

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**2. harjoitus, (pe 18.1.2013)**

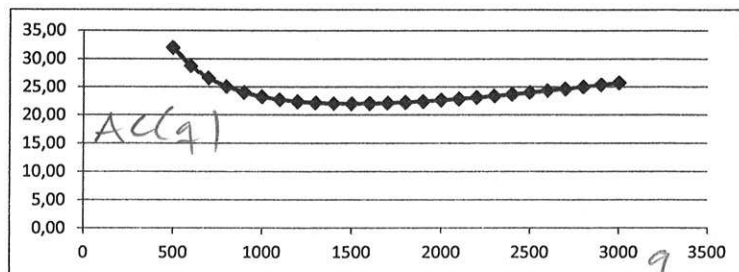
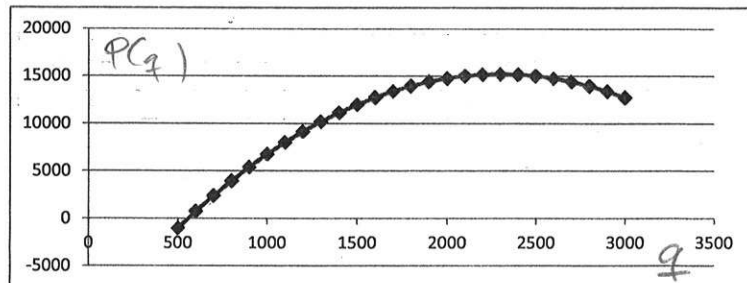
1. Yritys valmistaa kappaletavaraa q kappaletta viikossa. Yhden kappaleen materiaali- ja palkkakustannus on 7 €, joten tuotannon määrästä riippuvat muuttuvat kustannukset ovat $VC = 7q$ (€ viikossa). Yrityksen kiinteät kustannukset ovat $FC = 11250$ (€ viikossa). Lisäksi ahtaiden tuotantotilojen ja varastointiongelmien takia joudutaan turvautumaan yli-työhön, josta aiheutuu kustannuserä $LC = 0.005q^2$ (€ viikossa). Kokonaiskustannus viikossa on siis $TC(q) = FC + VC + LC = 11250 + 7q + 0.005q^2$. Tuotteen myyntihinta on 30€, joten tuottofunktio on $TR = 30q$ (€ viikossa) ja voittofunktio on $P(q) = TR - TC = 23q - 0.005q^2 - 11250$ (€ viikossa). Piirrä voittofunktion $P(q)$ ja yksikkökustannusfunktion $AC(q) = TC(q)/q$ kuvaajat kun $0 < q < 3000$. Mikä on $AC(q)$:n yksikkö? Mikä on mielestäsi järkevä tuotannon määrä?

(Ohje: yksiköt $[q] = \frac{\text{kpl}}{\text{vko}}$, $[P] = \frac{\text{€}}{\text{vko}}$, $[AC] = \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$)

$$P(q) = 23q - 0,005q^2 - 11250$$

$$AC(q) = \frac{TC}{q} = \frac{11250}{q} + \frac{7q}{q} + \frac{0,005q^2}{q} = \frac{11250}{q} + 7 + 0,005q$$

q	P(q)	AC(q)
500	-1000	32,00
600	750	28,75
700	2400	26,57
800	3950	25,06
900	5400	24,00
1000	6750	23,25
1100	8000	22,73
1200	9150	22,38
1300	10200	22,15
1400	11150	22,04
1500	12000	22,00
1600	12750	22,03
1700	13400	22,12
1800	13950	22,25
1900	14400	22,42
2000	14750	22,63
2100	15000	22,86
2200	15150	23,11
2300	15200	23,39
2400	15150	23,69
2500	15000	24,00
2600	14750	24,33
2700	14400	24,67
2800	13950	25,02
2900	13400	25,38
3000	12750	25,75



2. Laske tehtävässä 1 esiintyneen voittofunktion derivaatta, eli

$$P'(q) = \frac{dP}{dq}.$$

Millä q :n arvolla $P'(q) = 0$? Tarkista tehtävän 1 kuvan avulla nollakohdan paikka. Millä q :n arvoilla $P'(q) \geq 0$? Tarkista tämäkin tehtävän 1 kuvan avulla.

$$P(q) = 23q - 0,005q^2 - 11250$$

$$P'(q) = 23 - 0,01q$$

$$\begin{aligned} P'(q) = 0 & \Leftrightarrow 23 - 0,01q = 0 \\ & \Leftrightarrow 23 = 0,01q \quad | \cdot 100 \\ & \Leftrightarrow \underline{2300 = q} \end{aligned}$$

OK ks. kuva
ed. sivulla

$$\begin{aligned} P'(q) \geq 0 & \Leftrightarrow 23 - 0,01q \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 23 \geq 0,01q \quad | \cdot 100 \\ & \Leftrightarrow \underline{2300 \geq q} \end{aligned}$$

OK ks. kuva
ed. sivulla

3. Laske derivaatat

- a) $f'(3)$, kun $f(x) = x^2 - 4x$,
- b) $g'(x)$, kun $g(x) = 7x^2 + 5x - 3$,
- c) $h'(x)$, kun $h(x) = 3x \cdot (x^2 - 5)$

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= x^2 - 4x \\ f'(x) &= 2x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad g(x) &= 7x^2 + 5x - 3 \\ g'(x) &= 14x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad h(x) &= 3x(x^2 - 5) \\ &= 3x^3 - 15x \\ h'(x) &= 9x^2 - 15 \end{aligned}$$

(3)

4. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0.03q \\ R &= 20q - 0.03q^2 \\ MR &= 20 - 0.06q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 0.02q^2 + 5q + 150 \\ MC &= 0.04q + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 0.04q + 5 &= 20 - 0.06q \\ 0.1q &= 15 \\ q &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(150) &= R(150) - C(150) \\ &= (20 \cdot 150 - 0.03 \cdot 150^2) - (0.02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150) \\ &= (3000 - 675) - (450 + 750 + 150) \\ &= 975 \end{aligned}$$

Vastaus: voitto on suurin, kun valmistetaan 150 tuotetta paluossa. Voitto on silloin 975 €/pallo.

5. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). On arvioitu, että hintaan 4.00 €/tuote saadaan myytyä 100 tuotetta viikossa ja hintaan 3.00 €/tuote saadaan myytyä 200 tuotetta viikossa. Käytetään seuraavassa laskelmassa lineaarista kysyntäfunktiota $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 €/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 €/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton?
(voitto = myyntitulo - kustannukset)

$$\begin{aligned} C(q) &= 1.5q + 230 \\ MC &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 5 - 0.01q \\ R &= 5q - 0.01q^2 \\ MR &= 5 - 0.02q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 1.5 &= 5 - 0.02q \\ 0.02q &= 3.5 \\ q &= 175 \end{aligned}$$

Vastaus: tuotetaan 175 tuotetta viikossa

6. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 5 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 €/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo - kustannukset)?

$$C(q) = \begin{cases} 1,5q + 230 & , q \leq 150 \\ 1,6 \cdot (q - 150) + 1,5 \cdot 150 + 250 & , q > 150 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1,5q + 230 & , q \leq 150 \\ 1,6q + 235 & , q \geq 150 \end{cases}$$

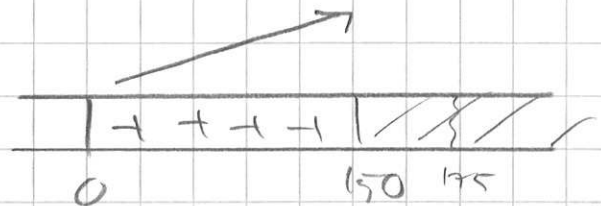
$$P(q) = \begin{cases} (5q - 0,01q^2) - (1,5q + 230) & , q \leq 150 \\ (5q - 0,01q^2) - (1,6q + 235) & , q > 150 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3,5q - 0,01q^2 - 230 & , q \leq 150 \\ 3,4q - 0,01q^2 - 235 & , q > 150 \end{cases}$$

Kun $q \leq 150$

$$P'(q) = 3,5 - 0,02q$$

$$P'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 175$$

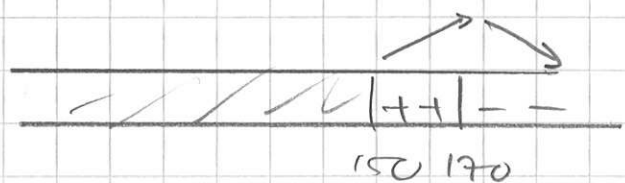


$P(q)$ kasvava, maksimi kohdassa $q = 150$

Kun $150 < q$

$$P'(q) = 3,4 - 0,02q$$

$$P'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 170$$



maksimi kohdassa $q = 170$

$$P(150) = 3,5 \cdot 150 - 0,01 \cdot 150^2 - 230 = 70 \leftarrow \text{parempi}$$

$$P(170) = 3,4 \cdot 170 - 0,01 \cdot 170^2 - 235 = 54$$

Varlaan tuotetaan 150 tuotetta viikore

(5)

7. Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -2.1 . Tuotteen hinta on nyt 20.50 €/kpl ja sen kysyntä on 150 kpl/kk .

- Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen yksikköhintaa alennetaan eurolla?
- Miten muuttuu myyntitulo $R = pq$, kun yksikköhintaa alennetaan eurolla?
- Kannattaako edellä kuvattu hinnan alentaminen eurolla, jos tuotteen valmistuskustannus on $C(q) = 300 + 12,00 \cdot q + 0,01 \cdot q^2$
- Voiko saman asian todeta rajatuoton ja rajakustannusten avulla?

$$p = 20,50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$$

$$q = 150 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

$$\text{jousto} = -2,1$$

$$a) \Delta p = -1 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}, \Delta q = x$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}$$

$$\frac{x}{-1 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}} \cdot \frac{20,50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}}{150 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}} = -2,1$$

$$x = \frac{-2,1 \cdot (-1) \cdot 150 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}}{20,50} = 15,366 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

$$\approx 15,4 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

$$b) R_1 = p_1 \cdot q_1 = 20,50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot 150 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 3075 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$R_2 = p_2 \cdot q_2 = 19,50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot 165,4 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} = 3225,3 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$\rightarrow \Delta R = R_2 - R_1 = 150,30 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$c) C_1 = C(q_1) = 300 + 12 \cdot 150 + 0,01 \cdot 150^2 = 2325 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$C_2 = C(q_2) = 300 + 12 \cdot 165,4 + 0,01 \cdot 165,4^2 = 2558,37 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$\rightarrow \Delta C = C_2 - C_1 = 233,37 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$\Delta C > \Delta R \rightarrow \text{ei kannata}$$

$$d) MR = p \left(1 + \frac{1}{\text{jousto}} \right) = 20,50 \left(1 + \frac{1}{-2,1} \right) = 10,74$$

$$MC = 12 + 0,02q$$

$$MC(150) = 12 + 0,02 \cdot 150 = 15$$

$$MC > MR \rightarrow \text{tuotantoa tulee supistaa}$$

$$\rightarrow \text{hintaa tulee nostaa}$$

8. Olkoon kysyntäfunktio $p = 20 - 0.2q$

(1) Mikä on kysynnän hintajousto, kun $q = 20$?

(2) Mikä on kysynnän hintajousto, kun $q = 80$?

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = 20 \\ q_2 = 21 \end{array} \right\} \Delta q = q_2 - q_1 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 20 - 0.2 \cdot 20 = 16 \\ p_2 = 20 - 0.2 \cdot 21 = 15.8 \end{array} \right\} \Delta p = 15.8 - 16 = -0.2$$

$$\text{pouisto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{-0.2} \cdot \frac{16}{20} = \underline{\underline{-4}} \quad \text{ok}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = 80 \\ q_2 = 81 \end{array} \right\} \Delta q = q_2 - q_1 = 81 - 80 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 20 - 0.2 \cdot 80 = 4.0 \\ p_2 = 20 - 0.2 \cdot 81 = 3.8 \end{array} \right\} \Delta p = 3.8 - 4.0 = -0.2$$

$$\text{pouisto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{-0.2} \cdot \frac{4}{80} = \underline{\underline{-0.25}} \quad ???$$

ei ole normaali
arvo kysynnän
hintapouistolle