

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Riviooperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Helpon yhtälöryhmän ratkaisu

Riviooperaatiot

Minimaalinen merkintä

Erikoistapauksia

Lineaarisella yhtälöryhmällä tarkoitetaan useampaa yhtälöä, joiden kaikkien tulee toteutua, kun muuttujille annetaan ratkaisun mukaiset arvot.

Esimerkki 1: Yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ -x + 4y = 7 \end{cases}$$

on ratkaisu: $x = 1$, $y = 2$, sillä

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 5 & \text{ok} \\ 3 \cdot 1 - 2 = 1 & \text{ok} \\ -1 + 4 \cdot 2 = 7 & \text{ok} \end{cases}$$

(Onko muita ratkaisuja?)

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Esimerkki 2: Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 & \text{yhtälö 1 } \{y, x, z\} \\ -x + y = -1 & \text{yhtälö 2 } \{y, x\} \\ 4y = 8 & \text{yhtälö 3 } \{y\} \end{cases}$$

on helppo ratkaista, koska siinä on yksinkertaisia yhtälöitä.

Kolmannesta yhtälöstä ratkaisemme y :n

$$(3): 4y = 8 \rightarrow y = 2.$$

Toisesta yhtälöstä ratkaisemme x :n

$$(2): -x + 2 = -1 \rightarrow x = 3.$$

Lopuksi ensimmäisestä yhtälöstä ratkaisemme z :n

$$(1): 3 + 2 \cdot 2 - z = 4 \rightarrow z = 3.$$

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Esimerkki 3: Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 & (1) \\ -x + y - 2z = -1 & (2) \\ 4y = 8 & (3) \end{cases}$$

Ei ole yhtä helppo kuin edellinen. Se saadaan helpoksi, jos ensimmäinen yhtälö lisätään toiseen:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 & (1')=(1) \\ 3y - 3z = 3 & (2')=(1)+(2) \\ 4y = 8 & (3')=(3) \end{cases}$$

$$(3'): 4y = 8 \rightarrow y = 2$$

$$(2'): 3 \cdot 2 - 3z = 3 \rightarrow z = 1$$

$$(1'): x + 2 \cdot 2 - 1 = 4 \rightarrow x = 1$$

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivoperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Yhtälöryhmän ratkaisujoukko ei muutu, jos

- ▶ Yhtälö kerrotaan nolasta eroavalla luvulla.
- ▶ Kaksi yhtälöä vaihtaa paikkaa yhtälöryhmässä.
- ▶ Yhtälö luvulla kerrottuna lisätään toiseen yhtälöön.

Esimerkki 3: Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = 14 & (1) \\ -x + y - 2z = 10 & (2) \\ 2x - 2y + z = -11 & (3) \end{cases}$$

Lisätään (1) yhtälöön (2). Lisätään (1) -2:lla kerrottuna (3):een.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 14 & (1')=(1) \\ 3y - 3z = 24 & (2')=(2)+(1) \\ -6y + 3z = -39 & (3')=(3)-2*(1) \end{cases}$$

Lisätään (2') 2:lla kerrottuna (3'):een.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 14 & (1'')=(1') \\ 3y - 3z = 24 & (2'')=(2') \\ -3z = 9 & (3'')=(3')+2*(2') \end{cases}$$

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivoperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

$$\begin{cases} x + 2y - z = 14 & (1'') \\ 3y - 3z = 24 & (2'') \\ -3z = 9 & (3'') \end{cases}$$

$$(3''): -3z = 9 \rightarrow z = -3$$

$$(2''): 3y - 3 \cdot (-3) = 24 \rightarrow y = 5$$

$$(3''): x + 2 \cdot 5 - (-3) = 14 \rightarrow x = 1$$

Tarkistus

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 5 - (-3) = 14 & \text{ok} \\ 3 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) = 24 & \text{ok} \\ -3 \cdot (-3) = 9 & \text{ok} \end{cases}$$

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivoperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Jatkossa yksinkertaistamme merkintöjä ja teemme laskut käyttäen "kerroinkaavioita".

Esimerkki 5:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \star 1 \\ + \\ - \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 3 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \star 2 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$(3): -3z = 6 \quad \rightarrow z = -2$$

$$(2): 3y - 3 \cdot (-2) = 6 \quad \rightarrow y = 0$$

$$(1): x + 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) = 4 \quad \rightarrow x = 2$$

Tarkistus:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} 2 & + & 2 \cdot 0 & - & (-2) & = & 4 \\ -2 & + & 0 & - & 2(-2) & = & 2 \\ 2 \cdot 2 & - & 2 \cdot 0 & + & (-2) & = & 2 \end{array} \right.$$

Yhtälöryhmällä ei aina ole yksikäsitteistä ratkaisua.

Esimerkki 5:

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 4 \\ -x + y - 2z + w = 2 \\ 3y - 3z + 2w = 1 \\ 6y + z + w = 5 \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \star 1 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \star 1 \\ - \\ - \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & -7 \end{array} \right) \text{ kolmas yhtälö on epätosi (mieletön)}$$

Vastaus: Yhtälöryhmän ratkaisujoukko on tyhjä.

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen
merkkintä

Erikoistapauksia

Joskus yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja.

Esimerkki 6:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + y - 2z = 2 \\ 3y - 3z = 6 \\ -x + 4y - 5z = 8 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ -1 & 4 & -5 & 8 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \star 1 \\ - \\ - \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{ok} \\ \text{ok} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

Aiheet

Helpo
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen

merkintä

★1
Erikoistapauksia
+

+

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right) \\
 & \sim \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3y - 3z = 6 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = z + 4 & (1) \\ 3y = 3z + 6 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Valitaan $z = a$.

$$(2): 3y = 3a + 6 \rightarrow y = a + 2.$$

$$(1): x + 2(a + 2) = a + 4 \rightarrow x = -a.$$

Siis

$$\begin{cases} x = -a \\ y = a + 2 \\ z = a \end{cases} \quad \text{ja } a \text{ on mikä tahansa reaaliluku, } a \in \mathbb{R}.$$

Aiheet

Helpon
yhtälöryhmän
ratkaisu

Rivioperaatiot

Minimaalinen
merkintä

Erikoistapauksia

Tarkistus:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + y - 2z = 2 \\ 3y - 3z = 6 \\ -x + 4y - 5z = 8 \end{cases}, \text{ ja } \begin{cases} x = -a \\ y = a + 2 \\ z = a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -a + 2(a + 2) - a = 4 & \text{ok} \\ -(-a) + (a + 2) - 2a = 2 & \text{ok} \\ 3(a + 2) - 3a = 6 & \text{ok} \\ -(-a) + 4(a + 2) - 5a = 8 & \text{ok} \end{cases}$$