

Talousmatematiikan perusteet ORMS.1030

Matti Laaksonen, (Matemaattiset tieteet / Vaasan yliopisto)

- ▶ Sähköposti: matti.laaksonen@uva.fi
- ▶ Opettajan kotisivu: <http://lipas.uwasa.fi/~mla/>
- ▶ puh. 044 344 2757
- ▶ Kurssi:
<http://lipas.uwasa.fi/~mla/orms1030/tmEP017.html>

Sisältö

Finanssilaskentaa, ääriarvotehtäviä, integraalilaskentaa, lineaarialgebraa, differentiaalilaskentaa, indeksit.

Osaamistavoitteet

Opintojakson suoritettuaan opiskelija osaa derivoida ja integroida polynomifunktion ja eksponenttifunktion, opiskelija osaa muodostaa mallin ja ratkaista sen (LP-malli, varastomalli, voitonmaksimointi), opiskelija osaa diskontata kassaerän ja laskea kassavirran nykyarvon, opiskelija osaa laskea tasaerälainan annuiteetin, opiskelija osaa verrata investointiprojektien kannattavuutta eri mittareilla, opiskelija osaa ratkaista lineaarisen yhtälöryhmän, osaa laskea matriiseilla, osaa laskea determinantin ja määrittää käänteismatriisin, opiskelija osaa käyttää Cramerin kaavoja, opiskelija osaa selittää panos-tuotos -analyysin periaatteen.

Suoritustavat

Hyväksytty osallistuminen harjoituksiin ja välikokeisiin (hyväksytyn osallistumisen kriteeri ilmoitetaan ensimmäisellä luennolla ja opintojakson verkkosivulla) **tai** tentti.

Arvostelu: asteikolla 1-5 tai hylätty

O = Operation

R = Research and

M = Management

S = Science

"Operaatiotutkimus ja Johtamistiede"

- ▶ hakee optimia
- ▶ rakentaa malleja
- ▶ käyttää tietokoneita

Kirjoja yms.

- ▶ Oma vanha peruskoulun tai lukion oppikirja.
- ▶ Kurssilla käytetty materiaali (verkkosivun linkit)
- ▶ Peruskoulun kertausmateriaali: **ManMath**
(<http://www02.oph.fi/etalukio/opiskelumodulit/manmath/>)
- ▶ Etälukion pitkän matematiikan materiaali: **Etälukio/maa**
(<http://www02.oph.fi/etalukio/maa.html>)
- ▶ Ruth Hasan – Tuula Kinnunen: *Talousmatematiikan perusteet*, Turun kauppakorkeakoulun julkaisuja, sarja B-1:1997, ISBN 951-738-898-5
- ▶ Markku Kallio, Pekka Korhonen, Seppo Salo: *Johdatus kvantitatiiviseen analyysiin taloustieteissä*, 2. painos, (Aalto yliopisto) Hakapaino Oy, Helsinki, 2000, ISBN 952-91-3027-9

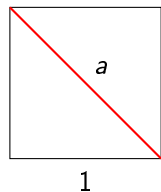
Ennen kymmenjärjestelmää

- ▶ 60-järjestelmä (Babylonia 2500eKr – Eurooppa 1200jKr)
- ▶ kaksinkertainen kirjanpito
- ▶ 60 on jaollinen luvuilla 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 20 ja 30.
→ murtoluvuilla laskeminen hallittiin hyvin
- ▶ Edelleen tunti jaetaan 60 minuuttiin ja minuutti 60 sekuntiin

Murtolukujen rooli

- ▶ Antiikin kreikkalainen Pythagoras (n. 580-500eKr) osoitti ettei kaikkia lukuja voida ilmaista murtolukuina
- ▶ Pythagoraalle kysymys oli tavattoman suuri, sillä hän oli perustanut uskonnollis-poliittisen liikkeen ja pyrki valtaan. Liikkeen motto oli, että "kaikki maailmassa voidaan ilmaista kokonaislukujen suhteina".

Olkoon a neliön lävistäjä, kun neliön sivu on 1.



Pythagoran lauseen mukaan

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Jos nyt a on murtoluku $a = m/n$, missä m ja n ovat keskenään jaottomat, niin

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \quad \rightarrow m \text{ on parillinen, } (m = 2k)$$

$$\Leftrightarrow (2k)^2 = 2n^2$$

$$\Leftrightarrow 2k \cdot 2k = 2n \cdot n$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 = n^2 \quad \rightarrow n \text{ on parillinen!?!?!}$$

Johtopäätös edellisestä oli:

"On olemassa lukuja, jotka eivät ole murtolukuja". Nykyään niitä sanotaan **irrationaaliluvuiksi** ($\sqrt{2}$, π , e, jne.)

Kymmenjärjestelmä

- ▶ Keksittiin Intiassa n. 500 jKr
- ▶ Arabialainen matemaatikko al-Khowarizmi Bagdadilainen n. 825jKr otti käyttöön symbolin 0
- ▶ Samarkandilainen astronomi al-Kashi otti käyttöön kymmenkantaisen negatiivisen eksponentin n. 1400jKr
- ▶ Skotlantilainen John Napier alkoi v. 1617 käyttää desimaalipilkkaa sen nykyisessä merkityksessä
- ▶  **Boom** Laskeminen oli nyt helppoa.

Kompleksiluvut

- ▶ Onko olemassa luku i , jolle $i^2 = -1$, eli onko olemassa

$$i = \sqrt{-1}$$

- ▶ Useimmat pitivät ajatusta ihan pöhkönä. Alettiin etsiä ristiriitaa. Ristiriitaa ei tullut!
- ▶ sovittiin, että kompleksilukuja $a + ib$ ja $c + id$ merkitään lukupareina (a,b) ja (c,d) ja lisäksi sovittiin laskutoimitukset

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

- ▶ OUTOA, MUTTA EI ENÄÄ JÄRJENVASTAISTA!

- ▶ "järjetön käsite" muuttui "melko yksinkertaisiksi" olioiksi, joille on määritelty "aika erikoiset" laskutoimitukset

- ▶ →  kvanttifysiikka,

atomipommi, tietokoneet, kännykkä, jne.

- ▶ ryhmät, renkaat, kunnat, algebrat, joukot, avaruudet (abstrakteja struktuureja).
- ▶ Saatiin lopullisia ratkaisuja 4000 vuotta vanhoihin ongelmiin! (Viidennen asteen yhtälön ratkaisukaava.)

Semanttinen paradoksi.

- ▶ Määritellään luku a siten, että
"se on pienin kokonaisluku, jota ei voi määritellä vähemmällä kuin 13 sanalla".
- ▶ Koska kielessä on äärellinen määrä sanoja, on myös vain äärellinen määrä tapoja asettaa 13 sanaa peräkkäin. On siis olemassa lukuja, joita ei voi määritellä 13 sanalla. On helppo perustella, että tässä joukossa on pienin. Siis luvun a määritelmä näyttäisi olevan kunnossa.
- ▶ Paradoksi syntyy siitä, että tulimme edellä määritelleeksi luvun a käyttäen vain 12 sanaa!
- ▶ Johtopäätös: matematiikassa tulee arkikielen sijasta käyttää formaalia kieltä.

Russell'n paradoksi.

- ▶ Voiko joukko olla itsensä alkio? Ilmeisesti "kaikkien joukkojen joukko" on itsensä alkio.
- ▶ Bertrand Russel määritteli joukon

$$Ru = \{x | x \notin x\},$$

eli Ru muodostuu kaikista niistä olioista, jotka eivät ole itsensä alkioita).

Onko Ru itsensä alkio?

- ▶ Jos Ru on itsensä alkio, niin se toteuttaa joukon määrittelevän ehdon eli $Ru \notin Ru$ (ei ole itsensä alkio).
- ▶ Jos Ru ei ole itsensä alkio, niin se ei toteuta joukon määrittelevää ehtoa eli Ru on itsensä alkio.
- ▶ Kumpikin vaihtoehto johtaa ristiriitaan. $\longrightarrow$

Johtopäätös: kaikkien joukkojen joukko on mieletön ajatus!

Matematiikka tänään

- ▶ Matematiikan kieli on Formaali logiikka & Joukko-oppi
- ▶ Tutkii struktuureja ja algoritmeja
- ▶ Käytännöllisiä sovelluksia, joiden taustalla oleva teoria kimuranttia
- ▶ Tietokoneet mahdollistavat uusia sovelluksia