

3. harjoitus, viikko 5 (26.-30.1.09)

R1	ma	10-12	D115	R4	to	08-10	D115
R2	ma	14-16	D115	R5	to	14-16	B201
R3	ti	08-10	D115	R6	pe	08-10	D102
				R7	pe	12-14	D102

1. Laske seuraaville funktioille kolme alimman kertaluvun derivaattaa, $f'(x)$, $f''(x)$ ja $f'''(x)$, jne. (Ohje: $f''(x) = D(Df(x))$ ja $D(\ln(x)) = x^{-1}$)

a) $f(x) = 5x^4 + 2x^3$ b) $g(x) = x^{-1}$ c) $h(x) = \ln(x)$

a) $f(x) = 5x^4 + 2x^3$
 $f'(x) = 20x^3 + 6x^2$
 $f''(x) = 60x^2 + 12x$
 $f'''(x) = 120x + 12$

b) $g(x) = x^{-1}$
 $g'(x) = -1x^{-2}$
 $g''(x) = 2x^{-3}$
 $g'''(x) = -6x^{-4}$

c) $h(x) = \ln(x)$
 $h'(x) = x^{-1}$
 $h''(x) = -x^{-2}$
 $h'''(x) = 2x^{-3}$

2. Tiedämme yrityksen rajakustannuksista, että $MC(100) \approx 8.25$ ja $MC(150) \approx 10.50$. Arvioi lineaarisella interpoloinnilla rajakustannusta, kun $q = 135$. Mikä on kustannusfunktio, jos kiinteät kustannukset ovat $FC = 1200$.

I taylor

$$\begin{aligned}
 MC(q) &\approx MC(q_1) + \frac{q - q_1}{q_2 - q_1} (MC(q_2) - MC(q_1)) \\
 &= 8,25 + \frac{q - 100}{150 - 100} (10,50 - 8,25) \\
 &= 8,25 + \frac{q - 100}{50} (2,25) \\
 &= 8,25 + (q - 100) \cdot 0,045 \\
 &= 3,75 + 0,045q
 \end{aligned}$$

∴ $MC(135) \approx 3,75 + 0,045 \cdot 135 = 9,825 \approx 9,83$

$$MC = 3,75 + 0,045q \quad \text{ja} \quad FC = 1200$$

$$\rightarrow C = 3,75q + 0,0225q^2 + 1200$$

II tapa

$$MC = a + bq$$

$$\begin{cases} MC(100) = 8,25 \\ MC(150) = 10,50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 100b = 8,25 \\ a + 150b = 10,50 \end{cases} \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - 100b = -8,25 \\ a + 150b = 10,50 \end{cases}$$

$$50b = 2,25$$

$$b = 0,045$$

$$a = 8,25 - 100 \cdot 0,045 \\ = 3,75$$

Sin $MC = 3,75 + 0,045q \rightarrow MC(100) = 9,83$

$$C = 3,75q + 0,0225q^2 + 1200$$

Vastaus

$$MC(100) \approx 9,83$$

$$C(q) = 3,75q + 0,0225q^2 + 1200$$

3. Määritä kustannusfunktio $C(q)$, kun rajakustannus on $MC(q) = 0,02q + 6$ ja $C(100) = 1700$.

$$C'(q) = 0,01q^2 + 6q + A$$

$$C(100) = 1700 \Leftrightarrow 0,01 \cdot 100^2 + 6 \cdot 100 + A = 1700$$

$$\Leftrightarrow 100 + 600 + A = 1700$$

$$\Leftrightarrow A = 1000$$

Sin $C(q) = 0,01q^2 + 6q + 1000$

paino-
virhe!
pitää olla
+

4. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.025q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.1q^2 + 5q + 150$. Maksimoi voitto.

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0.025q \\ R &= 20q - 0.025q^2 \\ MR &= 20 - 0.05q \end{aligned} \quad \begin{aligned} C &= 0.1q^2 + 5q + 150 \\ MC &= 0.2q + 5 \end{aligned}$$

$$MC = MR$$

$$\begin{aligned} 0.2q + 5 &= 20 - 0.05q \\ 0.25q &= 15 & | \cdot 4 \\ \underline{q} &= \underline{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(60) &= R(60) - C(60) \\ &= (20 \cdot 60 - 0.025 \cdot 60^2) - (0.1 \cdot 60^2 + 5 \cdot 60 + 150) \\ &= (1200 - 90) - (360 + 300 + 150) \\ &= 1110 - 810 \\ &= \underline{\underline{300}} \end{aligned}$$

5. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). On arvioitu, että hintaan 4 euroa/tuote saadaan myytyä 100 tuotetta viikossa ja hintaan 3 euroa/tuote saadaan myytyä 200 tuotetta viikossa. Käytetään seuraavassa laskelmassa lineaarista kysyntäfunktiota $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton? (voitto = myyntitulo - kustannukset)

$$\begin{aligned} p &= 5 - 0.01q \\ R &= 5q - 0.01q^2 \\ MR &= 5 - 0.02q \end{aligned} \quad \begin{aligned} C &= 1.5q + 230 \\ MC &= 1.5 \end{aligned}$$

$$MC = MR$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1.5 &= 5 - 0.02q & | \cdot 50 \\ \Leftrightarrow 0.02q &= 3.5 & | \cdot 20 \\ \Leftrightarrow q &= 17.5 \end{aligned}$$

Vastaus: voitto on suurin, kun yritys valmistaa 17.5 tuotetta viikossa

6. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 5 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo - kustannukset)?

$$R(q) = 5q - 0,01q^2 \quad (\text{sama kuin edellä})$$

$$C(q) = \begin{cases} 1,5q + 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 1,5 \cdot 150 + 1,6(q - 150) + 250 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1,5q + 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 1,6q + 235 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

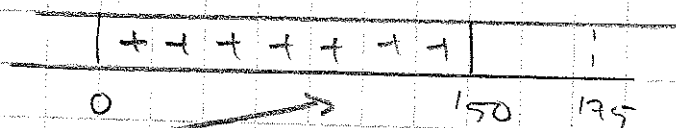
$$P(q) = R(q) - C(q)$$

$$= \begin{cases} 3,5q - 0,01q^2 - 230 & , \text{ kun } q \leq 150 \\ 3,4q - 0,01q^2 - 235 & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

$$P'(q) = \begin{cases} 3,5 - 0,02q & , \text{ kun } q < 150 \\ 3,4 - 0,02q & , \text{ kun } q > 150 \end{cases}$$

$$q \leq 150$$

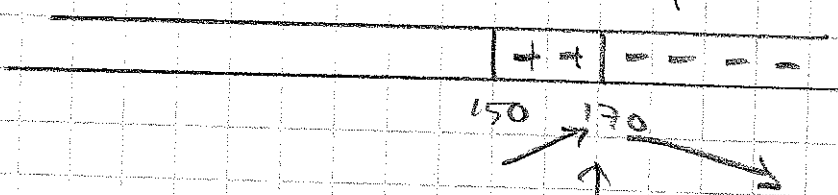
P'
P



150
↑
max, kun $q = 150$

$$q > 150$$

P'
P



150 170
↑
max, kun $q = 170$

$$P(150) = 3,5 \cdot 150 - 0,01 \cdot 150^2 - 230 = 70 \leftarrow \text{parempi}$$

$$P(170) = 3,4 \cdot 170 - 0,01 \cdot 170^2 - 235 = 54$$

Yritys saa suurimman voiton, kun se valmistaa 150 tuotetta viikossa

(ts. ei kannata tehdä ylityötä)

7. Yrityksen tuotantomäärä on nyt $q = 50$ (tuotetta kuukaudessa). Kustannusfunktio on $C(q) = 0.05q^2 + 6q + 200$. Määritä a) kustannusten jousto tuotantomäärän suhteen, b) miten paljon kasvaa kustannukset, jos tuotantomäärä kasvaa 10 prosentilla?

$$C(q) = 0,05q^2 + 6q + 200$$

$$\frac{dC}{dq} = 0,1q + 6$$

Nyt

$$q = 50$$

$$C = 0,05 \cdot 50^2 + 6 \cdot 50 + 200 = 625$$

$$\frac{dC}{dq} = 0,1 \cdot 50 + 6 = 11$$

$$a) \quad \frac{dC}{dq} \cdot \frac{q}{C} = 11 \cdot \frac{50}{625} = \underline{\underline{0,88}}$$

$$b) \quad 0,88 \cdot 10\% = \underline{\underline{8,8\%}}$$

Vastaus: a) Kustannusten jousto tuotantomäärän suhteen on 0,88

b) kustannukset kasvavat 8,8%

8. Olkoon kysyntäfunktio $p = 20 - 0.2q$

a) Mikä on kysynnän hintajousto nyt, kun hinta on $p = 10$?

b) Miten paljon erään toisen tuotteen kysyntä muuttuu, jos hinta nousee 90 eurosta 100 euroon, kun alkuperäinen kysyntä on 400 kappaletta kuussa ja kysynnän hintajousto on -1.5.

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 20 - 0,2q \\ 0,2q = 20 - p \\ q = 100 - 5p \\ \frac{dq}{dp} = -5 \end{array} \right. \quad \text{Nyt} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 10 \\ q = 100 - 5 \cdot 10 = 50 \\ \frac{dq}{dp} = -5 \end{array} \right.$$

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -5 \cdot \frac{10}{50} = \underline{\underline{-1}}$$

(yleensä $\eta < -1$!)

↑ !!!

b,

I

$$\left. \begin{aligned} q &= 400 \text{ kpl/ekk} \\ \Delta q &= x \\ p &= 90 \text{ €/kpl} \\ \Delta p &= 10 \text{ €/kpl} \\ \eta &= -1,5 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \eta$$

$$\frac{x}{10 \text{ €/kpl}} \cdot \frac{90 \text{ €/kpl}}{400 \text{ kpl/ekk}} = -1,5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1,5 \cdot 10 \cdot 400 \text{ kpl/ekk}}{90}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 66,7 \text{ kpl/ekk}}}$$

II

$$\left. \begin{aligned} q &= 400 \text{ kpl/ekk} \\ \Delta q &= x \end{aligned} \right\}$$

q:n %-muutos $\approx 2\%$

$$\left. \begin{aligned} p &= 90 \text{ €/kpl} \\ \Delta p &= 10 \text{ €/kpl} \end{aligned} \right\}$$

p:n %-muutos on

$$\frac{10}{90} \cdot 100\% = 11,1\%$$

$$\eta = -1,5$$

$$\frac{q\text{:n } \%-muutos}{p\text{:n } \%-muutos} = \eta$$

$$\Rightarrow \frac{2\%}{11,1\%} = -1,5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{2\% = -1,5 \cdot 11,1\% = -16,67\%}}$$

$$\left(\text{Huom. } \frac{-16,67}{100} \cdot 400 \text{ kpl/ekk} = -66,7 \text{ kpl/ekk} \right)$$

Vastaus: kysyntä vähenee $66,7 \text{ kpl/ekk}$
tai kysyntä vähenee $16,67\%$