

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

2. välikoe perjantaina 9.12.2016**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.**Huomautus kokeen valvojille.** Tähän kokeeseen odotetaan 4 opiskelijaa. Pyydän, että kaikki paikalle saapuvat otetaan kokeeseen mukaan. *Matti Laaksonen*

1. a) (2p) Panos-tuotos -analyysi (Mihin kehitetty? Mitä sillä lasketaan? Minkä hitaaseen muuttumiseen menetelmä perustuu?)
 b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)
 c) (2p) Luettele ainakin neljä determinantin ominaisuutta, joiden avulla determinantin laskemista voi helpottaa.

2. a) (3p) Laske integraali $\int (3x^2 + 4x + 7) dx$
 b) (3p) Välillä $0 \leq x \leq 2$ on määritelty tiheysfunktio $f(x) = 0,75 \cdot (2x - x^2)$. Laske odotusarvo

$$E[x] = \int_0^2 x \cdot f(x) dx.$$

3. Laske matriisille **A** a) (2p) determinantti $\det(\mathbf{A})$, b) (3p) käänteismatriisi $\mathbf{A}^{-1}$ ja c) (1p) $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}^T$, kun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rcll} \text{maksimoi} & 4x_1 & + & x_2 \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 \leq 36 \\ & & & x_1 \leq 5 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Kaavoja:**Derivaatta ja 2. asteen yhtälö**

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jaksolliset suoritukset

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \quad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\begin{aligned} \text{annuiteetti } k &= c_{n,i} K_0 \\ \text{osamaksuerä } k &= c_{n,i} (H - h + m) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Matriisikaavoja ($n \times n$) neliöatriisille $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

missä $\det(\mathbf{A}_{rs})$ on alkioon a_{rs} liittyvä minori

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$$

missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$ on alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Pseudoinverssi:

$$\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Cramerin kaavat:

$$x_j = D_j / D$$

Indeksejä

$$\text{Laspeyres} \quad P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Paaschen} \quad P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$$

Determinantit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$