

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, viikko 10 (6.3.–10.3.2017)

R1	ma	12–14	F249	R5	ti	14–16	F453
R2	ma	14–16	F453	R6	to	12–14	F104
R3	ti	08–10	F425	R7	pe	08–10	F425
R4	ti	12–14	F453	R8	pe	10–12	F249

1. Leipomon raaka-ainevaraston läpi kulkee 1 200 kg suolaa vuodessa. Jokaisesta tilauksesta aiheutuu tilauskustannus 6,00 €. Yksikköylläpitokustannus on 0,50 euroa/kilo/vuosi. Laske Harrisin neliöjuurikaavan mukainen optimaalinen tilauserän koko. Mikä on tällä tilauserän koolla toimittaessa järjestelmän kokonaiskustannus (euroa/vuosi)? Miten usein tilauksia silloin tehdään?

2. Tehtävän 1 leipomo päättää tilata suolaa kerran kuukaudessa. Mikä on silloin tilauserä ja mikä on suolan varastoinnin kokonaiskustannus? Onko kustannusten lisäys merkittävä?

3. Erään raaka-aineen kysyntä on 4800 kg/vuosi. Tilauskustannus on 4,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 2,00 €/kg/kuukausi.

- (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
- (2p) Mitkä ovat varastohoidon kokonaiskustannukset vuodessa?
- (2p) Raaka-aineen toimittaja antaa sisäänostossa 1,0% määräalennuksen, jos tilauserä on vähintään 25 kg, 2% alennuksen jos tilauserä on vähintään 50 kg ja 3% alennuksen, jos tilauserä on vähintään 100 kg. Raaka-aineen normaali ostohinta on 3,00 €/kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

4. Laske integraalit

$$\text{a) } \int (4x + 6x^2) dx \quad \text{b) } \int_2^3 (1 + 6x) dx.$$

5. Muuttuja x saa arvoja väliltä $0 \leq x \leq 2$ niin, että todennäköisyystiheys on $\phi(x) = 0,75 \cdot (2x - x^2)$. Funktion kerroin valitaan niin, että $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$.

a) Tarkista, että kerroin on oikein asetettu. Ts. laske integraali $\int_0^2 \phi(x) dx$

b) Laske muuttujan x odotusarvo $E[x] = \int_0^2 x \cdot \phi(x) dx$.

c) Millä todennäköisyydellä $x \geq 1.2$. Ts. Laske $P[x \geq 1.2] = \int_{1.2}^2 \phi(x) dx$

6. Vakiokassavirta $k = 280 \text{ €/kk}$ alkaa 10 päivän kuluttua ja kestää 40 päivää ($t_1 = 10$ ja $t_2 = 50$). Viikonloput eivät katkaise kassavirtaa, ja voimme soveltaa sakasalaista laskutapaa (1 kk = 30 päivää). Laske hetkeen $t_0 = 0$ laskettu nykyarvo, kun laskentakorko on 3.25% (p.a.).

Varastomallit:

$$\text{perusmalli} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}, \quad TC_0(q) = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$$

$$\text{puutemalli} \quad q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$$
$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

$$\text{yksinkertainen korkolasku:} \quad K_t = (1+it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

$$\text{koronkorkolasku:} \quad K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{jatkuva korkolasku:} \quad K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Jatkuvan vakiokassavirran nykyarvo

Jos kassavirta k alkaa hetkellä t_1 ja päättyy hetkellä t_2 , niin hetkeen t_0 diskontattu nykyarvo on

$$NPV_{t_0} = \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho(t-t_0)} k dt = \frac{k}{\rho} \left(e^{-\rho(t_1-t_0)} - e^{-\rho(t_2-t_0)} \right), \quad \rho = \ln(1+i)$$

7. harjoitus, viikko 10 (6.3.-10.3.2017)

R1	ma	12-14	F249	R5	ti	14-16	F453
R2	ma	14-16	F453	R6	to	12-14	F104
R3	ti	08-10	F425	R7	pe	08-10	F425
R4	ti	12-14	F453	R8	pe	10-12	F249

1. Leipomon raaka-ainevaraston läpi kulkee 1 200 kg suolaa vuodessa. Jokaisesta tilauksesta aiheutuu tilauskustannus 6,00 €. Yksikköylläpitokustannus on 0,50 euroa/kilo/vuosi. Laske Harrisin neliöjuurikaavan mukainen optimaalinen tilauserän koko. Mikä on tällä tilauserän koolla toimittaessa järjestelmän kokonaiskustannus (euroa/vuosi)? Miten usein tilauksia silloin tehdään?

Kysyntä $D = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}$

Tilaukset $K = 6,00 \text{ €}$

Yksikkö ylläpitokustannus $h = 0,50 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}}$

Optimaalinen tilauserä

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \text{ €} \cdot 1200 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{0,50 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}}}} \\
 &= \sqrt{28800 \frac{\text{€} \cdot \text{kg} \cdot \text{kg} \cdot \text{vuosi}}{\text{vuosi} \cdot \text{€}}} \\
 &= 169,71 \text{ kg} \approx \underline{\underline{170 \text{ kg}}}
 \end{aligned}$$

Kokonaiskustannus

$$\begin{aligned}
 TC(q_0) &= \frac{KD}{q_0} + h \frac{q_0}{2} = \frac{6 \text{ €} \cdot 1200 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{170 \text{ kg}} + 0,50 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{170 \text{ kg}}{2} \\
 &= 42,35 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 42,50 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = \underline{\underline{84,85 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}}
 \end{aligned}$$

Tilaukset/vuosi $= \frac{D}{q} = \frac{1200 \text{ kg}}{170 \text{ kg}} = 7,06 \approx \underline{\underline{7}}$

Tilausväli $= \frac{365 \text{ pv}}{7,06} = 51,77 \approx \underline{\underline{52 \text{ päivää}}}$

2. Tehtävän 1 leipomo päättää tilata suolaa kerran kuukaudessa. Mikä on silloin tilauserä ja mikä on suolan varastoinnin kokonaiskustannus? Onko kustannusten lisäys merkittävä?

$$q = \frac{D}{12} = 100 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} TC(100) &= \frac{KD}{100 \text{ kg}} + h \cdot \frac{100 \text{ kg}}{2} \\ &= \frac{6 \text{ €} \cdot 1200 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{100 \text{ kg}} + 0,50 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{100 \text{ kg}}{2} \\ &= 72 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 25 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 97 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Kustannusten lisäys (nouattaen tehtävänä 1 laskehtun optimiin) on

$$\begin{aligned} \Delta TC &= TC(100) - TC(170) \\ &= 97 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} - 84,85 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = \underline{\underline{12,15 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}} \end{aligned}$$

$$\frac{12,15 \frac{\text{€}}{\text{v}}}{97,00 \frac{\text{€}}{\text{v}}} \cdot 100\% = \underline{\underline{12,5\%}}$$

↑
vähän

↑ paljon!

Ei päällekkäisiä, mutta arvo tulee korjata

q	$TC = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} =$
100	$\frac{6 \cdot 1200}{100} + 0,5 \cdot \frac{100}{2} = 72,00 + 25,00 = 97,00$
150	$\frac{6 \cdot 1200}{150} + 0,5 \cdot \frac{150}{2} = 48,00 + 37,50 = 85,50$
170	$\frac{6 \cdot 1200}{170} + 0,5 \cdot \frac{170}{2} = 42,35 + 42,50 = 84,85$
200	$\frac{6 \cdot 1200}{200} + 0,5 \cdot \frac{200}{2} = 36,00 + 50,00 = 86,00$
250	$\frac{6 \cdot 1200}{250} + 0,5 \cdot \frac{250}{2} = 28,80 + 62,50 = 91,30$

3. Erään raaka-aineen kysyntä on 4800 kg/vuosi. Tilauskustannus on 4,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 2,00 €/kg/kuukausi.

a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?

b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?

c) (2p) Raaka-aineen toimittaja antaa sisäänostossa 1,0% määräalennuksen, jos tilauserä on vähintään 25 kg, 2% alennuksen jos tilauserä on vähintään 50 kg ja 3% alennuksen, jos tilauserä on vähintään 100 kg. Raaka-aineen normaali ostohinta on 3,00 €/kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

$$\begin{aligned} a) \quad D &= 4800 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}} \\ K &= 4,00 \text{ €} \\ h &= 2,00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{kk}} = 24,00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \end{aligned}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 4800}{24}} \text{ kg} = \underline{\underline{40 \text{ kg}}}$$

$$\begin{aligned} b) \quad TC(40 \text{ kg}) &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} \\ &= \frac{4 \text{ €} \cdot 4800 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{40 \text{ kg}} + 24 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{40 \text{ kg}}{2} \\ &= 480 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 480 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = \underline{\underline{960 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}} \end{aligned}$$

$$c) \quad \tilde{TC}(q) = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} + P \cdot D$$

$$40 \quad \frac{4 \cdot 4800}{40} + 24 \cdot \frac{40}{2} + 2,97 \cdot 4800 = 15216 \text{ €/vuosi}$$

$$50 \quad \frac{4 \cdot 4800}{50} + 24 \cdot \frac{50}{2} + 2,94 \cdot 4800 = \underline{\underline{15096 \text{ €/vuosi}}}$$

$$100 \quad \frac{4 \cdot 4800}{100} + 24 \cdot \frac{100}{2} + 2,91 \cdot 4800 = 15360 \text{ €/vuosi}$$

Varaus: a) $q_0 = 40 \text{ kg}$

$$b) \quad TC_0 = 960 \text{ €/vuosi}$$

$$c) \quad q_{\text{optim}} = 50 \text{ kg}$$

4. Laske integraalit

a) $\int (4x + 6x^2) dx$ b) $\int_2^3 (1 + 6x) dx$.

a) $\int (4x + 6x^2) dx = \underline{\underline{2x^2 + 2x^3 + C}}$

b) $\int_2^3 (1 + 6x) dx = \frac{1}{2} (x + 3x^2)$
 $= (3 + 3 \cdot 3^2) - (2 + 3 \cdot 2^2)$
 $= (3 + 27) - (2 + 12)$
 $= 30 - 14$
 $= \underline{\underline{16}}$

5. Muuttuja x saa arvoja väliltä $0 \leq x \leq 2$ niin, että todennäköisyystiheys on $\phi(x) = 0,75 \cdot (2x - x^2)$. Funktion kerroin valitaan niin, että $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$.

a) Tarkista, että kerroin on oikein asetettu. Ts. laske integraali $\int_0^2 \phi(x) dx$

b) Laske muuttujan x odotusarvo $E[x] = \int_0^2 x \cdot \phi(x) dx$.

c) Millä todennäköisyydellä $x \geq 1,2$. Ts. Laske $P[x \geq 1,2] = \int_{1,2}^2 \phi(x) dx$

$\int_0^2 0,75 (2x - x^2) dx = \int_0^2 (1,5x - 0,75x^2) dx$
 $= \int_0^2 (0,75x^2 - 0,25x^3) dx$
 $= (0,75 \cdot 2^2 - 0,25 \cdot 2^3) - (0 - 0) = \underline{\underline{1}}$

b) $\int_0^2 x \cdot 0,75 \cdot (2x - x^2) dx = \int_0^2 (1,5x^2 - 0,75x^3) dx$
 $= \int_0^2 (0,5x^3 - 0,1875x^4) dx = (0,5 \cdot 2^3 - 0,1875 \cdot 2^4) - (0 - 0)$
 $= \underline{\underline{1}}$

c) $\int_{1,2}^2 0,75 (2x - x^2) dx = \int_{1,2}^2 (1,5x - 0,75x^2) dx$
 $= \int_{1,2}^2 (0,75x^2 - 0,25x^3) dx = (0,75 \cdot 2^2 - 0,25 \cdot 2^3) - (0,75 \cdot 1,2^2 - 0,25 \cdot 1,2^3)$
 $= (3 - 2) - (1,08 - 0,432)$
 $= \underline{\underline{0,352}}$

6. Vakiokassavirta $k = 280 \text{ €/kk}$ alkaa 10 päivän kuluttua ja kestää 40 päivää ($t_1 = 10$ ja $t_2 = 50$). Viikonloput eivät katkaise kassavirtaa, ja voimme soveltaa sakasalaista laskutapaa (1 kk = 30 päivää). Laske hetkeen $t_0 = 0$ laskettu nykyarvo, kun laskentakorko on 3.25% (p.a.).

Aikaa lasketaan päivinä

$$\rightarrow s = \ln(1,0325^{\frac{1}{360}}) \Leftrightarrow e^s = 1,0325^{\frac{1}{360}}$$

$$k = 280 \text{ €/kk} = \frac{280}{30} \text{ €/päivä}$$

kaava

$$NPV_0 = \frac{k}{s} (e^{-st_1} - e^{-st_2}) \quad (t_0 = 0!)$$

$$= \frac{\frac{280}{30} \text{ €/päivä}}{\frac{1}{360} \ln(1,0325) \text{ /päivä}} \left((e^{-s})^{10} - (e^{-s})^{50} \right)$$

$$= \frac{12 \cdot 280 \text{ €}}{\ln(1,0325)} \left(\frac{1}{1,0325^{10/360}} - \frac{1}{1,0325^{50/360}} \right)$$

$$= \underline{\underline{372,34 \text{ €}}}$$