

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tarkista laskemalla, että annettu A :n käänteismatriisi on oikein.

Siis tarkista, että seuraavat ovat totta

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Ratkaise tämän tiedon avulla x ja y yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$

Vastaus:
 $x=8, y=-13$

Tarkistus

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$$

siis $\begin{cases} 2 \cdot 8 + (-13) = 3 & \text{✓} \\ 5 \cdot 8 + 3 \cdot (-13) = 1 & \text{✓} \end{cases}$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina $(x_0 \ y_0)^T$. Merkitään vektorilla $(x_1 \ y_1)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla $(x_2 \ y_2)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Laske vektorit $(x_1 \ y_1)^T$ ja $(x_2 \ y_2)^T$.

Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin A käänteismatriisi A^{-1} on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (2) ja (3) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on A^{-1} kertaa RHS".

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vastaus: } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3. a) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (2), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

b) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (3), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista A^{-1} ?

$$a) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \leftarrow A^{-1} \text{in 1. sarakke}$$

$$b) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow A^{-1} \text{in 2. sarakke}$$

Parempi pointelu

$$a) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

•• kun k:is RHS karvan yhdeltä, niin ratkaisu muodostuu A^{-1} -matriisin sarakkeen k verran.

Olkoon tutkittavina matriisit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Laske a) determinanti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille M .

5. Laske a) determinanti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille N .

$$4. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = (3-0) - 2(2-0) + 0 = \underline{\underline{-1}}$$

$$c) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 2 \cdot (-1)} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 1 \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{5} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b, \quad \underline{\underline{N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$a) \quad \det(N) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (1 - 3) = \underline{\underline{-2}}$$

$$c) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} -3 \\ -1 \\ - \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-2} & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{N^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$N N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} N = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ok

Variant:

$$a) -2 \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$