

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

6. harjoitus, (pe 1.2.2013)

1. Laske integraalit

a) $\int (3x^2 - x) dx$ b) $\int_1^4 (2x + 1) dx$

a) $\int (3x^2 - x) dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) $\int_1^4 (2x + 1) dx = \left[x^2 + x \right]_1^4 = (4^2 + 4) - (1^2 + 1) = 18$

2. Yritys A valmistaa sairaalatarvikkeita. Yritys laskee saavansa toiminnasta nettotulovirran 10 000 €/kuukausi.

Yritys B arvioi pystyvänsä parempien asiakaskontaktiensa avulla parempaan tulokseen siten, että samalla tuotantokoneistolla se saisi vakiotulovirran 15 000 euroa kuukaudessa.

Alussa yritys B joutuisi tekemään 20 000 € alkuiinvestoinnit markkinointiin. Onko ajateltavissa, että yritys A myisi tuotantokoneistonsa yritykselle B ja missä rajoissa myyntihinnan pitäisi olla, kun yrityksen käyttävät laskelmissaan korkointensiteettejä $\rho_A = 0.12$ ja $\rho_B = 0.14$?

$$NPV_A = \frac{12 \cdot 10000 \text{ €/v}}{0,12 \text{ v}} = 1000000 \text{ €}$$

$$NPV = \frac{K}{r}$$

$$NPV_B = -20000 \text{ €} + \frac{12 \cdot 15000 \text{ €/v}}{0,14 \text{ v}} = 1265700 \text{ €}$$

Kauppa saattaa hyvinkin syntyä. Jos kauppahinta on välillä $1000000 \text{ €} < \text{hint} < 1266000 \text{ €}$ niin kumpikin osapuoli on tyytyväinen.

3. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

tuote	2000			2010		
	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	15,00	100		10,00	300	
2	8,00	500		15,00	100	
3	30,00	20		20,00	200	

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hinta-indeksit.

b) Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

$$a) P^L = \frac{10 \cdot 100 + 15 \cdot 500 + 20 \cdot 20}{15 \cdot 100 + 8 \cdot 500 + 30 \cdot 20} \cdot 100 = 145,9$$

$$P^P = \frac{10 \cdot 300 + 15 \cdot 100 + 20 \cdot 200}{15 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 30 \cdot 200} \cdot 100 = 75,2$$

b) Laspeyresin indeksissä suurin paino tulee tuotteelle 2, jonka hinta nousi.

Paashenin indeksissä suurin paino tulee tuotteelle 1, jonka hinta laski.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Fisherin hintaindeksi} \\ P^F = \sqrt{145,9 \cdot 75,2} = 104,7 \end{array} \right)$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{-}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2$$

$$(1) \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

$$\underline{\underline{\text{Vastaus } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}}}$$

$$\left(\text{Tarkistus } \begin{cases} 1 + 2 = 3 \text{ } \checkmark \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 \text{ } \checkmark \end{cases} \right)$$

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \cdot 4 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{epätori}$$

Vast: Ratkaisujoukko on tyhjä

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \cdot 4 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ok} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ -3y = -4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$(1) \rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vast: $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$

tarkh. $\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 2 \quad \checkmark \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} = 8 \quad \checkmark \\ \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 3 \quad \checkmark \end{cases} \text{ ok}$

7. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y - 5z = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - z & (1) \\ -y = 7 + 5z & (2) \end{cases}$$

(0) $z = a$

(2) $y = -7 - 5a$

(1) $x + 2(-7 - 5a) = -1 - a$

$\Rightarrow x = 13 + 9a$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 13 + 9a \\ y = -7 - 5a \\ z = a \end{cases}$$

Tarkistus:

$$(13 + 9a) + 2(-7 - 5a) + a = -1 \quad //$$

$$3(13 + 9a) + 5(-7 - 5a) - 2a = 4 \quad //$$

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a) $A+B$, b) $A+C$, c) $B+C$

$$a) \quad \begin{matrix} A+B \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} A+C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$c) \quad \begin{matrix} B+C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

9. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a) AB , b) BA , c) AC , d) CA , e) $C^T A$

$$a) \quad \begin{matrix} AB \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} BA \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \begin{matrix} AC \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad \begin{matrix} CA \\ 3 \times 2 \quad 3 \times 3 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$e) \quad \begin{matrix} C^T A \\ 2 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ \text{ok} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$p = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Laske matriisilauseke pD^T . (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)
- Onko lauseke pD järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke Dp^T järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke Dp järkevä (mikä sen arvo on)?

a) $pD^T = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix}_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 65 & 70 & 45 & 90 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$

b) pD ei voi laskea
 $1 \times 3 \quad 4 \times 3$

c) $Dp^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}_{4 \times 3} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$

d) Dp ei voi laskea
 $4 \times 3 \quad 1 \times 3$