

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

2. välikoe keskiviikkona 13.12.2017**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.**1. Laske integraalit**

a) $\int (2x^3 - 6x + 5) dx$, b) $\int_1^3 (4 + 2x - 6x^2) dx$

a)
$$\int (2x^3 - 6x + 5) dx$$
$$= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x + C$$

b)
$$\int_1^3 (4 + 2x - 6x^2) dx = \int_1^3 (4x + x^2 - 2x^3) dx$$
$$= (4 \cdot 3 + 3^2 - 2 \cdot 3^3) - (4 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 1^3)$$
$$= (12 + 9 - 54) - (4 + 1 - 2)$$
$$= -36$$

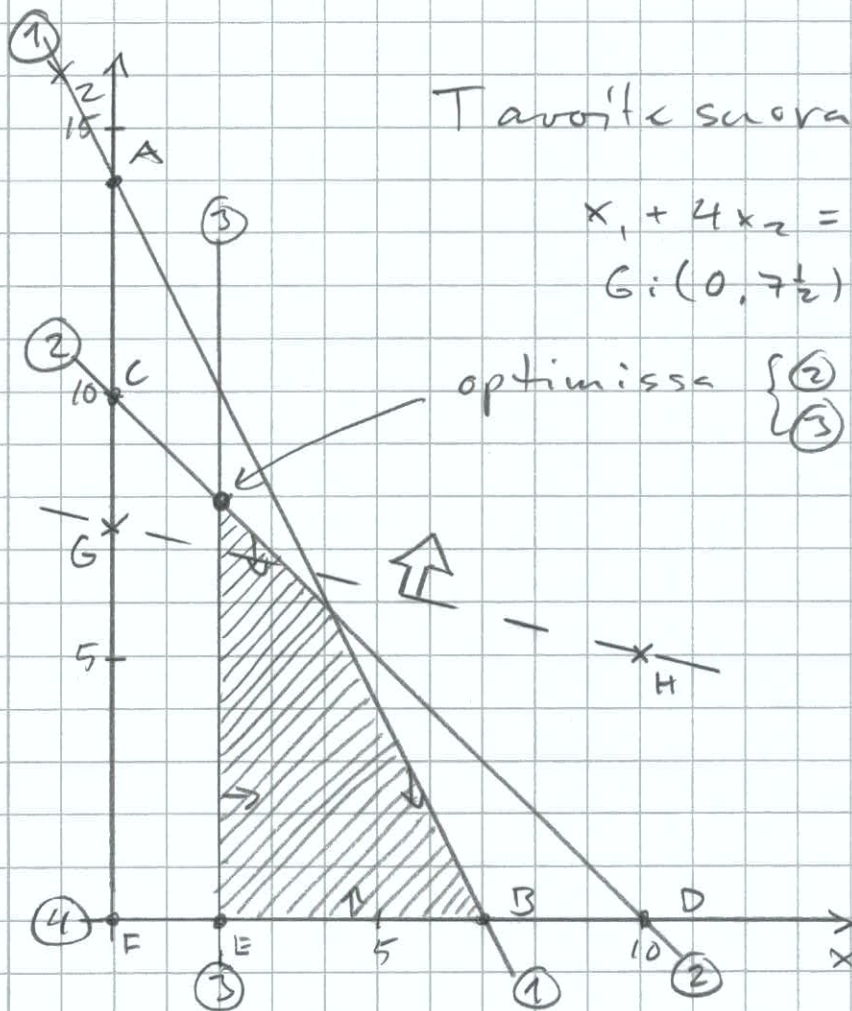
Vastaus: a) $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x + C$ b) -36

2. Ratkaise LP-malli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 14 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

rajoitukset

1. $2x_1 + x_2 \leq 14 \rightarrow A: (0, 14), B: (7, 0)$
2. $x_1 + x_2 \leq 10 \rightarrow C: (0, 10), D: (10, 0)$
3. $x_1 \geq 2 \rightarrow E: (2, 0)$
4. $x_2 \geq 0 \rightarrow F: (0, 0)$



Vastaus: optimissa $x_1 = 2, x_2 = 8$ ja
tavoitefunktion optimiarvo on 34

3. a) (3p) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y - z = -2 \\ 2x - 5y + z = 4 \end{cases}$$

b) (3p) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \cdot (-2) \\ + \\ \leftarrow + \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \cdot (-1) \\ + \end{smallmatrix}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 & (1) \\ y - z = -2 & (2) \\ -2z = -4 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 2$$

$$(2) \rightarrow y - 2 = -2 \rightarrow y = 0$$

$$(1) \rightarrow x - 2 \cdot 0 + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

Tarkk.

$$\begin{cases} 1 - 2 \cdot 0 + 2 = 3 \text{ ok} \\ 0 - 2 = -2 \text{ ok} \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 2 = 4 \text{ ok} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x - 2y = 3 - z & (1) \\ y = -2 + z & (2) \end{cases}$$

valitaan $z = a$ (3)

$$(2) \rightarrow y = -2 + a$$

$$(1) \rightarrow x - 2(-2 + a) = 3 - a$$

$$\Leftrightarrow x + 4 - 2a = 3 - a$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + a$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} \begin{cases} x = -1 + a \\ y = -2 + a \\ z = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

Tarkk.

$$\begin{cases} (-1 + a) - 2(-2 + a) + a = 3 \text{ ok} \\ (-2 + a) - a = -2 \text{ ok} \end{cases}$$

Vastaus:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x = -1 + a \\ y = -2 + a \\ z = a \end{cases}, a \in \mathbb{R} \end{array}$$

4. Olkoon

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laske a) (2p) $\det(M)$, b) (1p) $Q^T M$, c) (2p) M^{-1} ,

d) (1p) kirjoita yhtälöryhmänä $Q(x \ y)^T = (3 \ 5 \ 16)^T$

$$\begin{aligned} a) \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot (-1) \cdot 1) + (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 4 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) \\ &= (1 + 1) + (0 + 2) + 4 \cdot (0 - 2) \\ &= 2 + 2 - 8 = \underline{\underline{-4}} \end{aligned}$$

$$b) Q^T M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{aligned} c) m_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ m_{21} &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \\ m_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} (2) & -(-5) & (-3) \\ -(2) & (-7) & -(-1) \\ (-2) & -(3) & (1) \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -0,50 & -1,25 & 0,75 \\ 0,50 & 1,75 & -0,25 \\ 0,50 & 0,75 & -0,25 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

$$d) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 3 \\ x + y = 5 \\ 2x = 16 \end{cases}$$

Vastaus: a) -4 b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{cases} -y = 3 \\ x + y = 5 \\ 2x = 16 \end{cases}$

5. a) (2p) Panos-tuotos -analyysi (Mihin kehitetty? Mitä sillä lasketaan? Minkä hitaaseen muuttumiseen menetelmä perustuu?)

b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)

c) (2p) Miksi Laspeyresin ja Paaschenin tuoteryhmän hintaindeksit saattavat samalla aineistolla erota toisistaan merkittävästi?

a) Panos-tuotos -analyysi kehitettiin kansantalouden toimialojen välisten riippuvuuksien kuvaamiseen ja ennakoimiseen. Menetelmällä lasketaan eri toimialojen kokonaistuotokset kysyntäennusteen ja teknologia matriisin avulla. Teknologia matriisi muuttuu hitaasti, joten lähelmana voidaan käyttää edellisen vuoden luvusta laskettua matriisiä. Menetelmä paljastaa mitkä toimialat tulevat ja "vetävät peräänsä" toisia toimialoja.

b) Cramerin kaavat voidaan käyttää, jos yhtälöryhmän kerroinkaava on neliömatriisi, jonka determinantti ei ole nolla. Kunkin muuttujan arvo on $x_k = D_k / D$ mistä D_k on determinantti kaavalle, jossa x_k on yhtälöryhmän RHS ja muut saavat samat kuin yhtälöryhmän kerroinkaavassa. D on kokonaismatriisin determinantti. Cramerin kaavat kannattaa käyttää, jos yhtälöryhmän kertoimien joukosta on kiinnostavia parametreja, tai determinantit ovat helppoja laskea.

c) Indeksit ovat painotettujen keskiarvojen suhteita. Laspeyres ottaa painoiksi perusvuoden volyymit ja Paaschen ottaa painoiksi vertailuvuoden volyymit. Painot voivat erota merkittävästi, jolloin myös indeksit voivat erota suuresti.