

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Määritelmiä ja merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin transpoosi

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, (1 \quad -4 \quad 2), \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- Kaavio kirjoitetaan kaarisulkujen väliin (amer. kirjoissa usein hakasulkujen väliin.)
- Luvut tulee kirjoittaa selkeästi riveihin ja sarakkeisiin.
- Lukujen väliin tulee jättää riittävästi väliä. Mitään erottimia (pilkku, tms.) ei lukujen väliin laiteta.

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Jos kaaviossa on m riviä ja n saraketta, niin sanomme kaaviota $m \times n$ -matriisiksi.

- ▶ Edellä matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

on 2×3 -matriisi.

- ▶ Matriisi

$$v = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

on 2×1 -matriisi, eli saraktevektori.

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

► Matriisi

$$\mathbf{u} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

on 1×4 -matriisi, eli **rivivektori**.

► Matriiseille kannattaa laskiessa lähes aina antaa nimi.

- Matriisin nimi kirjoitetaan kirjaimella, joka on iso, lihava ja vino. (Esim. ***A***)
- Vektorin nimi kirjoitetaan kirjaimella, joka on pieni, lihava ja vino (tai pieni, normaali, ja vino ja sen päällä on nuoli tai viiva). (Esim. ***u*** = $\vec{u}$)

► Käsien kirjoitettaessa lihavointi ja vinous jätetään pois.

Matriisiin $\mathbf{A}$ rivillä r sarakkeessa c olevaa lukua merkitsemme a_{rc} . Vektorin tapauksessa yksi indeksi riittää.

Esimerkki:

$$\text{Jos } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \text{ niin } m_{23} = 7$$

$$\text{jos } \mathbf{v} = (4 \ 5 \ 7 \ 1), \text{ niin } v_3 = 7$$

- Jos tulkintaongelmia ei tule, niin merkinnän m_{23} rivi-indeksin 2 ja sarake-indeksin 3 väliin ei lisätä erotinta.
- Joskus erotin on tarpeen. Esimerkiksi 30×30 -matriisin $\mathbf{Q}$ alkio rivillä 12 sarakkeessa 3 on $q_{12,3}$.

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Aiheet

Määritelmiä ja
merkkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Matriisin **(pää)lävistäjä** (diagonaali) muodostuu niistä luvuista, joiden rivi-osoite ja sarake-osoite ovat samat. Matriisin ***A*** lävistäjällä ovat siis luvut $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & 5 \\ -2 & 4 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

Matriisi on **neliömatriisi** ($n \times n$), jos siinä on sarakkeita yhtä monta kuin rivejä.

Nollamatriisi $\mathbf{0}$ on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia.
Nollamatriisin ei tarvitse olla neliömatriisi.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yksikkömatriisi $\mathbf{I}$ on neliömatriisi, jonka lävistäjällä on ykkösiä ja muualla nollia

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

$m \times n$ -matriisi $\mathbf{A}$ ja $p \times q$ -matriisi $\mathbf{B}$ ovat samat (identtiset) ja merkitsemme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jos

1. Kummassakin on yhtä monta riviä eli $m = p$, ja
2. Kummassakin on yhtä monta saraketta eli $n = q$, ja
3. Niissä on samat luvut samoissa paikoissa

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

Esimerkki: Jos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

niin $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, mutta $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$.

Kahden saman kokoisen matriisin summa lasketaan niin, että samassa paikassa olevat luvut lasketaan yhteen ja tulos sijoitetaan samaan paikkaan.

Jos $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, niin $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriisi kerrotaan luvulla siten, että jokainen matriisin luku erikseen kerrotaan.

Jos $\mathbf{C} = r \cdot \mathbf{A}$, niin $c_{ij} = r \cdot a_{ij}, \forall i, j$

Esimerkki

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 0 & 10 \\ 5 & -20 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Edellä tehdyistä määritelmistä seuraa, että



$$\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$$



$$r\mathbf{A} + q\mathbf{A} = (r + q)\mathbf{A}$$



$$-\mathbf{A} = (-1) \cdot \mathbf{A}$$



$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Kahden vektorin pistetulo saadaan periaatteella: Laske ensimmäisten koordinaattien tulo + toisten koordinaattien tulo + ... + viimeisten koordinaattien tulo.

Eli kaavalla

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) = -6$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

$m \times p$ -matriisin A ja $p \times n$ -matriisin B tulo on $m \times n$ -matriisi C jonka alkio c_{ij} rivillä i sarakkeessa j saadaan laskemalla A :n i :nnen rivin ja B :n j :nnen sarakkeen pistetulo.

$$(AB)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & & \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Siis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}: 2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}: 3 \times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{AB}: 2 \times 4}$$

Huomaa, että

- ▶ Jotta kertolasku $\mathbf{AB}$ onnistuu tulee $\mathbf{A}$:n rivin olla yhtä pitkä kuin $\mathbf{B}$:n sarake on korkea.
- ▶ Tulossa $\mathbf{AB}$ on yhtä monta riviä kuin matriisissa $\mathbf{A}$ ja yhtä monta saraketta kuin matriisissa $\mathbf{B}$.

Matriisien yhteenlasku ja reaalityyppisillä kertominen noudattavat seuraavia lakeja. Olkoon $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ $m \times n$ -matriiseja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Silloin

$$(1) \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$(2) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$(3) \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$(4) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(5) \quad 1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$(6) \quad \alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$$

$$(7) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$$

$$(8) \quad \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Olkoon A , B ja C matriiseja ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin

$$(1) \quad A(BC) = (AB)C$$

$$(2) \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$(4) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$(5) \quad IA = AI = A$$

Edellä olleet kaavat merkitsevät sitä, että matriisilausekkeita voi käsitellä hyvin samaan tapaan kuin koulussa on käsitelty x :n lausekkeita.

Kun pitää seuraavat kolme matriisilaskennan erityispiirrettä valppaasti mielessään, niin matriiseilla voi laskea kuten x :n lausekkeilla

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Olkoon A , B ja C matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista että

$$(1) \quad AB \neq BA$$

$$(2) \quad AC = BC, \text{ vaikka } A \neq B$$

$$(3) \quad AB = 0, \text{ vaikka } (A \neq 0 \text{ ja } B \neq 0)$$

Kommentteja:

- (1) Kertolaskussa ei saa vaihtaa tekijöiden järjestystä.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

(1) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, (2) $(\mathbf{AC} = \mathbf{BC}) \not\Rightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{B})$

- (1) "Järjestys ei vaihdu!" Periaate näkyy kaavoissa. Jos $\mathbf{A}$ on vasemmalla LHS:ssa, niin se on vasemmalla myös RHS:ssa. Esim

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

- (2) "Matriisilla ei saa jakaa!" Kun koulussa on käsitelty x :n lausekkeita, on totuttu jakamaan LHS:n ja RHS:n yhteinen tekijä pois yhtälöstä. Matriisi-yhtälön kohdalla näin ei saa tehdä.

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

(3) $(\mathbf{AC} = \mathbf{0}) \not\Rightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ tai } \mathbf{B} = \mathbf{0})$

- ▶ (3) "Tulon nollasääntö ei ole voimassa!"
- ▶ Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ On totta, että matriiseissa on jotakin erikoista, kun niiden tulo on nollamatriisi, mutta se erikoinen seikka ei ole se, että toinen niistä olisi nollamatriisi.

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Määritelmä: $m \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ **transponoitu matriisi** eli **transpoosi** (engl. transpose) $\mathbf{A}^T$ on $n \times m$ -matriisi, jolle

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Transpoosi $\mathbf{A}^T$ saadaan siis $\mathbf{A}$:sta tekemällä riveistä sarakkeita.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Huomaa, että lävistäjä pysyy paikallaan.)

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Aiheet

Määritelmiä ja
merkintöjä

Laskutoimitukset

Matriisikaavoja

Matriisin
transpoosi

Transpoosille on voimassa seuraavat kaavat

$$(1) \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(2) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(3) \quad (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$$

$$(4) \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad \text{huomaa järjestys!}$$

Esimerkki Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nyt

$$(\mathbf{AB})^T = \left(\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \\ -3 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \\ -3 & 30 \end{pmatrix}$$