

# Jaksolliset suoritukset, L13

Aiheet

Jaksolliset  
suoritukset

Tasaerälaina

Osamaksukaupa

Jaksolliset suoritukset

Tasaerälaina

Osamaksukaupa

Tarkastellaan tilannetta, jossa asiakas tallettaa pankkitilille toistuvasti yhtäsuuren rahasumman  $k$  aina korkojakson lopussa. Asiakas suorittaa talletuksen  $n$  kertaa. Lasketaan tilillä oleva pääoma jaksojen lopussa. Olkoon korkotekijä  $r = 1 + i$ , silloin kertyneet pääomat ovat

$$1. \text{ jakson lopussa } K_1 = k$$

$$2. \text{ jakson lopussa } K_2 = rK_1 + k = rk + k$$

$$3. \text{ jakson lopussa } K_3 = rK_2 + k = r^2k + rk + k$$

$$4. \text{ jakson lopussa } K_4 = rK_3 + k = r^3k + r^2k + rk + k$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$n. \text{ jakson lopussa } K_n = r^{n-1}k + \dots + r^2k + rk + k$$

(geometrinen summa)

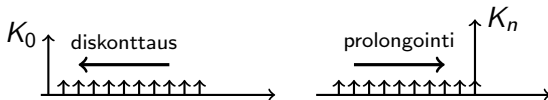
$n$ :nnen jakson lopussa kertynyt pääoma on

$$\begin{aligned}K_n &= r^{n-1}k + \dots + r^2k + rk + k \\&= k \cdot \frac{(1 - r^n)}{(1 - r)} = k \cdot \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)} = k \cdot \frac{((1 + i)^n - 1)}{((1 + i) - 1)} \\&= k \cdot \frac{((1 + i)^n - 1)}{i}\end{aligned}$$

Seuraavaksi laskemme, miten suuri alkupääoma  $K_0$  pitää tilille tallettaa ensimmäisen jakson alussa, jotta pääoma (ilman muita talletuksia) olisi  $n$ . jakson lopussa  $K_n$  eli sama kuin jaksollisten talletusten tapauksessa. Tarvittava alkupääoma saadaan diskonttaamalla loppupääoma  $K_n$  ensimmäisen jakson alkuun eli

Alkupääoma (maksuvirran nykyarvo) on

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{(1+i)^n} \cdot K_n = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot k \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{i} \\ &= k \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n} \end{aligned}$$



Sovitaan merkinnät

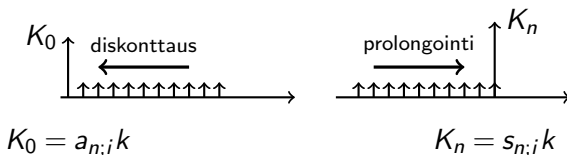
$$s_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i} = \text{jakson lopussa suoritettujen}$$

yhtäsuurten maksujen **prolongointitekijä**

$$a_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n} = \text{jakson lopussa suoritettujen}$$

yhtäsuurten maksujen **diskonttaustekijä**

jolloin



## Tasaerälaina eli annuiteetilaina

- ▶ Asiakas lainaa pankista summan  $K_0$  ja kuolettaa lainan maksamalla  $n$  kertaa samansuuruisen **kuoletuserän**, eli **annuiteetin**,  $k$ .
- ▶ Annuiteetit maksetaan aina korkojakson **lopus**sa ja se osa annuiteetista, joka ylittää koron, lyhentää lainaa.
- ▶ Sitä mukaa kun korko vähenee kasvaa lyhennyksen osuus kuoletuserästä.

Seuraava taulukko kuvaa annuiteettilainan hoitoa, kun korkokanta on  $i$  ja vastaava korkotekijä on  $r = 1 + i$ .

| korko-<br>jakso | lainan määrä |                                                          |
|-----------------|--------------|----------------------------------------------------------|
|                 | alussa       | lopus                                                    |
| 1               | $K_0$        | $K_1 = rK_0 - k$                                         |
| 2               | $K_1$        | $K_2 = rK_1 - k = r^2K_0 - rk - k$                       |
| 3               | $K_2$        | $K_3 = rK_2 - k = r^3K_0 - r^2k - rk - k$                |
| $\vdots$        | $\vdots$     | $\vdots$                                                 |
| $n$             |              | $K_n = r^n K_0 - (r^{n-1}k + r^{n-2}k + \dots + rk + k)$ |

Lopussa lainan pääoma on nolla, joten

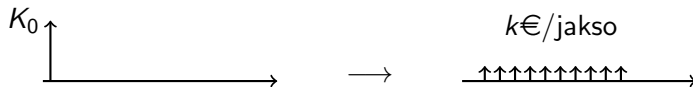
$$\begin{aligned}
 K_n = 0 &\Leftrightarrow r^n K_0 - k \cdot \frac{(1 - r^n)}{(1 - r)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow k = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot K_0
 \end{aligned}$$

Sovitaan merkintä

$$c_{n;i} = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} = \text{kuoletuskerroin}$$

jolloin "tasaerä on kuoletuskerroin kertaa lainan määrä"

$$k = c_{n;i} K_0$$



Kootaan vielä kaavat samaan näkymään

$$s_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i} = \text{prolongointitekijä}$$

$$a_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n} = \text{diskonttaustekijä}$$

$$c_{n;i} = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} = \text{kuoletuskerroin}$$

HUOMAA:

$$c = \frac{1}{a}$$

**Esimerkki 1.** Laske tasaerä, kun lainan määrä on 5000€, laina hoidetaan kuukausierinä, laina-aika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6.15%.

Kuukausikorkotekijä on

$$(1+i) = 1.0615^{1/12} \Rightarrow \begin{cases} i &= [1.0615^{1/12} - 1] \\ (1+i)^n &= 1.0615^{(15/12)} \end{cases}$$

Tasaerä on

$$\begin{aligned} k &= cK_0 = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot K_0 \\ &= \frac{[1.0615^{1/12} - 1] \cdot 1.0615^{15/12}}{(1.0615^{15/12} - 1)} \cdot 5000\text{€} \\ &= 346.78\text{€} \end{aligned}$$

(Tarkistus:  $15 \cdot 346.78 = 5201.7$  ok)

Aiheet

Jaksolliset  
suoritukset

Tasaerälaina

Osamaksukaupa

Tarkastellaan kauppaa, jossa asiakas ostaa tavarán, jonka käteishinta on  $H$ . Kauppias ja asiakas sopii, että kaupantekohetkellä suoritetaan käsiraha  $h$  ja sen jälkeen  $n$  kertaa kuukauden välein osamaksuerä  $k$ . Todellinen vuosikorko on  $p\%$ .

Eräs tapa hoitaa käytännön järjestelyt on seuraava. Kauppias ottaa pankista osamaksuvelkaa  $K_0 = H - h$  vastaavan annuiteettilainan, ja asiakas kuolettaa lainan osamaksuilla.

Käytännössä lainan järjestävä rahoitusyhtiö perii osamaksulisän  $m$ , joka lisää velan määrää. Osamaksulisä sisältää korvauksen vakuusprovisiosta (n. 3–5% osamaksuvelasta), luottoriskistä (n. 1–2% osamaksuvelasta), luottotieto-, lomake-, ym. kustannukset sekä liikevaihtovero.

$$\text{Siis } k = c(H - h + m),$$

missä  $H$  = käteishinta

$h$  = käsiraha

$m$  = osamaksulisä  $\approx 0.04 \cdot (H - h)$

**Esimerkki 1.** Asiakas ostaa auton, jonka käteishinta olisi 15 000€, osamaksulla siten, että käsiraha on 20%, laina-aika 36 kuukautta ja osamaksulisä 600€. Todellinen vuosikorko on 4.5% ja osamaksut ja korko suoritetaan kuukausittain.

Käsiraha on  $h = 0.20 \cdot 15\,000\text{€} = 3\,000\text{€}$ .

Osamaksuvelka plus osamaksulisä on

$$H - h + m = 15\,000\text{€} - 3\,000\text{€} + 600\text{€} = 12\,600\text{€}.$$

$$\begin{aligned} k &= c(H - h + m) = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)}(H - h + m) \\ &= \frac{[1.045^{(1/12)} - 1] \cdot 1.045^{(36/12)}}{1.045^{(36/12)} - 1} \cdot 12\,600\text{€} = 374.30\text{€} \end{aligned}$$

(Tarkistus:  $36 \cdot 374.30 = 13\,474.80$  ok)