

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, viikko 12 (20.3.–24.3.2017)

R1	ma	12–14	F249	R5	ti	14–16	F453
R2	ma	14–16	F453	R6	to	12–14	F104
R3	ti	08–10	F140	R7	pe	08–10	F425
R4	ti	12–14	F453	R8	pe	10–12	F249

H8/T8. (Tämä on edellisen harjoituksen h8 tehtävä 8)

Oheisessa taulukossa on erään tuotteen hintaindeksejä. Laske hinnan keskimääräinen kasvuvauhti vuosina 2000–2005

vuosi	indeksi
1998	100
1999	104
2000	109
2001	112
2002	115
2003	118
2004	121
2005	124
2006	130

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a) $A + B$, b) $A + C$, c) $B + C$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a) AB , b) BA , c) AC , d) CA , e) $C^T A$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

3. Määritä rivioperaatioiden avulla käänneismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x \quad \quad - z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $\mathbf{N}\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \mathbf{N}^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

6. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ \quad -y = -3 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \Leftrightarrow \mathbf{M}\vec{x} = \vec{b}$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\vec{x} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \vec{b}.$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

7. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 4 arvoon 5)?

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**9. harjoitus, viikko 12 (20.3.–24.3.2017)**

R1	ma	12–14	F249	R5	ti	14–16	F453
R2	ma	14–16	F453	R6	to	12–14	F104
R3	ti	08–10	F140	R7	pe	08–10	F425
R4	ti	12–14	F453	R8	pe	10–12	F249

H8/T8. (Tämä on edellisen harjoituksen h8 tehtävä 8)

Oheisessa taulukossa on erään tuotteen hintaindeksejä. Laske hinnan keskimääräinen kasvuvauhti vuosina 2000–2005

vuosi	indeksi
1998	100
1999	104
2000	109
2001	112
2002	115
2003	118
2004	121
2005	124
2006	130

Keskimääräinen vuotuinen kasvutalaja

$$\left(\frac{X_{2005}}{X_{2000}} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{124}{109} \right)^{\frac{1}{5}} = 1,026122091$$

→ vuotuinen keskimääräinen kasvuvauhti 2,61%

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)a) $A+B$, b) $A+C$, c) $B+C$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

a) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$3 \times 3 \quad 3 \times 3$
OK

b) $A+C$ ei ole järkevä $3 \times 3 \quad 3 \times 2$

c) $B+C$ ei ole järkevä $3 \times 3 \quad 3 \times 2$

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)
a) AB , b) BA , c) AC , d) CA , e) $C^T A$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

$$a) \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{A} \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{B} \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{A} \underset{\substack{3 \times 2 \\ \text{OK}}}{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \underset{\substack{3 \times 2 \\ \text{OK}}}{C} \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{A} \text{ ei voi laskea}$$

$$e) \underset{\substack{2 \times 3 \\ \text{OK}}}{C^T} \underset{\substack{3 \times 3 \\ \text{OK}}}{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1,2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 3 & -5 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1,5 & -1,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & -2,5 & 3,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5 & -2,5 & 0,5 \end{array} \right)$$

$$\therefore N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & -1,5 & 0,5 \\ -2,5 & 3,5 & -0,5 \\ 1,5 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Tarkistetaan tehtävän 3

$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -1,5 & 0,5 \\ -2,5 & 3,5 & -0,5 \\ 1,5 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

$$N^{-1}N = \begin{pmatrix} 1,5 & -1,5 & 0,5 \\ -2,5 & 3,5 & -0,5 \\ 1,5 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $N\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = N^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -1,5 & 0,5 \\ -2,5 & 3,5 & -0,5 \\ 1,5 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Vastaus $x = -2, y = 10, z = -6$

Tarkistetaan $\begin{cases} -2 - 10 - 2 \cdot (-6) = 0 & \checkmark \\ -2 - (-6) = 4 & \checkmark \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 10 + 3 \cdot (-6) = 8 & \checkmark \end{cases}$

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -1,5 & 0,5 \\ -2,5 & 3,5 & -0,5 \\ 1,5 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 9,5 \\ -5,5 \end{pmatrix}$$

Muutokset ovat $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 9,5 \\ -5,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

6. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -y = -3 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{=M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \Leftrightarrow M\vec{x} = \vec{b}$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\vec{x} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{b}.$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -10 & 1 & 0 \\ -10 & 21 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \quad \cdot 0,2 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4,2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\therefore (M^T M)^{-1} = \begin{pmatrix} 4,2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (M^T M)^{-1} M^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 4,2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0,2 & -2 & -0,4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\checkmark \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Tarkistus} \begin{cases} -4 + 2 \cdot 3 = 2 \quad \text{ok} \\ -3 = -3 \quad \text{ok} \\ -2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 4 \quad \text{ok} \end{cases}$$

7. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 4 arvoon 5)?

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -y = -3 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} -x + 2y = 2 \\ -y = -3 \\ 0 + 0 = 1 \end{cases} \text{ epätos}$$

• °. yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua

Kaavan M^+B antama ratkaisu ei ole ^{oikea ratkaisu}

$$M^+ = \begin{pmatrix} 4,2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & -2 & -0,4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^+ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & -2 & -0,4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3,6 + 2 \cdot 3 = 2,4 \\ -3 = -3 \\ -2(3,6) + 4 \cdot 3 = 4,8 \end{cases}$$

Neliösumma $(2 - 2,4)^2 + (-3 - (-3))^2 + (5 - 4,8)^2$
 $= 0,20$