

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, (pe 2.12.2016)

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

3. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k+1$ saadaan arvioitujen siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on

$\vec{x}_0 = (0 \quad 7000 \quad 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \dots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1, \dots, 100$.)

4. Mikä on tehtävässä 3 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

Ohje: Tasapainojakauma toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} \mathbf{P}\vec{x}^* = \vec{x}^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,90x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = x_1^* \\ 0,05x_1^* + 0,80x_2^* + 0,25x_3^* = x_2^* \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* + 0,50x_3^* = x_3^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

5. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros $\sim$ yksi kuukausi.

a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}.$$

b) Mainosyhtiö tarjoaa kampanjaa, jonka avulla pesuaineen A markkinaosuus saataisiin viikon tehokampanjalla suoraan tasapainotilaan ilman transienttiä kasvujaksoa. Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto mainoskampanjan jälkeen (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*.$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?

6. Miten edellisen tehtävän tulokset muuttuvat, jos laskemme kertyneiden katetuottojen sijasta vuoden ajalta katetuottovirran nykyarvot ja kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.