

Matriisin käänteismatriisi, L21

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisi

Käänteismatriisin
määrittäminen

Erikoistapaus:
 2×2

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

Erikoistapaus: 2×2

Reaalilukujen tapauksessa luvun $a \neq 0$ käänteisluku $1/a = a^{-1}$ on sellainen luku, että

$$a^{-1} \cdot a = 1 \quad \text{ja} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

(missä 1 = kertolaskun neutraalialkio).

Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla 0 :sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia.

Määritelmä: Neliömatriisi $\mathbf{A}$ on **säännöllinen**, jos on olemassa **käänteismatriisi** $\mathbf{A}^{-1}$ siten, että

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisi

Käänteismatriisin
määrittäminen

Erikoistapaus:
 2×2

$$\text{Jos } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ niin } \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix},$$

sillä

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ 2y + z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{Q}\vec{x} = \vec{b}$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{b}$$

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ 2y + z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{Q}\vec{x} = \vec{b}$$

ratkaisu on siis

$$\vec{x} = \mathbf{Q}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kaksi kysymystä:

- ▶ (1) Mistä tietää onko kerroinkaavio säännöllinen?
- ▶ (2) Mistä saadaan käänteismatriisi?

Ensimmäinen vastaus kysymykseen (2) on seuraavassa.
(Perustelu luennolla)

Matriisin **A** käänteismatriisin määrittäminen:

- ▶ (1) Muodosta kaksiosainen leveä kaavio

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I})$$

jonka vasen osa on käännettävä matriisi ja oikea puolki on saman kokoinen yksikkömatriisi.

- ▶ (2) Tee kaaviolle rivioperaatioita niin, että vasen puoli muuttuu yksikkömatriisiksi.
- ▶ (3) Kun vasen puoli on yksikkömatriisi, niin oikea puoli on $\mathbf{A}^{-1}$.
- ▶ (*) (Jos vaihetta (3) ei voi saavuttaa, niin matriisi ei ole säännöllinen.)

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisi

Käänteismatriisin
määrittäminen

Erikoistapaus:
 2×2

Määritä käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ vaihda rivit 1 ja 3} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array} \right| \cdot (-1) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisiKäänteismatriisin
määrittäminenErikoistapaus:
 2×2

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} + \\ \cdot 2 \\ - \end{array} \right| \cdot 0.5$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & -3.5 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} + \\ - \\ \cdot 1 \end{array} \right| \cdot 2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 4 \end{array} \right)$$

Siis

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Tarkistus:

$$\text{Jos } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ja } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

niin

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisi

Käänteismatriisin
määrittäminen

Erikoistapaus:
 2×2

Tärkeä erikoistapaus: 2×2 -matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Oletamme nyt, että $ad - bc \neq 0$. Laskemme käänteismatriisin yleisessä tapauksessa. Jos lasku onnistuu, niin käänteismatriisi on olemassa aina, kun $ad - bc \neq 0$.

Erikoistapaus: 2×2

10

kun $a \neq 0$ ja $D = ad - bc \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot a \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array} \right) \begin{array}{c} \star c \\ - \end{array} \cdot (ad - bc)/a \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} (ad - bc) & (ad - bc) \cdot \frac{b}{a} & (d - bc/a) & 0 \\ 0 & (ad - bc) & -c & a \end{array} \right) \begin{array}{c} - \\ \star b/a \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} ad - bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right) \begin{array}{c} : (ad - bc) \\ : (ad - bc) \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array} \right), \quad \text{missä } D = ad - bc \end{aligned}$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisiKäänteismatriisin
määrittäminenErikoistapaus:
 2×2

kun $a \neq 0$ Tapauksessa $a \neq 0$ saimme siis kaavan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esimerkki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisiKäänteismatriisin
määrittäminenErikoistapaus:
 2×2

Erikoistapaus: 2×2

12

kun $a = 0$, $D = 0 \cdot d - bc \neq 0 \Rightarrow c \neq 0, d \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \Bigg| \text{vaihda rivit} \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} \cdot b \\ \cdot c \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} bc & bd & 0 & b \\ 0 & bc & c & 0 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} - \\ \cdot d/c \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} bc & 0 & -d & b \\ 0 & bc & c & 0 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} : bc \\ : bc \end{array} \\ \sim & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array} \right) \end{aligned}$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisiKäänteismatriisin
määrittäminenErikoistapaus:
 2×2

kun $a \neq 0$ Tapauksessa $a = 0$ saimme siis saman kaavan kuin edellä

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esimerkki:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 \\ 3/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 \\ 3/6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 \\ 3/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin
käänteismatriisiKäänteismatriisin
määrittäminenErikoistapaus:
 2×2