s = 5 + 1,1 \cdot 5 + 1,1^2 \cdot 5 + \dots + 1,1^{15} \cdot 5$$

on geometrisen ja  $q = 1,1$ . Summan arvo on

$$s = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} = 5 \cdot \frac{(1 - 1,1^{16})}{(1 - 1,1)} = 179,75$$

**Esimerkki 6. Summa**

$$s = 5 + \frac{5}{1,1} + \frac{5}{1,1^2} + \dots + \frac{5}{1,1^{15}}$$

on geometrisen ja  $q = \frac{1}{1,1}$ . Summan arvo on

$$s = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} = 5 \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1,1}\right)^{16}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1,1}\right)} = 43,03$$

Aiheet

Summat ja  
keskiluvutAritmeettinen  
summaGeometrisen  
summa

| k     | $a_k, q = 1,1$ | $a_k, q = 1/1,1$ |
|-------|----------------|------------------|
| 1     | 5,0000         | 5,0000           |
| 2     | 5,5000         | 4,5455           |
| 3     | 6,0500         | 4,1322           |
| 4     | 6,6550         | 3,7566           |
| 5     | 7,3205         | 3,4151           |
| 6     | 8,0526         | 3,1046           |
| 7     | 8,8578         | 2,8224           |
| 8     | 9,7436         | 2,5658           |
| 9     | 10,7179        | 2,3325           |
| 10    | 11,7897        | 2,1205           |
| 11    | 12,9687        | 1,9277           |
| 12    | 14,2656        | 1,7525           |
| 13    | 15,6921        | 1,5932           |
| 14    | 17,2614        | 1,4483           |
| 15    | 18,9875        | 1,3167           |
| 16    | 20,8862        | 1,1970           |
| summa | 179,7486       | 43,0304          |

Aiheet

Summat ja  
keskiluvutAritmeettinen  
summaGeometrinen  
summa