

10. harjoitus, (pe 15.2.2013)

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$a) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1) \cdot 3 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{5} & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 0,2 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0,6 & 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot (-0,5) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot 0,2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & -0,4 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ -0,4 & -0,2 & 0,2 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\det(N) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1 - (-2)) + (1 - (-3)) + (2 - (-3))$$

$$= 10$$

$$m_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} \operatorname{Adj}(N) = \frac{1}{\det(N)} \begin{pmatrix} +(m_{11}) & -(m_{21}) & +(m_{31}) \\ -(m_{12}) & +(m_{22}) & -(m_{32}) \\ +(m_{13}) & -(m_{23}) & +(m_{33}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} +(1) & -(-3) & +(2) \\ -(4) & +(-2) & -(-2) \\ +(5) & -(5) & +(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ -0,4 & -0,2 & 0,2 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \downarrow & & \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 0 + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ = (-20 - (-18)) - 0 + 3(4 - 1) \\ = 7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \downarrow & & \\ -7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -20 \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} & \downarrow & \\ 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -(-7) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -20 \end{vmatrix} + 0 - 0 = 42$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} & & \downarrow \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 21$$

$$\begin{cases} x = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2 \\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{42}{7} = 6 \\ z = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{7} = 3 \end{cases}$$

2. a) Ratkaise Cramerin kaavoilla muuttujan x arvo yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y + az = 0 \end{cases}$$

b) Jos $a = -20$, niin onko x :n arvo sama kuin edellisessä tehtävässä?

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & a \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (0 - 3) + 2(9 - (-6)) + a(1 - 0) \\ &= 27 + a \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & a \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & a \end{vmatrix} = -7(a + 18) = -7a - 126$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = -(-7) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 42$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = +(-7) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 21$$

$$\begin{cases} x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7a - 126}{27 + a} & (= 2, \text{ kun } a = -20) \\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{42}{27 + a} & (= 6, \text{ kun } a = -20) \\ z = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{27 + a} & (= 3, \text{ kun } a = -20) \end{cases}$$

3. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

Homogeeninen yhtälöryhmä

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & -20 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 0 + 3 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ = 3(-20 + 18) - 0 + 3(6 - 4) \\ = 0$$

→ on olemassa ei-triviaali ratkaisu

$$\begin{pmatrix} \textcircled{3} & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & -20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 12} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -4z \\ y = 2z \end{cases}$$

Valitaan $z = 1$!

$$\begin{cases} 3x - 3y = -4 & (1) \\ y = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2$$

$$(1) \rightarrow 3x - 3 \cdot 2 = -4 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$V: \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

4. a) Millä a :n arvolla alla olevalla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu? Mikä se on?
 b) Millä a :n arvolla yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu? Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu? Etsi niistä yksi!

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y + az = 0 \end{cases}$$

a) Yksikäsitteinen ratkaisu jos

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(0-3) + 2(27+9) + a(3-0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 60 + 3a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq -20$$

Yksikäsitteinen ratkaisu on nolloratkaisu
 $x = y = z = 0$ (triviaali ratk.)

b) Homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 9 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = -20$$

$$\text{tarketaan } a = -20 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

6. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:tä ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:tä ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on $\vec{x}_0 = (0 \ 7000 \ 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \dots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1, \dots, 100$.)

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix}$$

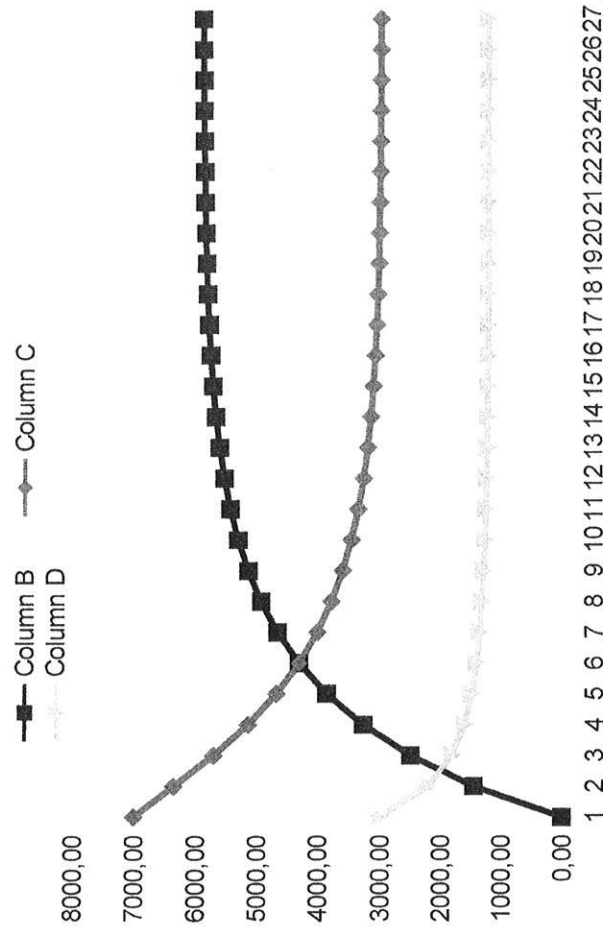
$$\vec{x}_2 = P\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702,5 \\ 1807,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = P\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702,5 \\ 1807,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3263,1 \\ 5138,4 \\ 1598,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_4 = P\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3263,1 \\ 5138,4 \\ 1598,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3850,3 \\ 4673,5 \\ 1476,2 \end{pmatrix}$$

P =	0,9	0,1	0,25
	0,05	0,8	0,25
	0,05	0,1	0,5

k	X _{1;k}	X _{2;k}	X _{3;k}
0	0,00	7000,00	3000,00
1	1450,00	6350,00	2200,00
2	2490,00	5702,50	1807,50
3	3263,13	5138,38	1598,50
4	3850,28	4673,48	1476,24
5	4301,66	4300,36	1397,98
6	4651,02	4004,87	1344,11
7	4922,43	3772,47	1305,09
8	5133,71	3590,37	1275,92
9	5298,36	3447,96	1253,68
10	5426,74	3336,71	1236,55
11	5526,87	3249,84	1223,28
12	5604,99	3182,04	1212,97
13	5665,94	3129,12	1204,94
14	5713,49	3087,83	1198,68
15	5750,60	3055,61	1193,80
16	5779,55	3030,47	1189,99
17	5802,13	3010,85	1187,02
18	5819,76	2995,54	1184,70
19	5833,51	2983,59	1182,89
20	5844,24	2974,27	1181,48
21	5852,62	2967,00	1180,38
22	5859,15	2961,33	1179,52
23	5864,25	2956,90	1178,85
24	5868,23	2953,45	1178,33
25	5871,33	2950,75	1177,92
26	5873,75	2948,65	1177,60



7. Mikä on tehtävässä 6 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\bar{x}^*$

$$\bar{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,90x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = x_1^* \\ 0,05x_1^* + 0,80x_2^* + 0,25x_3^* = x_2^* \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* + 0,50x_3^* = x_3^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 20 \\ \cdot 20 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2,5 & 0 \\ 0 & -3 & 7,5 & 0 \\ 0 & 2 & 3,5 & 10000 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3) \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2,5 & 0 \\ 0 & 1 & -2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 8,5 & 10000 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^* - x_2^* - 2,5x_3^* = 0 & (1) \\ x_2^* - 2,5x_3^* = 0 & (2) \\ 8,5x_3^* = 10000 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow x_3^* = 10000/8,5 = 1176,47$$

$$(2) \rightarrow x_2^* - 2,5 \cdot 1176,47 = 0 \rightarrow x_2^* = 2941,18$$

$$(1) \rightarrow x_1^* - 2941,18 - 2,5 \cdot 1176,47 = 0$$

$$\rightarrow x_1^* = 5882,36$$

$$\therefore \bar{x}^* = \begin{pmatrix} 5880 \\ 2940 \\ 1180 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{tai} \\ \bar{x}^* = \begin{pmatrix} 5900 \\ 2900 \\ 1200 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

8. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros ~ yksi kuukausi. Kuukausijakssoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.
a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}$$

b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*$$

a) Tehdään 6 yhteydessä laskettiin Excelillä

$$\sum_{k=1}^{12} x_{1k} = 51919,18 \rightarrow \sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k} = 0,40 \cdot 51919,18 = 20767,7 \text{ €}$$

$$b) 12 \cdot 0,40 \cdot x_1^* = 12 \cdot 0,40 \cdot 5882,36 = 28235,33 \text{ €}$$

(ero on noin 7470 €)

c) Mikä on A-pesuaineesta saatavan katetuottovirran nykyarvo

$$NA = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_{1k}}{1,01^k}$$

d) Mainostoimisto tarjoaa uuden pesuaineen markkinointiin kampanjaa, jolla markkinaosuus saadaan kerralla tasapainon mukaiseksi, jolloin katetuottovirran nykyarvo olisi

$$NA_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_1^*}{1,01^k}$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?

$$c) NA_T = 0,40 \cdot \sum_{k=1}^T \frac{(100) \bar{x}_k}{r^k}$$

$$r = 1,01$$

$$= 0,40 \cdot (100) \left(\sum_{k=1}^T \frac{1}{r^k} P^k \right) \bar{x}_0$$

$$= (I - \frac{P}{r})^{-1} \left(\frac{1}{r} P - \frac{1}{r^{T+1}} P^{T+1} \right)$$

$$= 0,40 (100) (I - \frac{P}{r})^{-1} \left(\frac{1}{r} \bar{x}_1 - \underbrace{\frac{1}{r^{T+1}} \bar{x}_{T+1}}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{0,40}{1,01} \cdot (100) (I - \frac{1}{r} P)^{-1} \cdot P \bar{x}_0$$

$$\text{Excel} \rightarrow NA = 227771,39 \text{ €}$$

$$d) NA_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 x_1^*}{1,01^k} = \frac{0,40 \cdot 5882,36}{0,01}$$

$$= 235294,4 \text{ €}$$

$$\text{Ero on } 235300 - 227800 \approx 7500 \text{ €}$$

Kampanjasta ei kannata maksaa enempää kuin 7500 €