

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, viikko 13 (23.3.-27.3.09)

R1	ma	10-12	D115	R4	to	08-10	D115
R2	ma	14-16	D115	R5	to	14-16	D115
R3	ti	08-10	D115	R6	pe	08-10	D102
				R7	pe	12-14	D115

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2+1 \\ +1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{-3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 & (1) \\ y + z = 2 & (2) \\ z = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 2$$

$$(2) \rightarrow y = 0$$

$$(1) \rightarrow x = 1$$

Tarkistus

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 0 - 2 = -1 & ok \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 2 = 0 & ok \\ -1 + 0 + 5 \cdot 2 = 9 & ok \end{cases}$$

Vastaus

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ y + 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{+1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{-1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \leftarrow \text{"epätos."}$$

Vastaus: Yhtälöryhmän ratkaisujoukko on tyhjä.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ y + 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = z - 1 & (1) \\ y = -2z & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow x + 2(-2z) = z - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 5z - 1$$

$$V: \begin{cases} x = 5a - 1 \\ y = -2a \\ z = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

4. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Laske seuraavat matriisilaskut

a) $A+B$, b) AB^T , c) AC , d) A^TB+C ,

$$a) \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad A^TB+C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

5. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$p = (2.5 \quad 0.5 \quad 1.0) .$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} .$$

a) Laske matriisilauseke pD^T .

b) Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?

a)

$$p D^T = (2,5 \quad 0,5 \quad 1,0) \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} \\ = (65 \quad 70 \quad 45 \quad 90)$$

b)

$$65 = 2,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 30 + 1,0 \cdot 0 \\ = A\text{:n yksikön hinta} \times M\text{-os:n ostama A:t} \\ + B\text{:n yks. hinta} \times M\text{-os:n ostama B:t} \\ + C\text{:n yks. hinta} \times M\text{-os:n ostama C:t} \\ = M\text{-osaston kokonaiskustannus ostoihin}$$

V: sisään ostot (euroina) osastoittain

6. Olkoon p ja D samat matriisit kuin edellisessä tehtävässä.

- Onko lauseke pD järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke Dp^T järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke Dp järkevä (mikä sen arvo on)?

a) pD ei ole määriteltävissä
 $1 \times 3 \quad 4 \times 3$ ei voi laskea

$$b) Dp^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

(samat koordinaatit kuin ed. tehtävässä)

$$((Dp^T)^T = p^T D^T = pD^T \text{ ok})$$

c) Dp ei ole määriteltävissä
 $4 \times 3 \quad 1 \times 3$ ei voi laskea

```
octave.exe:18> p*D
error: operator *: nonconformant arguments (op1 is 1x3, op2 is 4x3)
error: evaluating binary operator '*' near line 18, column 2
octave.exe:18> D*p'
ans =
    65
    70
    45
    90
```

```
octave.exe:19> D*p
error: operator *: nonconformant arguments (op1 is 4x3, op2 is 1x3)
error: evaluating binary operator '*' near line 19, column 2
octave.exe:19> diary off
```

7. Tarkista laskemalla, että

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tämän tiedon avulla ratkaise x ja y yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ -5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\text{Siis } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left[\text{eli} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$