

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

3. harjoitus, viikko 5 (30.1.-3.2.2017)

R1	ma	12-14	F249	R5	ti	14-16	F453
R2	ma	14-16	F453	R6	to	12-14	F140
R3	ti	08-10	F425	R7	pe	08-10	F425
R4	ti	12-14	F453	R8	pe	10-12	F249

1. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

tuotto:

$$\begin{aligned} \text{kysyntäfunktio } p &= 20 - 0,030q \\ \text{tuottofunktio } R(q) &= q \cdot p = q(20 - 0,03q) \\ &= 20q - 0,03q^2 \\ \text{raja-tuotto } MR(q) &= 20 - 0,06q \end{aligned}$$

kustannus:

$$\begin{aligned} \text{kust.funktio } C(q) &= 0,02q^2 + 5q + 150 \\ \text{raja-kustannus } MC(q) &= 0,04q + 5 \end{aligned}$$

Voiton maksimointi

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 0,04q + 5 &= 20 - 0,06q \\ 0,1q &= 15 && | \cdot 10 \\ q &= 150 \end{aligned}$$

Voitto silloin

$$\begin{aligned} P(150) &= R(150) - C(150) \\ &= (20 \cdot 150 - 0,03 \cdot 150^2) - (0,02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150) \\ &= 3000 - 675 - 450 - 750 - 150 \\ &= 975 \end{aligned}$$

Vastaus: Voitto on suurin mahdollinen, kun tuotetaan 150 tuotetta jaksossa. Voitto on silloin 975 € / jaksossa

2. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). Kysyntä-funktio on $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Yrityksen tuotan-tokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmis-tusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo - kustannukset)?

Tuottofunktio

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot (5 - 0.01q) = 5q - 0.01q^2$$

Kustannusfunktio

$$C(q) = \begin{cases} 1.5q + 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 1.5 \cdot 150 + 1.6 \cdot (q - 150) + 250 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1.5q + 230 & , q \leq 150 \\ 1.6q + 235 & , q > 150 \end{cases}$$

Voitto

$$P(q) = R(q) - C(q) = \begin{cases} 3.5q - 0.01q^2 - 230 & , q \leq 150 \\ 3.4q - 0.01q^2 - 235 & , q > 150 \end{cases}$$

I) Tapaus $0 \leq q \leq 150$ ("Ei ylityötä")

$$P(q) = 3.5q - 0.01q^2 - 230$$

$$P'(q) = 3.5 - 0.02q$$

derivaatan nollakohdat

$$P'(q) = 0$$

$$3.5 - 0.02q = 0 \quad | : 0.02$$

$$q = 175$$

$P(q)$	
$P'(q)$	++++

0 150 175

$q_{\max} = 150$

$$P(150) = 3.5 \cdot 150 - 0.01 \cdot 150^2 - 230 = 70$$

II) Tapaus $150 < q$ ("Tehdään ylityötä")

$$P(q) = 3.4q - 0.01q^2 - 235$$

$$P'(q) = 3.4 - 0.02q$$

$$P'(q) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3.4 - 0.02q = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 170$$

$P(q)$	
$P'(q)$	++--

150 170

$q_{\max} = 170$

$$P(170) = 3.4 \cdot 170 - 0.01 \cdot 170^2 - 235 = 54$$

Vastaus:

Optimi on valmistaa 150 tuotetta viikossa

3. Erään tuotteen kysynnän hintajousto on $-1,75$. Tuotteen hinta on nyt $12,50\text{€}/\text{kpl}$ ja sen kysyntä on $1200\text{kpl}/\text{kk}$.

- a) Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan yhdellä eurolla?
 b) Miten muuttuu tuotto $R = q \cdot p$, jos tuotteen hintaa lasketaan yhdellä eurolla?
 c) Tuotteen rajakustannus on $8,00\text{€}/\text{kpl}$. Kannattaako laskea myyntihintaa eurolla?

$$\begin{aligned} \text{a) } p &= 12,50 \text{ €}/\text{kpl} \\ \Delta p &= -1,00 \text{ €}/\text{kpl} \\ q &= 1200 \text{ kpl}/\text{kk} \\ \Delta q &= x \\ \text{jousto} &= -1,75 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-1,00 \text{ €}/\text{kpl}} \cdot \frac{12,50 \text{ €}/\text{kpl}}{1200 \text{ kpl}/\text{kk}} = -1,75$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1,75 \cdot (-1,00) \cdot 1200 \text{ kpl}/\text{kk}}{12,50}$$

$$= +168 \text{ kpl}/\text{kk} \quad (14,0\%)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{tuotto lopussa} &= 1368 \text{ kpl} \cdot 11,50 \text{ €}/\text{kpl} = 15732 \text{ €}/\text{kk} \\ - \text{tuotto alussa} &= -1200 \text{ kpl} \cdot 12,50 \text{ €}/\text{kpl} = -15000 \text{ €}/\text{kk} \\ \hline \text{Muutos} \quad \Delta R &= 732 \text{ €}/\text{kk} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \Delta C \geq MC \cdot \Delta q = 8,00 \text{ €}/\text{kpl} \cdot 168 \text{ kpl} = 1344 \text{ €}/\text{kk}$$

Vastaus: a) kysyntä kasvaa $168 \text{ tuotetta}/\text{kk}$
 (kysyntä kasvaa 14%)

b) Tuotto kasvaa $732 \text{ €}/\text{kk}$ ($4,9\%$)

c) Kustannukset kasvavat enemmän kuin tuotot, joten hinnan alentaminen ei kannata

$$\text{II} \quad MR = p \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) = 12,50 \text{ €}/\text{kpl} \left(1 + \frac{1}{-1,75}\right) = 5,36 \text{ €}/\text{kpl}$$

Nyt $MC > MR \rightarrow$ tuotannon kannattaa supistaa

4. Yritys valmistaa tuotteita ja myy ne kappalehintaan 25 euroa. Rajakustannus on 6 euroa/tuote ja kysynnän hintajousto on $\eta = -1.2$. Kannattaako yrityksen laajentaa vai supistaa tuotantoaan? (Ohje: $MR = p(1 + \frac{1}{\eta})$.)

$$MR = p \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) = 25,00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \left(1 + \frac{1}{-1,2}\right) = 4,17 \frac{\text{€}}{\text{kpl}}$$

$$MC = 6 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \rightarrow MC > MR \rightarrow \text{tuotantoa kannattaa supistaa}$$

5. a) Laske 5.25% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.

b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.008125?

$$a) (1 + i_{kk})^{12} = 1,0525 \\ \rightarrow i_{kk} = 1,0525^{1/12} - 1 = \underline{\underline{0,00427312776}}$$

$$b) 1,008125^{12} = 1 + i_{\text{tod}} \\ 1,10197722 = 1 + i_{\text{tod}} \rightarrow i_{\text{tod}} = 0,10197722$$

$\rightarrow$ todellinen vuosikorko on 10,2%

6. Vuoden alussa 1.1.2017 yrittäjä otti 30 000 euron lainan. Laina-ajaksi sovitaan 15 kuukautta ja lainan todelliseksi vuosikoroksi 3.50%. Yrittäjä ei lyhennä lainaansa eikä maksa korkoja ennen kuin laina-aika on kulunut loppuun 31.3.2018. Silloin hän hoitaa kertamaksulla lainan korkoineen. Miten suureksi laina kasvaa, kun:

(a) Korkojakso on kuukausi ja $i = 1.0350^{(1/12)} - 1$.

(b) Käytetään jatkuvaa korkolaskua ja korkointensiteetti on $\rho_{\text{vuosi}} = \ln(1.0350)$.

$$a) K_{15} = (1 + i)^{15} \cdot K_0 = (1,0350^{1/12})^{15} \cdot 30\,000 \text{ €} = \underline{\underline{31\,318,19 \text{ €}}}$$

$$b) K_{1,25v} = (1 + i_v)^{1,25} \cdot K_0 = 1,0350^{1,25} \cdot 30\,000 \text{ €} = \underline{\underline{31\,318,19 \text{ €}}} \\ (= e^{st} K_0 = e^{\ln(1,035) \cdot 1,25} \cdot 30\,000 \text{ €} = 31\,318,19 \text{ €})$$