

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

10. harjoitus, (pe 15.2.2013)

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

3. a) Ratkaise Cramerin kaavoilla muuttujan x arvo yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - az = 0 \end{cases}$$

b) Tuleeko x :n arvoksi sama arvo kuin edellisessä tehtävässä, jos $a = -20$?

4. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

5. a) Millä a :n arvolla alla olevalla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu? Mikä se on?

b) Millä a :n arvolla yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu? Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu?

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - az = 0 \end{cases}$$

6. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k + 1$ saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on $\vec{x}_0 = (0 \quad 7000 \quad 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \dots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1, \dots, 100$.)

7. Mikä on tehtävässä 6 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

8. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate $0,40\text{€}/\text{paketti}$. Oletamme nyt, että yksi kierros $\sim$ yksi kuukausi. Kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.

a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}.$$

b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*.$$

c) Mikä on A-pesuaineesta saatavan katetuottovirran nykyarvo

$$NA = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_{1k}}{1,01^k}$$

d) Mainostoimisto tarjoaa uuden pesuaineen markkinointiin kampanjaa, jolla markkinaosuus saadaan kerralla tasapainon mukaiseksi, jolloin katetuottovirran nykyarvo olisi

$$NA_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_1^*}{1,01^k}.$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?