

Derivaatta, interpolointi, L6

Linkejä

Derivaatta

Polynomifunktion derivaatta

Derivointikaavoja

Interpolointi

Aiheet

Linkejä

Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

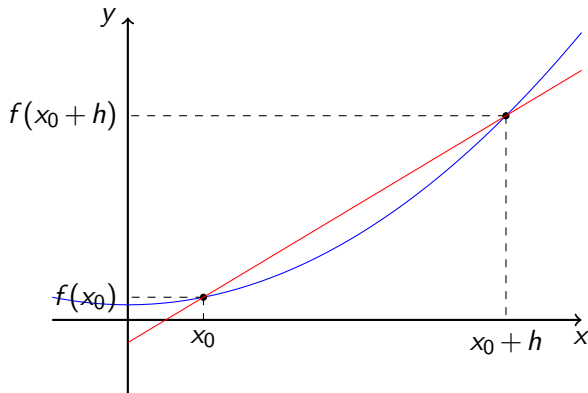
Derivointikaavoja

Interpolointi

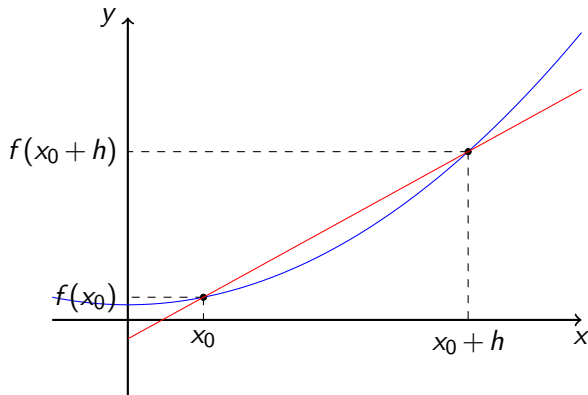
Linkkejä

- ▶ Wikipedia: **Derivaatta**
(<http://fi.wikipedia.org/wiki/Derivaatta>)
- ▶ Etälukio: **Derivaatta**
(http://193.166.43.18/etalukio/pitka_matematiikka/kurssi7/maa7_teoria10.html)
- ▶ Maths online: **Derivaatta**
(<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/diff1/diff1.html>)

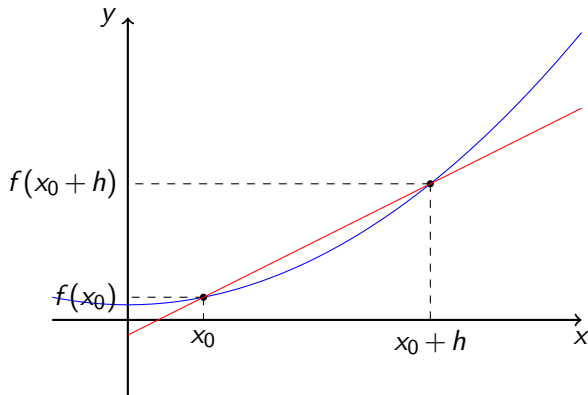
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

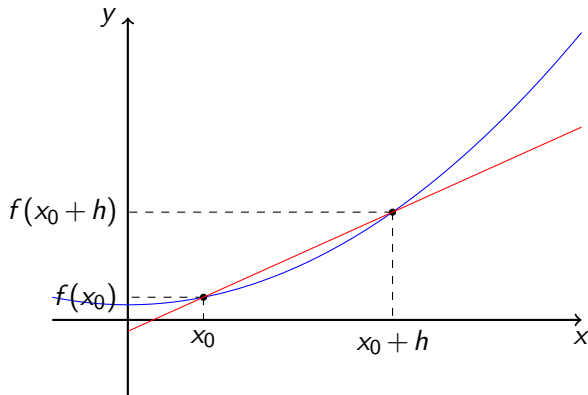
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

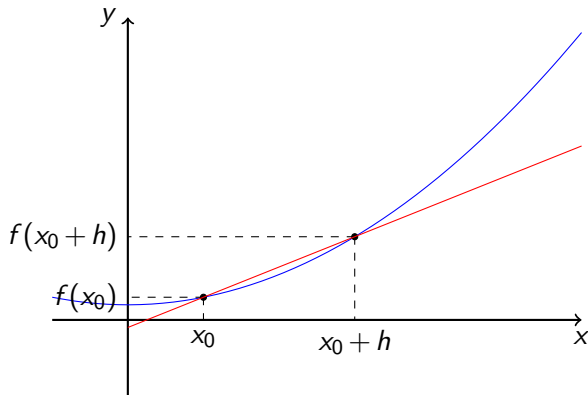
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

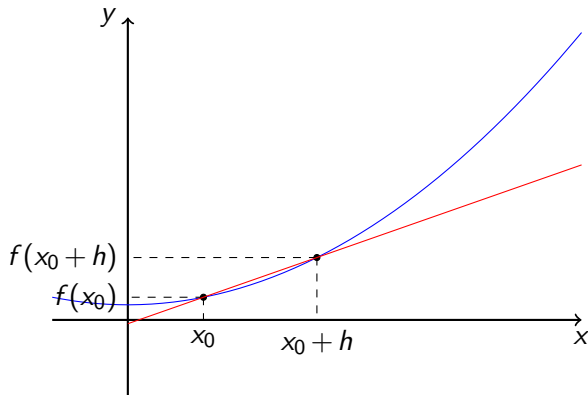
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

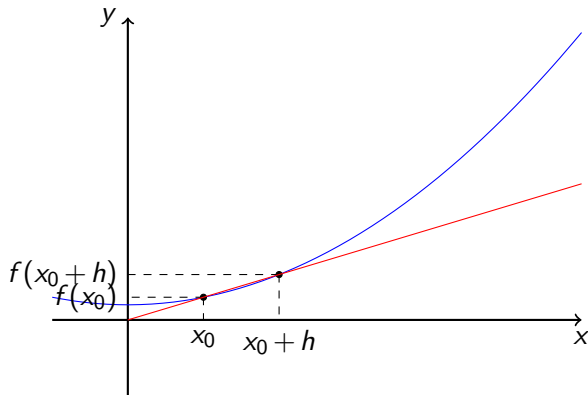
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

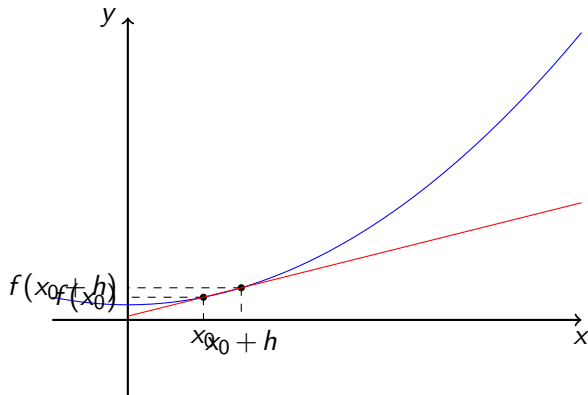
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

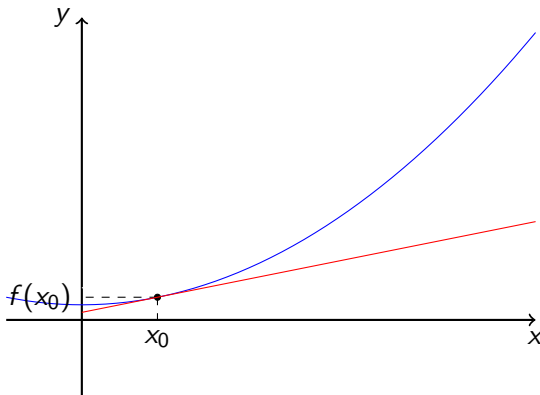
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on funktion erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}.$$

Derivaatalle käytetään monia merkintöjä. Jos $y = f(x)$, niin merkinnän $f'(x)$ lisäksi käytetään myös merkintöjä

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, Df(x), Df, \frac{d}{dx}f(x)$$

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta.

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + 2h^2 - ax_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah) = 2ax_0\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx}(ax^2) = 2ax$$

Apulause: Jos $n > 0$ on kokonaisluku, niin

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + hP_n(x, h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} P_n(x, h) = 0$.

Todistus: (1) Väite pitää paikkansa, kun $n = 1$, sillä

$$(x+h)^1 = x^1 + 1 \cdot h \cdot x^0 + h \cdot 0.$$

(2) Toiseksi oletamme, että väite pitää paikkansa, kun $n = 1, 2, \dots, k$, ja osoitamme, että se pitää silloin myös paikkansa, kun $n = k + 1$. Nyt

$$\begin{aligned} (x+h)^{k+1} &= (x+h)(x^k + khx^{k-1} + hP_k(x, h)) \\ &= x^{k+1} + (k+1)hx^k + h \underbrace{[khx^{k-1} + (x+h)P_k(x, h)]}_{=P_{k+1}(x, h) \rightarrow 0, \text{ kun } h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

□

Aiheet

Linkkejä

Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

Derivointikaavoja

Interpolointi

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta.

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x_0, h) - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nax_0^{n-1} + aP_n(x_0, h))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (na x_0^{n-1} + aP_n(x_0, h)) = na x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = na x^{n-1}$$

Aiheet

Linkkejä

Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

Derivointikaavoja

Interpolointi

On helppoa ja suoraviivaista osoittaa, että

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

Perustelu. Olkoon $s(x) = f(x) + g(x)$. Silloin

$$\begin{aligned} s'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right) \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Siis: Polynomifunktio derivoidaan termi kerrallaan ja jokainen termi derivoidaan kaavoilla

$$\text{(peruskaava)} \quad \frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$\text{(vakio-x)} \quad \frac{d}{dx}(ax) = a$$

$$\text{(vakio)} \quad \frac{d}{dx}(a) = 0$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

$$\begin{aligned}(1) \quad & f(x) = 3x^2 + 7x + 15 \\ \Rightarrow & f'(x) = 6x + 7 + 0 = 6x + 7 \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1 \\ \Rightarrow & g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20 \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & h(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 11 \\ \Rightarrow & h'(x) = -3x^2 + 8x + 2 \quad \square\end{aligned}$$

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x^{1/2}) = \dots$$

Palutui edeltävään kaavaan (EI OMAA KAAVAA)

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}e^{ax} = a \cdot e^{ax}$$

$$\left(\frac{d}{dx} a^x = \ln(a) \cdot e^x \right)$$

Logaritmifunktio:

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \right)$$

Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Eli lyhyesti

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Osamäärän derivaatta:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Eli lyhyesti

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Yhdistetyn funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 1: Olkoon $e^{5x} = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x &\longrightarrow f'(x) &= 5 \\ g(z) &= e^z &\longrightarrow g'(z) &= e^z \end{aligned}$$

Silloin

$$\frac{d}{dx}(e^{5x}) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{5x} \cdot 5$$

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 2: Olkoon $(5 + x^2)^3 = g(f(x))$, missä

$$f(x) = 5 + x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$$

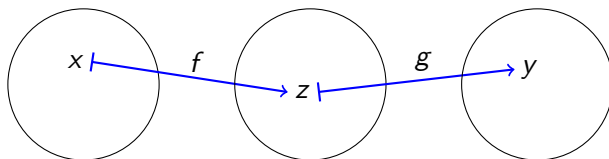
$$g(z) = z^3 \longrightarrow g'(z) = 3z^2$$

Silloin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((5 + x^2)^3) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \\ &= 3(5 + x^2)^2 \cdot 2x = 6x(5 + x^2)^2\end{aligned}$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

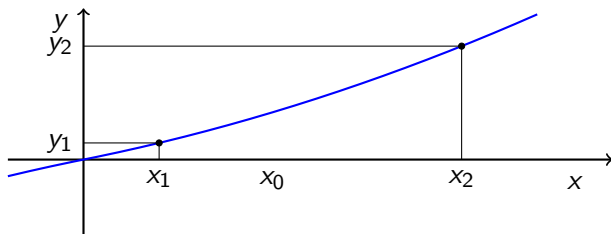
$$y = g(z) = g(f(x))$$



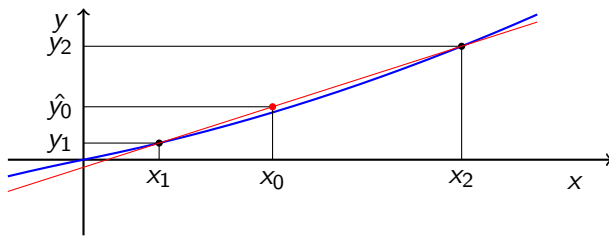
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g(f(x))) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= g'(z) \cdot f'(x) = g'(f(x))f'(x)\end{aligned}$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Olkoon $y = f(x)$ funktio, jonka kuvaaja on "melkein suora". Tiedämme funktion f arvot kahdessa kohdassa: $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$. Haluamme arvioida (estimoida) funktion arvoa kohdassa x_0 , joka on kohtien x_1 ja x_2 välissä.

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Piirretään suora pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja luetaan arvio suoralta



$$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

$$f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)$$

- ▶ Jos $x_1 < x_0 < x_2$, niin kaavan soveltamista sanotaan **interpoloinniksi**.
- ▶ Jos x_0 ei ole kohtien x_1 ja x_2 välissä (eli $x_0 < x_1 < x_2$ tai $x_1 < x_2 < x_0$), niin kaavan soveltamista sanotaan **ekstrapoloinniksi**.
- ▶ Kaava on sama.
- ▶ Ekstrapoloinnissa syntyvä virhe saattaa olla suuri!

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)

Se hinta p , jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q . Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2) , niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot $(q_1, p_1) = (200\text{kpl/kk}, 12.50\text{e})$ ja $(q_2, p_2) = (250\text{kpl/kk}, 10.00\text{e})$. Jos $q_1 < q < q_2$, niin

$$\begin{aligned} p = f(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\ &= 12.50 + \frac{10.00 - 12.50}{250 - 200}(q - 200) \\ &= 22.50 - 0.05q \end{aligned}$$

[Aiheet](#)[Linkkejä](#)[Derivaatta](#)[Polynomifunktion
derivaatta](#)[Derivointikaavoja](#)[Interpolointi](#)