

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

8. harjoitus, viikko 11 (13.3.–17.3.2017)

R1	ma	12–14	F249	R5	ti	14–16	F453
R2	ma	14–16	F453	R6	to	12–14	F104
R3	ti	08–10	F140	R7	pe	08–10	F453
R4	ti	12–14	F453	R8	pe	10–12	F249

1. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

tuote	2000		2010	
	p_0	q_0	p_t	q_t
1	10,00	200	15,00	100
2	2,00	500	8,00	100
3	30,00	20	10,00	300

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hintaindeksit.

b) Mikä selittää indeksien suuren eron?

Ratkaisu: a)

$$P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100 = \frac{(15 \cdot 200 + 8 \cdot 500 + 10 \cdot 20)}{(10 \cdot 200 + 2 \cdot 500 + 30 \cdot 20)} \cdot 100 = 200.0$$

$$P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100 = \frac{(15 \cdot 100 + 8 \cdot 100 + 10 \cdot 300)}{(10 \cdot 100 + 2 \cdot 100 + 30 \cdot 300)} \cdot 100 = 52.0$$

b) Laspeyresin indeksia laskettaessa tuote 2 sai suurimman painon. Tuotteen 2 hinta nelinkertaistui. Iso paino tuotteelle 2 vetää indeksia ylöspäin.

Paashenin indeksia laskettaessa tuote 3 sai suurimman painon. Tuotteen 3 hinta puolittui. Iso paino tuotteelle 3 vetää indeksia alaspäin.

Ero indekseissä johtuu siis kysynnän rakenteen erilaisuudesta vuosina 2000 ja 2010.

2. Laske tehtävän 1 tuotekorille Fisherin volyymi-indeksi.

Ratkaisu:

$$Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100 = \frac{(100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 300 \cdot 30)}{(200 \cdot 10 + 500 \cdot 2 + 20 \cdot 30)} \cdot 100 = 283.333$$

$$Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100 = \frac{(100 \cdot 15 + 100 \cdot 8 + 300 \cdot 10)}{(200 \cdot 15 + 500 \cdot 8 + 20 \cdot 10)} \cdot 100 = 73.611$$

$$\rightarrow Q_{t_0;t}^F = \sqrt{Q^L \cdot Q^P} = \sqrt{283.333 \cdot 73.611} = 144.4$$

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} *2 \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array} \right| \begin{array}{c} *4 \\ \\ \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & (-3) & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} *1 \\ \leftarrow - \\ \end{array} \right| \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} \\ \\ \text{epätosi} \end{array} \right| \end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.**4. Ratkaise yhtälöryhmä**

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|c} (1) & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} *2 \\ \leftarrow - \\ \leftarrow - \end{array} \right| \begin{array}{c} *4 \\ \\ \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & (-3) & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} *1 \\ \leftarrow - \\ \end{array} \right| \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ -3y = -4 & (2) \end{cases} \\ & (2) \rightarrow y = \frac{4}{3} \\ & (1) \rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 1/3, y = 4/3$.

5. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 300 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Ratkaisu:

Päätösmuuttujat:

x_1 = tuotteen A valmistusmäärä (kpl/vko)

x_2 = tuotteen B valmistusmäärä (kpl/vko)

x_3 = Raaka-aineen myynti (kg/vko)

Maksimoitava tavoitefunktio:

$$z = 5x_1 + 7x_2 + 0.3x_3$$

Rajoitteet:

$$\begin{array}{rclcl} 15x_1 & + & 12x_2 & & \leq & 60 \cdot 40 & \text{(aika minuuttia)} \\ 10x_1 & + & 15x_2 & + & x_3 & \leq & 2500 & \text{(raaka-aineen käyttö kg/vko)} \end{array}$$

LP-malli:

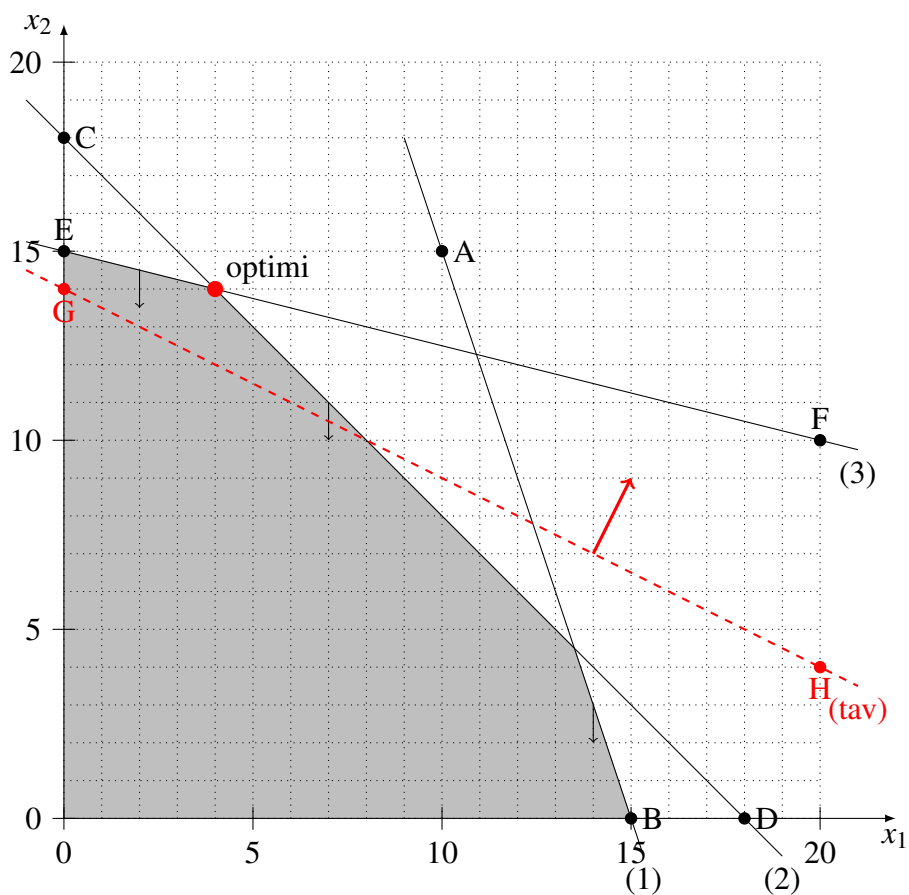
$$\begin{array}{rclclcl} \text{Max} & z & = & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 0.3x_3 \\ \text{ehdoin} & & & 15x_1 & + & 12x_2 & & \leq & 2400 \\ & & & 10x_1 & + & 15x_2 & + & x_3 & \leq & 2500 \end{array}$$

6. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{array}{llll} \max z = & x_1 & + & 2x_2 \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 \leq 45 \\ & x_1 & + & x_2 \leq 18 \\ & x_1 & + & 4x_2 \leq 60 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ratkaisu:

	rajoite	käypä puoli	pisteet
(1)	$3x_1 + x_2 \leq 45$	↓ alapuoli	A : (10,15) B : (15,0)
(2)	$x_1 + x_2 \leq 18$	↓ alapuoli	C : (0,18) D : (18,0)
(3)	$x_1 + 4x_2 \leq 60$	↓ alapuoli	E : (0,15) F : (20,10)



Tavoitesuora $x_1 + 2x_2 = 28$, $\nearrow G : (0, 14)$, $H : (20, 4)$.

Optimissa rajoitteet (2) ja (3) toteutuvat yhtälöinä. Siis

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 18 \\ x_1 + 4x_2 = 60 \end{array} \right. \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow - \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 18 \quad (1) \\ 3x_2 = 42 \quad (2) \end{array} \right. \\ (2) \longrightarrow x_2 = 14 \\ (1) \longrightarrow x_1 + 14 = 18 \longrightarrow x_1 = 4 \\ \longrightarrow z = 4 + 2 \cdot 14 = 32 \end{array}$$

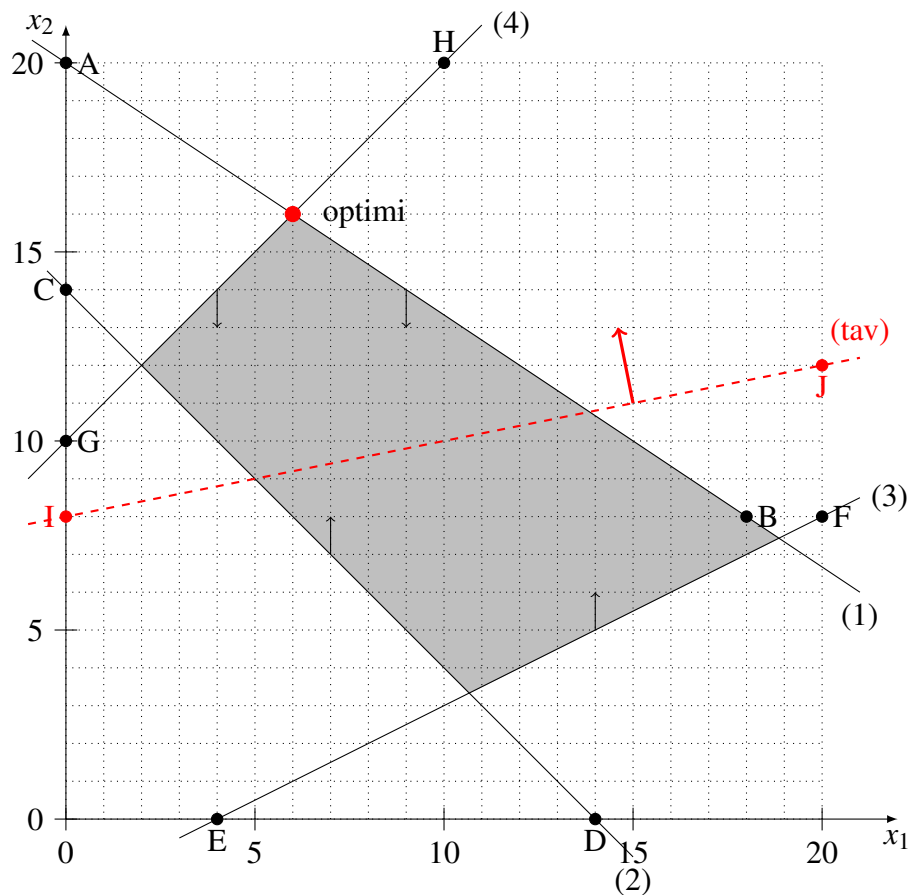
Vastaus: Optimissa $x_1 = 4$, $x_2 = 14$ ja $z = 32$.

7. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue ja b) ratkaise malli.

$$\begin{array}{llll} \min z = & x_1 & - & 5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 14 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ratkaisu:

	rajoite	käypä puoli	pisteet
(1)	$2x_1 + 3x_2 \leq 60$	↓ alapuoli	A : (0, 20) B : (18, 8)
(2)	$x_1 + x_2 \geq 14$	↑ yläpuoli	C : (0, 14) D : (14, 0)
(3)	$x_1 - 2x_2 \leq 4$	↑ yläpuoli	E : (4, 0) F : (20, 8)
(4)	$-x_1 + x_2 \leq 10$	↓ alapuoli	G : (0, 10) H : (10, 20)



Tavoitesuora $x_1 - 5x_2 = -40$. ↖ I : (0, 8), J : (20, 12).

Koska nyt MINIMOIDAAN, kannattaa muuttujaa x_1 pienentää ja muuttujaa x_2 suurentaa. Tavoitefunktion arvo siis paranee, kun tavoitesuoraa siirretään vasemmalle ja ylöspäin (suuntana luode), ↖.

Optimissa rajoitteet (1) ja (4) toteutuvat yhtälöinä. Kuvan perusteella optimi on siis piste $x_1 = 6, x_2 = 16, z = 6 - 5 \cdot 16 = -74$.

Vastaus: Optimissa $x_1 = 6, x_2 = 16$ ja $z = -74$.

8. Oheisessa taulukossa on erään tuotteen hintaindeksejä. Laske hinnan keskimääräinen kasvuvauhti vuosina 2000-2005

vuosi	indeksi
1998	100
1999	104
2000	109
2001	112
2002	115
2003	118
2004	121
2005	124
2006	130

Ratkaisu: Keskimääräinen kasvutekijä on

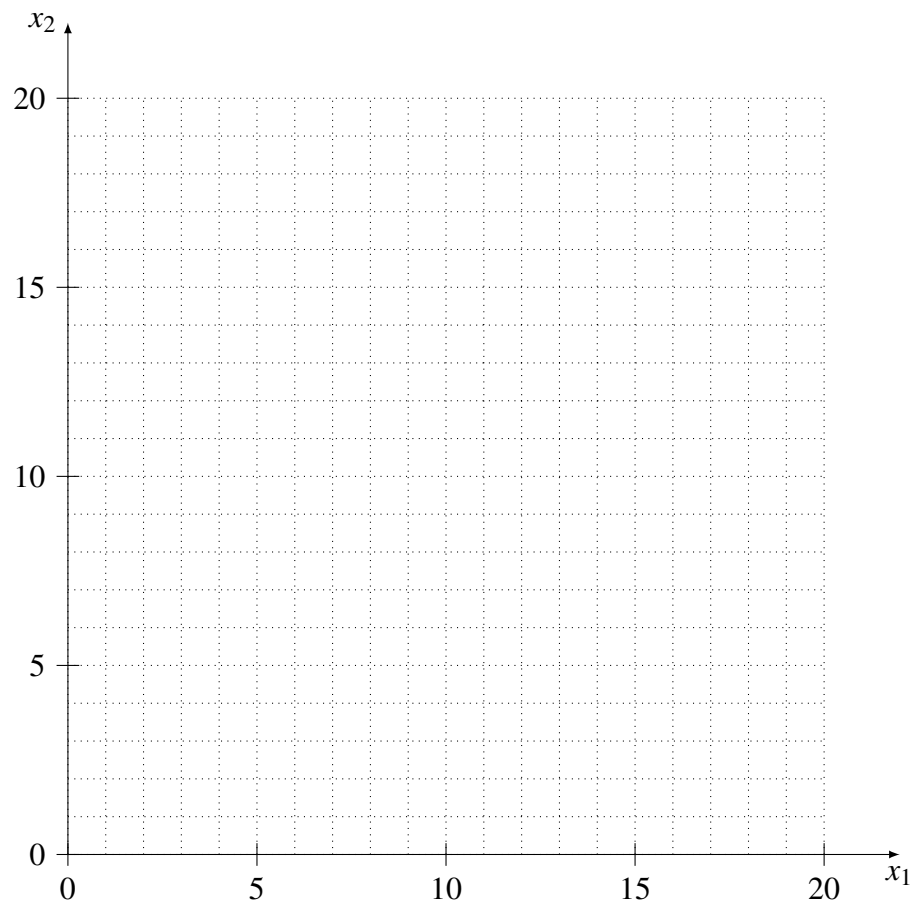
$$\left(\frac{X_{2005}}{X_{2000}}\right)^{1/5} = \left(\frac{124}{109}\right)^{1/5} = 1,026122091$$

—→ keskimääräinen vuosikasvu on 2.61%.

Indeksikaavoja

Laspeyres	$P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100,$	$Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$
Paaschen	$P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100,$	$Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$
Fisher	$P_{t_0;t}^F = \sqrt{P_{t_0;t}^L \cdot P_{t_0;t}^P},$	$Q_{t_0;t}^P = \sqrt{Q_{t_0;t}^L \cdot Q_{t_0;t}^P}$

$$\begin{array}{rclcl}
 \max z = & x_1 & + & 2x_2 & \\
 \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq 45 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq 60 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq 0
 \end{array}$$



$$\begin{array}{llll}
 \min z = & x_1 & - & 5x_2 \\
 \text{ehdoin} & 2x_1 & + & 3x_2 \leq 60 \\
 & x_1 & + & x_2 \geq 14 \\
 & x_1 & - & 2x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 \leq 10 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

