

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**2. harjoitus, viikko 4 (23.-27.1.2017)**

R1	ma	12-14	F249	R5	ti	14-16	F453
R2	ma	14-16	F453	R6	to	12-14	F425
R3	ti	08-10	F119	R7	pe	08-10	F425
R4	ti	12-14	F453	R8	pe	10-12	F249

1. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x - 1 \leq 3x + 1$

b) $3(x - 1) \geq 7(x + 1)$

c) $x^2 + 3 \geq 2x$

d) Ratkaise yhtälö

$1.015^{-2x} = 0.700$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad x - 1 &\leq 3x + 1 \\
 x - 3x &\leq 1 + 1 \\
 -2x &\leq 2 \quad || : (-2) \\
 \underline{x &\geq -1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad 3(x - 1) &\geq 7(x + 1) \\
 3x - 3 &\geq 7x + 7 \\
 3x - 7x &\geq 7 + 3 \\
 -4x &\geq 10 \quad || : (-4) \\
 \underline{x &\leq -2,5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad x^2 + 3 &\geq 2x \\
 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 &\geq 0 \\
 &= f(x) \\
 (*) \Rightarrow &\underline{\text{tosi kaikilla } x}
 \end{aligned}$$

(*) Millainen on $y = f(x)$?
 $\rightarrow$ ylöspäin aukeava paraabeli

(1) (2) (3)

nollakohtat $x^2 - 2x + 3 = 0$
 $\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$
 $\rightarrow$ ei reaalijuuria
 $\rightarrow$ vaihtoehto (1) ++++
 $\rightarrow f(x) \geq 0$ kaikilla x

$$\text{d)} \quad 1,015^{-2x} = 0,700 \quad || \ln()$$

$$\begin{aligned}
 -2x \ln 1,015 &= \ln 0,700 \quad || : (-2 \ln 1,015) \\
 x &= \frac{\ln 0,700}{-2 \ln 1,015} = \underline{\underline{11,98}}
 \end{aligned}$$

2. Piirrä funktion

$$f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \frac{1}{x-4.1}$$

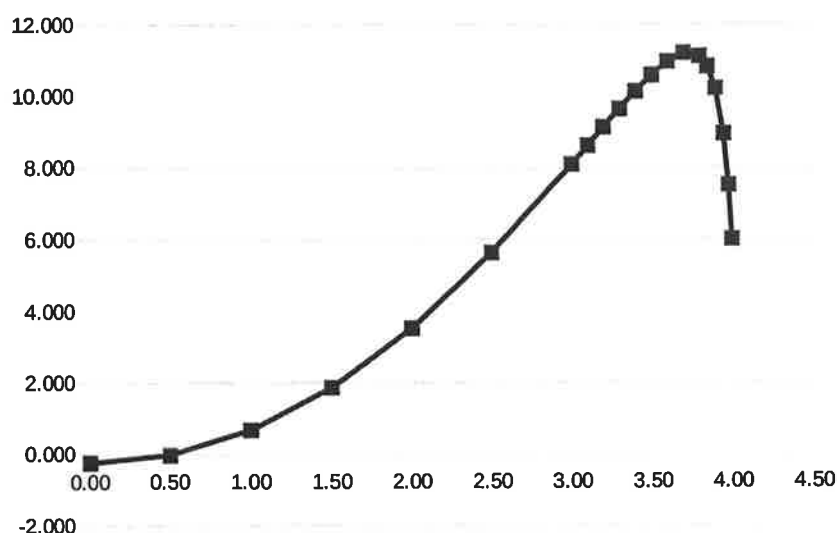
kuvaaja.

(Vihje: Huomaa, että funktio on määritelty välillä $0 \leq x \leq 4$. Voit kokeilla sivustoa

"<http://www.wolframalpha.com/>" Anna syötekenttään komento: `plot x^2+1/(x-4.1)`

Lisää esimerkkejä löydät verkkosivulta: "<http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>")

x	f(x)
0.00	-0.244
0.50	-0.028
1.00	0.677
1.50	1.865
2.00	3.524
2.50	5.625
3.00	8.091
3.10	8.610
3.20	9.129
3.30	9.640
3.40	10.131
3.50	10.583
3.60	10.960
3.70	11.190
3.80	11.107
3.85	10.823
3.90	10.210
3.95	8.936
3.98	7.507
4.00	6.000



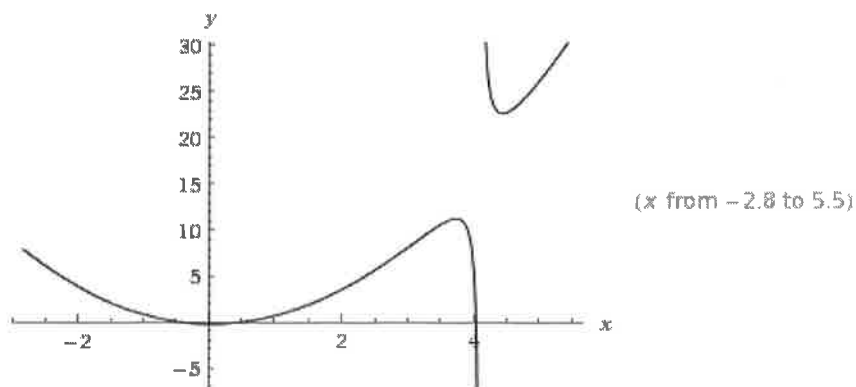
plot $x^2+1/(x-4.1)$

Web Apps (<http://www.wolframalpha.com/web-apps/>)  Examples (<http://www.wolframalpha.com/examples/>)
/ex      Random

Input interpretation:

plot $x^2 + \frac{1}{x - 4.1}$

Plots:



3. Laske derivaatat seuraaville funktioille

a) $f(x) = 2x^3 + 8x^2$ b) $g(x) = 2(4x^2 - 3x + 7)$ c) $h(x) = (x - 3)^2$

a) $f(x) = 2x^3 + 8x^2$
 $f'(x) = 6x^2 + 16x$

b) $g(x) = 2(4x^2 - 3x + 7)$
 $= 8x^2 - 6x + 14$
 $g'(x) = 16x - 6$

c) $h(x) = (x - 3)^2$
 $= x^2 - 6x + 9$
 $h'(x) = 2x - 6$

4. Tuotteen A valmistuskustannus $C_a(q)$ (€/k) on valmistusmäärän q (kpl/kk) funktio siten, että

$$C_a(q) = 28 + 2.1q + 0.0025q^2.$$

Kustannusfunktion derivaattaa sanomme rajakustannukseksi

$$MC_a(q) = \frac{d}{dq}C_a(q) = \frac{d}{dq}(28 + 2.1q + 0.0025q^2)$$

Laske a) $C_a(100)$, b) $MC_a(q)$, c) $MC_a(100)$ ja d) piirrä kustannusfunktion $C_a(q)$ ja rajakustannusfunktion $MC_a(q)$ kuvaajat, kun $0 < q < 100$.

$$C_a(q) = 28 + 2.1q + 0.0025q^2$$

$$MC_a(q) = 2.1 + 0.005q$$

a) $C_a(100) = 28 + 2.1 \cdot 100 + 0.0025 \cdot 100^2$
 $= 28 + 210 + 25$
 $= 263$

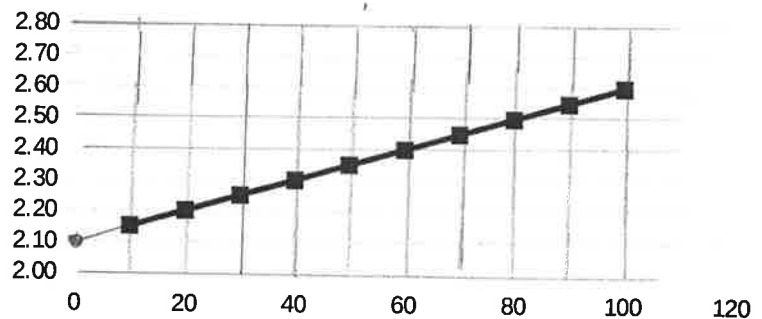
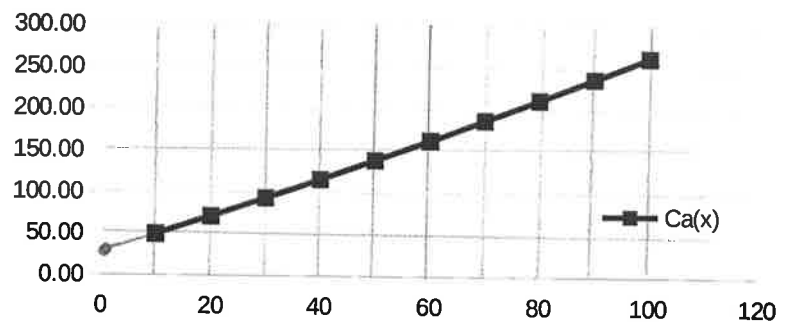
b) $MC_a(q) = 2.1 + 0.005q$

c) $MC_a(100) = 2.1 + 0.005 \cdot 100 = 2.6$

d) kuvaajat seuraavalla sivulla

q	$Ca(q) = 28 + 2,1q + 0,0025q^2$	$MC_q(q) = 2,1 + 0,005q$
10	$28 + 2,1 \cdot 10 + 0,0025 \cdot 10 = 49,25$	$2,1 + 0,005 \cdot 10 = 2,15$
20	$28 + 2,1 \cdot 20 + 0,0025 \cdot 20 = 71,00$	$2,1 + 0,005 \cdot 20 = 2,20$
30	$28 + 2,1 \cdot 30 + 0,0025 \cdot 30 = 93,25$	$2,1 + 0,005 \cdot 30 = 2,25$
40	$28 + 2,1 \cdot 40 + 0,0025 \cdot 40 = 116,00$	$2,1 + 0,005 \cdot 40 = 2,30$
50	$28 + 2,1 \cdot 50 + 0,0025 \cdot 50 = 139,25$	$2,1 + 0,005 \cdot 50 = 2,35$
60	$28 + 2,1 \cdot 60 + 0,0025 \cdot 60 = 163,00$	$2,1 + 0,005 \cdot 60 = 2,40$
70	$28 + 2,1 \cdot 70 + 0,0025 \cdot 70 = 187,25$	$2,1 + 0,005 \cdot 70 = 2,45$
80	$28 + 2,1 \cdot 80 + 0,0025 \cdot 80 = 212,00$	$2,1 + 0,005 \cdot 80 = 2,50$
90	$28 + 2,1 \cdot 90 + 0,0025 \cdot 90 = 237,25$	$2,1 + 0,005 \cdot 90 = 2,55$
100	$28 + 2,1 \cdot 100 + 0,0025 \cdot 100 = 263,00$	$2,1 + 0,005 \cdot 100 = 2,60$

x	Ca(x)	Mca(x)
10	49.25	2.15
20	71.00	2.20
30	93.25	2.25
40	116.00	2.30
50	139.25	2.35
60	163.00	2.40
70	187.25	2.45
80	212.00	2.50
90	237.25	2.55
100	263.00	2.60



5. Funktiosta $f(x)$ tiedetään arvot $f(0.25) = 1.34$ ja $f(0.50) = 1.92$. Arvioi lineaarisen interpoloinnin avulla funktion arvoa kohdassa $x = 0.30$.

$$f(0,25) = 1,34$$

$$x_0 = 0,25$$

$$y_0 = 1,34$$

$$f(0,30) = ?$$

$$x = 0,30$$

$$y = ?$$

$$f(0,50) = 1,92$$

$$x_1 = 0,50$$

$$y_1 = 1,92$$

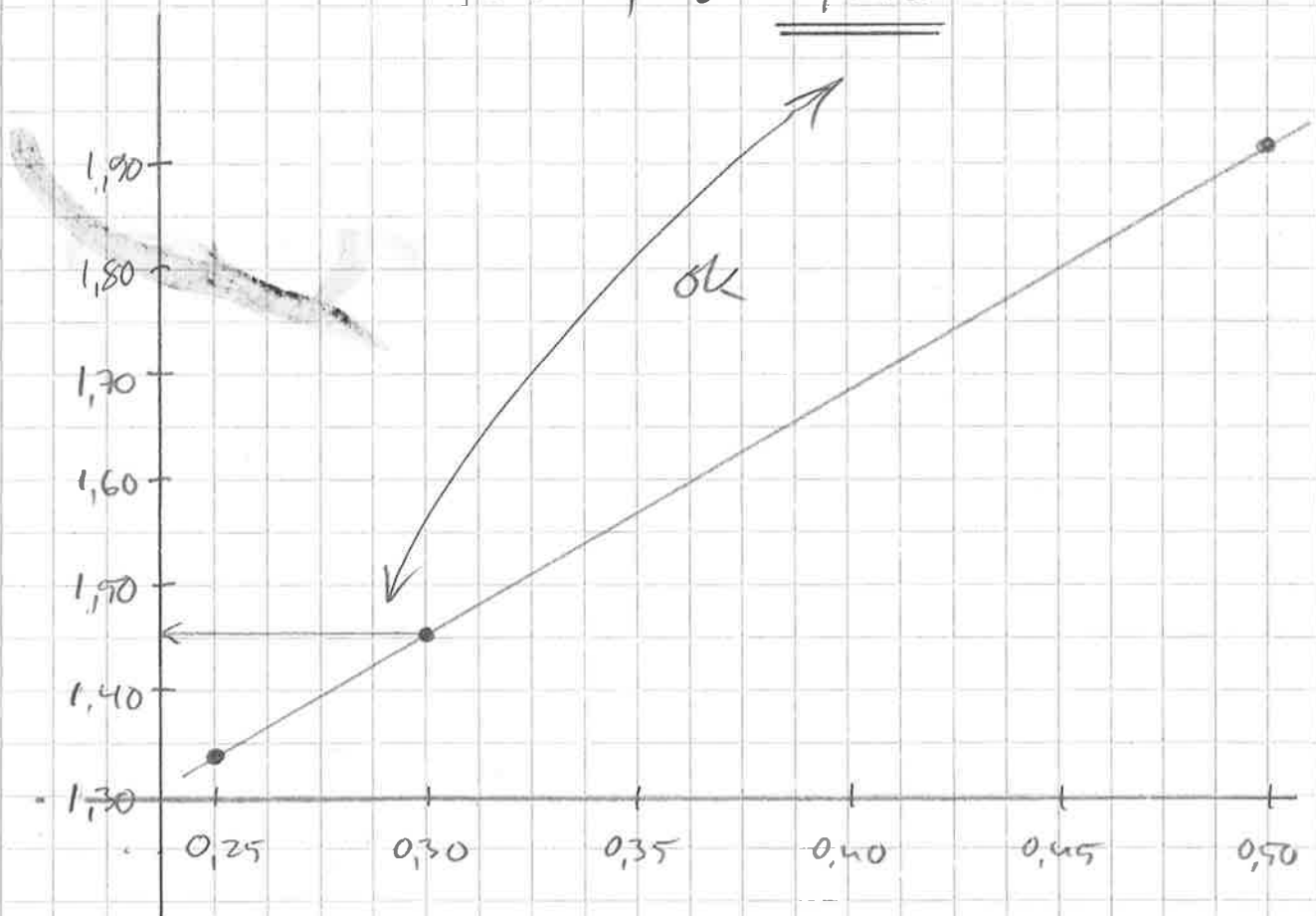
kaava

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (y_1 - y_0)$$

$$= 1,34 + \frac{0,30 - 0,25}{0,50 - 0,25} (1,92 - 1,34)$$

$$= 1,34 + \frac{0,05}{0,25} \cdot 0,58 = 1,34 + 0,2 \cdot 0,58$$

$$= 1,34 + 0,116 = \underline{\underline{1,456}}$$



6. Maatalousyrittäjä kasvattaa marjoja kasvihuoneessa. Marjat myydään tuoreina kuluttajille. Hinta määräytyy kunkin viikon tuotantomäärästä. Kun viikon tuotantomäärä oli 520 kg/vko, niin hinta asettui tasolle 15,00 €/kg. Kun viikon tuotantomäärä oli 300 kg/vko, niin hinta asettui tasolle 17,00 €/kg. Määritä interpoloimalla se kysyntä funktio $p = p(q)$, jota yrittäjän kannattaa käyttää toimintansa suunnittelussa.

$$p(520) = 15,00$$

$$q_0 = 520$$

$$p_0 = 15,00$$

$$p(q) = ?$$

$$p(300) = 17,00$$

$$q_1 = 300$$

$$p_1 = 17,00$$

$$p = p_0 + \frac{q - q_0}{q_1 - q_0} (p_1 - p_0)$$

$$p = 15,00 + \frac{(q - 520)(17,00 - 15,00)}{(300 - 520)}$$

$$p = 15,00 + \frac{(17,00 - 15,00)}{(300 - 520)} \cdot (q - 520)$$

$$p = 15,00 - \frac{2}{220} (q - 520)$$

$$= 0,00909$$

$$p = 15,00 - 0,00909 q + 4,727$$

$$p = 19,73 - 0,00909 q$$