

Talousmatematiikan perusteet orms.1030

Vaasan yliopisto

Sisältö

1 Johdanto	1
1.1 Laskemisen historiaa	1
2 Kertausta lisäyksiin	6
2.1 Joukko-oppia ja logiikkaa	6
2.2 Merkintöjä ja kaavoja	9
2.3 Välimerkinnot ja itseisarvo	17
2.4 Yhtälöt ja epäyhtälöt	21
2.5 Prosentti	35
2.6 Kompleksiluvut	39
2.7 (x,y) -taso ja suoran yhtälö	39
2.8 Funktio	47
Funktion kasvaminen ja väheneminen	53
Funktio ja kuvaus, yhdistetty funktio	55
Käänteisfunktio	57
Potenssifunktio, kulmakerroin	59
eksponenttifunktio	62
logaritmifunktio, logaritmit	63
2.9 Derivaatta	67
Raja-arvo	67
Jatkuvuus	71
Derivaatta	72
Derivointikaavoja	80
Interpolointi	84
3 Sovelluksia talousmatematiikkaan	85
3.1 Jousto ja rajatuotto (5.1,5.2)	85
3.2 Voitonmaksimointi (5.3)	85
3.3 Varastomallit	98
Peruskäsitteitä	98
EOQ-malli	106
EOQ-malli puutekustannuksin	111
Tuotantomalli	115
EOQ-malli paljousalennuksin	117
Lagrangen kertojat	119
Herkkyysanalyysi	121
4 Finanssimatematiikkaa (10)	130
4.1 Prosentti (10.1)	130
4.2 Aritmeettinen ja geometrinen summa (10.2)	131
4.3 Yksinkertainen korkolasku (10.3)	135
4.4 Koronkorko, prolongointi ja diskonttaus (10.4)	137
4.5 Jaksolliset suoritukset (10.5)	140
Tasaerälaina (annuiteetilaina)	141
Osamaksukauppa	144

4.6	Nykyarvo (10.6)	146
4.7	Investoinnin nykyarvo (10.7)	151
4.8	Investoinnin sisäinen korkokanta (10.8)	153
4.9	Muita investoinnin kannattavuuden mittareita (10.9)	160
4.10	Jatkuva korkolasku (10.10)	162

5	Integraali	164
5.1	Integraalifunktio, integroimiskeinoja	164
	Osittaisintegrointi	168
	Muuttujan vaihto	169
5.2	Määrätty integraali (11.2)	170
5.3	Määrätty integraali summana (11.3)	173
5.4	Investoinnin kannattavuuden mittareita	176
6	Lineaarinen optimointi	181
6.1	Johdatteleva esimerkki	181
6.2	LP-mallin oletukset	183
6.3	LP-mallin graafinen ratkaiseminen	184
7	Indekseistä	193
7.1	Yhden tuotteen hintaindeksi	194
7.2	Keskimääräinen kasvu ja reaalikorko	196
7.3	Tuoteryhmän hintaindeksi	198
	Laspeyresin ja Paaschenin hintaindeksit	199
	Fisherin hintaindeksi	200
7.4	Tuoteryhmän volyymi-indeksi	200
8	Matriisit ja determinantit	202
8.1	Matriisin määritelmä ja laskulait (6.1)	203
8.2	Transponointi (6.2)	208
8.3	Käänteismatriisi (6.3)	209
8.4	Determinantti (6.4)	211
8.5	Determinantin kehittäminen (6.5)	214
8.6	Matriisin kääntäminen (6.6)	217
8.7	Lineaarinen yhtälöryhmä (7)	221
	Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys (7.1)	221
	Gaussin eliminoimismenettely (7.2)	224
	Cramerin kaavat (7.3)	226
	Homogeenisen yhtälöryhmän ratkaiseminen (7.4)	228
8.8	Vektoriavaruudet (8)	230
	$\mathbb{R}^n$ (8.1)	230
	Lineaarinen kuvaus (8.2)	234
	Matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit (8.3)	236
9	Lineaarialgebran sovelluksia	238
9.1	Panos-tuotos -analyysi	238
	Kansantalouden rakenne	238
	Omakustannusarvo	242

Talousmatematiikan perusteet orms.1030

M. Laaksonen (2011)

Vaasan Yliopisto

Teknillinen tiedekunta, Matemaattisten tieteiden laitos

PL 700 (Wolffintie 34), 65101 VAASA

JOHDANTO

1.1 Laskemisen historiaa

Tässä matematiikan kehitysvaiheessa kaiken käytännöllisen laskemisen mallina on reaalilukujen laskutoimitukset. Eri lukualueet yleensä esitetään loogisessa järjestyksessä ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), mutta niiden keksiminen ja käyttöönotto ei Euroopassa tapahtunut tässä järjestyksessä.

Jo tuhansia vuosia on kaupankäynnin yhteydessä laskettu lukumäärillä ($\mathbb{N}$) ja painoilla ($\mathbb{R}_+$). Käytännön laskut pakottivat kehittämään murtoluvun käsitteen. Sumerilaiset ja babylonialaiset oppineet ryhtyivät käyttämään 60-järjestelmää lukujen ilmaisemiseen. Järjestelmä sopi hyvin heidän tarpeisiinsa, koska he jakoivat vuoden 360 päivään. Lisäksi 60 on jaollinen luvuilla 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 20 ja 30. Tämä oli varsin hyödyllistä laskettaessa murtoluvuilla ja taito laskea murtoluvuilla kehittyi hämmästyttäväksi.

Vanhimmat tunnetut varsinaiset matemaattiset tekstit ovat nuolenpääkirjoituksella laaditut Tell-Harmalin savitaulut. Ne löydettiin Bagdadin seudulta 1970-luvulla ja ne ovat kirjoitetut ennen vuotta 2000 eKr. Ne sisältävät euklidisen geometrian pääperiaatteet (mm. myöhemmin Pythagoraan mukaan nimetyn lauseen). Algebran alalta niissä on esitetty mm. toisen asteen yhtälön ratkaisumenettely. Kirjoitusasusta on päätelty, että taulut ovat kopioita varhaisemmista sumerilaisista teksteistä, joten mainitut matemaattiset tehtävät on hallittu jo muinaisessa Sumerissa n. 2500 eKr.

Babylonialaiset katsoivat, että mitattavia suureita (pituuksia, painoja, yms.) voidaan mielivaltaisen tarkasti approksimoida murtolukujen avulla. Tämä on varsin lähellä nykyistä reaaliluvun käsitettä. Antiikin kreikkalainen Pythagoras (n. 580–500 eKr), joka oli keksinyt sävelasteikon lukusuhteet, julisti puolestaan tämän innoittamana, että kaikki olevainen on ilmaistavissa kokonaislukujen suhteina. Pythagoras perusti Etelä-Italian Krotoniin uskonnollis-siveellisen veljeskunnan, joka harrasti tieteellistä tutkimusta ja tavoitteli poliittista valtaa. Pythagoraan opit tulivat laajalti tunnetuiksi. Siksi lienee ollut kiusallista, kun pythagoralaiset itse havaitsivat kokonaislukusuhteiden riittämättömyyden.

Asia voidaan todeta seuraavasti: olkoon a neliön lävistäjä, kun neliön sivu on 1. Silloin Pythagoran lauseen nojalla $a^2 = 2$. Jos nyt kaikki voidaan ilmaista kokonaislukujen suhteina, niin a voidaan kirjoittaa supistettuun murtolukumuotoon $a = m/n$, missä m :llä ja n :llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Nyt

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \quad (1.2)$$

Siis m on parillinen, joten merkitsemme $m = 2k$. Nyt

$$(2k)^2 = 2n^2 \quad (1.3)$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 2k^2 \quad (1.4)$$

Siis n on parillinen! tämä on ristiriita, sillä m :llä ja n :llä ei pitänyt olla yhteisiä tekijöitä.

Pythagoran erehdys ja antiikin kreikkalaisten ankara loogisuus teki täysin selväksi, että lukuja on kahdenlaisia; rationaalisia ($\mathbb{Q}$ eli murtoluvut) ja irrationaalisia ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ eli luvut, jotka eivät ole murtolukuja).

Kymmenjärjestelmän mukainen lukujen merkitsemistapa kehitettiin ensin Intiassa n. vuonna 500. Arabialainen matemaatikko al-Khowarizmi Bagdadilainen kehitti n. vuonna 825 tätä järjestelmää ottamalla käyttöön nollaa merkitsevän symbolin. Kesti noin 200 vuotta, ennen kuin järjestelmä saapui Espanjaan, jossa se alkoi yleistyä eurooppalaisten kauppiaiden käytössä. Oppineet pitivät yhä 60-järjestelmää parempana ja siirtymäaika lienee ollut hankala. 1200-luvun lopulla Firenzen kaupunkivaltio sääti lakeja, jotka kielsivät suosituiksi tulleiden kymmenkantaisten lukujen käytön. Tällä suojattiin vanhaan tottuneita kunnan kansalaisia sekaannuksilta, joita uuden järjestelmän käyttö aiheutti.

Tieteen maailmaan kymmenjärjestelmä murtautui kahden uuden keksinnön seurauksena. Samarkandin astronomisen tutkimuslaitoksen johtaja al-Kashi oli ensimmäisiä, joka 1400-luvulla havaitsi, että negatiivinen eksponentti voidaan ilmaista kymmenkantaishessa järjestelmässä yhtä hyvin kuin 60-järjestelmässäkin. (Siis $\frac{23}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$.) Toinen ratkaisevan nerokas innovaatio tapahtui, kun Skotlantilainen John Napier vuonna 1617 (!) otti käyttöön desimaalipilkun sen nykyisessä merkityksessä. (Siis $\frac{23}{100} = 0.23$)

Desimaalipilkun käyttöönoton jälkeen 1600-luvulla laskeminen muuttui helpoksi, mikä välittömästi näkyy nopeana edistymisenä luonnontieteen historiassa. Murros on täysin verrattavissa tietokoneen vaikutukseen viime vuosisadalla.

Seuraava lukukäsitteen laajennus tapahtui, kun opittiin käsittelemään kompleksilukuja. Käsite muotoutui, kun tutkijat etsivät yksinkertaista tapaa osoittaa, että lukua $\sqrt{-1}$ ei ole olemassa. Vakiomenettely haluttaessa osoittaa, että jotakin ei ole olemassa, on olettaa sen olemassaolo ja johtaa tästä ristiriita (kuten Pythagoraan periaatteen falsifoinnissa yllä). Tutkijat siis olettivat, että on olemassa luku $i = \sqrt{-1}$ ja alkoivat etsiä ristiriitaa. Ristiriitaa ei löytynyt!!! Kompleksilukujen, lukujen $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, joukko osoittautui erittäin hyödylliseksi. Koska ajatus luvusta $i = \sqrt{-1}$ oli järjenvastainen, kehitettiin tulkinta, jossa kompleksiluku on lukupari (a, b) ja kompleksilukujen laskutoimitukset määritellään kaavoilla:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.5)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (1.6)$$

Tällöin ”järjetön käsite” muuttui ”melko yksinkertaisiksi” olioiksi, joille on määritelty ”aika erikoiset” laskutoimitukset. Havaittiin, että löytyi muitakin laskutoimituksilla varustettuja oliojoukkoja (funktiot, vektorit, matriisit yms.). Syntyi tarve systematisoida

olioilla laskemista.

Tutkiessaan korkeamman asteen yhtälöiden ratkeavuutta ranskalainen Evariste Galois (1811–32) ja norjalainen Niels Henrik Abel (1802–29) ottivat käyttöön ryhmän käsitteen. Abel onnistui osoittamaan, että viidennen asteen yhtälöä ei voi ratkaista juurilausekkeiden avulla. Tämä oli lopullinen ratkaisu jo sumerilaisia vaivanneeseen tuhansia vuosia vanhaan ongelmaan. Matematiikan nopea edistyminen ja Galois’n ja Abelin henkilöhahmot ovat pitäneet yllä myyttiä siitä, että matemaatikot ovat nuoria.

Abelin ryhmää seurasi nopeasti uusia käsitteitä: renkaat, algebrat, lineaariavaruudet, operaattorialgebrat. Nämä ovat joukkoja, joissa on määritelty tietyt ehdot toteuttavia laskutoimituksia. Kyse on siis edellä mainitusta ”olioilla laskemisesta”. Nämä abstraktit konstruktiot saivat 1900-luvun alussa erittäin käytännöllisiä sovelluksia, kun fyysikot niiden avulla kehittivät kvanttifysiikan ($\rightarrow$ ydinvoima, elektroniikka, aineen rakenne) ja yleisen suhteellisuusteorian ($\rightarrow$ atomipommi). Varsinkin Einstein tutki matemaatiikkaa kuin tavarataloa löytääkseen yleiselle suhteellisuusteorialle itseään tyydyttävän esitystavan.

Saksalaisen George Cantor (1845–1918) kehitti joukko-opin perusteet. Joukko-opin käsitteet sekä äärettömän käsite synnyttivät syvällisiä paradokseja, jotka vaivasivat matematiikan perusteiden teoriaa. Seuraavassa on esitetty kaksi paradoksia.

Semanttinen paradoksi. Määritellään luku a siten, että ”se on pienin kokonaisluku, jota ei voi määritellä vähemmällä kuin 13 sanalla”. Koska kielessä on äärellinen määrä sanoja, on myös vain äärellinen määrä tapoja asettaa 13 sanaa peräkkäin. On siis olemassa lukuja, joita ei voi määritellä 13 sanalla. On helppo perustella, että tässä joukossa on pienin. Siis luvun a määritelmä näyttäisi olevan kunnossa. Paradoksi syntyy siitä, että tulimme edellä määritelleeksi luvun a käyttäen vain 12 sanaa! ($\Rightarrow$ Johtopäätös: matematiikassa tulee arkikielen sijasta käyttää formaalia kieltä.)

Russellin paradoksi. Voiko joukko olla itsensä alkio? Ilmeisesti ”kaikkien joukkojen joukko” on itsensä alkio. Bertrand Russell määritteli joukon $Ru = \{x | x \notin x\}$ (eli Ru muodostuu kaikista niistä olioista, jotka eivät ole itsensä alkioita). Russell kysyy nyt, onko Ru itsensä alkio? Jos Ru on itsensä alkio, niin se toteuttaa joukon määrittelevän ehdon eli Ru ei ole itsensä alkio. Jos Ru ei ole itsensä alkio, niin se ei toteuta joukon määrittelevää ehtoa eli Ru on itsensä alkio. Kumpikin vaihtoehto johtaa ristiriitaan. ($\Rightarrow$

Johtopäätös: kaikkien joukkojen joukko on mieletön ajatus.)

Paradoksit on kierretty kehittämällä joukko-opille formaali aksiomaattinen esitys. Nykyinen matematiikka perustuu joukko-opiin, mutta silti on muodikasta välttää opetuksessa joukko-opin merkintöjä. Myös tässä kurssissa sivuutetaan joukko-oppi varsin vähällä. Emme perehdy nyt matematiikan perusteiden ongelmiin, vaan matematiikan soveltamiseen. On kuitenkin syytä opetella matematiikan käyttämä kieli ja sen puhetaivat, jotka ovat osa nykytieteen "peruslatinaa". Matematiikan puhetapa on usein selvää joukko-oppia (esimerkiksi "yhtälön ratkaisujoukko", yms.).

2 KERTAUSTA LISÄYKSIN

2.1 Joukko-oppia ja logiikkaa

Joukko muodostuu alkioista. Joukkoa merkitään isolla kirjaimella ja joukon alkioita pienellä kirjaimella. Jos a on joukon A alkio, merkitsemme $a \in A$. Vastaavasti, jos a ei ole joukon A alkio, niin merkitsemme $a \notin A$. Luontevin tapa määritellä joukko, on luetella sen alkiot. Tämä tehdään ns. joukkosulkeiden avulla. Voimme esimerkiksi määritellä joukot.

$$\begin{aligned} F &= \{a, b, c\} \\ G &= \{1, 2, \dots, 100\} \end{aligned}$$

Joskus alkioden luetteleminen on työlästä tai mahdotonta. Silloin joukkosulkeilla ilmaistaan perusjoukko, jonka alkioista on kyse ja ehto, jonka määriteltävän joukon alkiot toteuttavat. Voimme esimerkiksi määritellä joukot.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\} \\ C &= \{\text{Turku}\} \\ D &= \{k \mid k \text{ on Suomen kaupunki}\} \\ E &= \{z \in D \mid z \text{ on entinen pääkaupunki}\} \end{aligned}$$

Seuraavia merkintätapoja käytetään jatkossa melko harvoin. Silti niitä tarvittaessa käytetään ja varsinkin kirjallisuudessa merkinnät voivat tulla esiin. Kun myöhemmin puhumme epäyhtälöiden ratkaisujoukoista ja niiden leikkauksista, kannattaa uudelleen lukea seuraavat määritelmät.

Jos perusjoukko on asiayhteydestä selvä, sitä ei merkitä. Joukot A ja B ovat *amat* eli *identtiset*, jos niissä on täsmälleen amat alkiot. Merkitään tällöin $A = B$. Päinvastaisessa tapauksessa on olemassa alkio, joka kuuluu toiseen joukkoon mutta ei toiseen ja merkitsemme $A \neq B$.

Joukkoa A sanotaan joukon B *osajoukoksi*, jos jokainen A :n alkio on myös B :n alkio. Merkitsemme silloin $A \subseteq B$. Jos A on B :n osajoukko, mutta joukot eivät ole identtiset,

sanomme, että A on B :n *aito osajoukko*. Merkitsemme silloin $A \subset B$. Edellä määritel-
lyille joukoille voimme siis merkitä, että

$$A \neq B, \quad B \subset A, \quad E \subset D, \quad C = E$$

Tyhjä joukko, $\emptyset = \{ \}$, on joukko, jossa ei ole yhtään alkioita. Jokainen joukko sisältää
tyhjän joukon osajoukkonaan.

Koulukurssista tuttuja joukkoja (lukualueita) ovat

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} = \text{luonnollisten lukujen joukko,} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{kokonaislukujen joukko,} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{m}{n} \mid n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z} \right\} = \text{rationaalilukujen joukko,} \\ \mathbb{R} &= \text{reaalilukujen joukko.} \end{aligned}$$

Seuraavaksi määrittelemme eräitä joukkooperaatioita joukkosulkeiden avulla. Määri-
telmän ohessa on ns. Venn-diagrammi, joka havainnollistaa operaatiota. Viivoitettu alue
vastaa määriteltävää joukkoa. Venn-diagrammit ovat erittäin hyödyllisiä, kun toden-
näköisyyslaskennassa jaetaan kaikki alkeistapaukset suotuisiin ja ei-suotuisiin. Perus-
joukkoa merkitään seuraavassa E :llä.

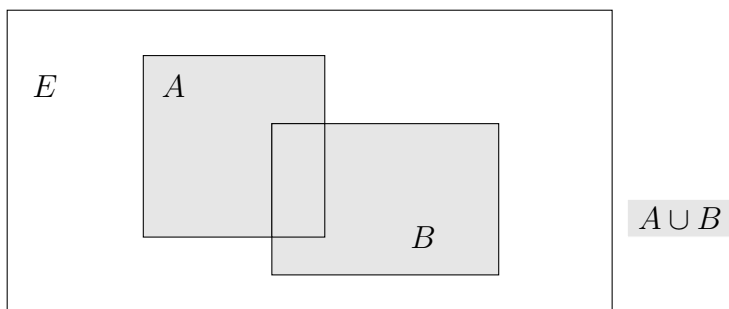
Yhdiste: Joukkojen A ja B *yhdiste* (union), $A \cup B$ on joukko, joka voidaan kuvailla
seuraavilla tavoilla:

- Yhdisteen alkioita ovat kaikki A :n alkiot ja kaikki B :n alkiot. (Katso kuva 2.1)
- Alkio $x \in E$ on yhdisteen alkio, jos ja vain jos x on A :n alkio tai x on B :n alkio.
- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$

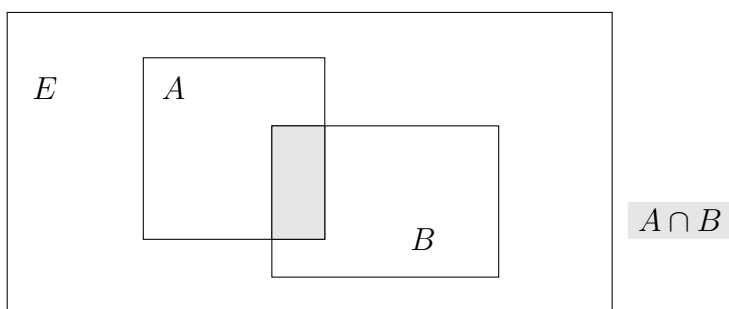
Edellinen luonnehdinta on arkikielelle tyypillinen, ja toinen taas arkikielelle vieras.
Edellinen lause kuvailee joukkoa, kun taas toinen lause kuvaa joukon alkioita.

Leikkaus: Joukkojen A ja B *leikkaus* (intersection), $A \cap B$ on joukko, joka voidaan
kuvailla seuraavilla tavoilla:

- Leikkaukseen kuuluvat A :n ja B :n yhteiset alkiot. (Katso kuvaa (Katso kuva 2.2))



Kuva 2.1: Yhdiste $A \cup B$



Kuva 2.2: Leikkaus $A \cap B$

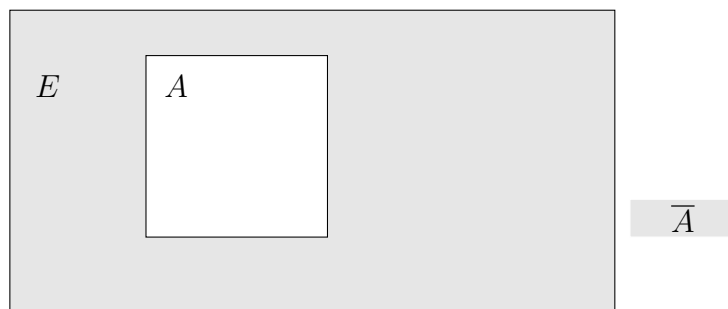
- Alkio $x \in E$ on leikkauksen alkio, jos ja vain jos x on A :n alkio ja x on B :n alkio.
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$

Komplementti: Joukon A *komplementti*, $\bar{A}$ on joukko, joka voidaan kuvailla seuraavilla tavoilla:

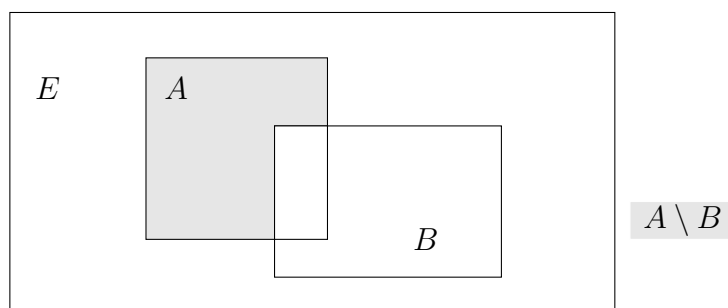
- A :n komplementtiin kuuluvat kaikki ne perusjoukon alkio, jotka eivät ole A :n alkioita. (Katso kuva 2.3.)
- Alkio $x \in E$ on leikkauksen alkio, jos ja vain jos $x \notin A$.
- $\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Erotus: Joukkojen A ja B *erotus*, $A \setminus B$ on joukko, joka voidaan kuvailla seuraavilla tavoilla:

- Erotuksen alkio saadaan, kun A :n alkioista poistetaan A :n ja B :n yhteiset alkio. (Katso kuva 2.4.)



Kuva 2.3: Komplementti $\bar{A}$



Kuva 2.4: Erotus $A \setminus B$

- Alkio $x \in E$ on leikkauksen alkio, jos ja vain jos x on A :n alkio ja x ei ole B :n alkio.
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

2.2 Merkintöjä ja kaavoja

Sovimme seuraavaksi joistakin merkintätavoista, ja kertaamme joukon aikaisemmasta tuttuja kaavoja.

Muuttujat, yhtälöt ja lausekkeet

Kurssin aikana tulemme käyttämään paljon kirjainlaskentaa. Ratkaisemme yhtälöitä ja epäyhtälöitä, joissa esiintyy kirjainmuuttujia. Totuttele muokkaamaan yhtälöitä kirjainmuodossa ennen kuin sijoitat numeroarvot yhtälöön. Vaikka tämä saattaa tuntua vaikealta, se kuitenkin on hyvä tapa oppia käsittelemään kirjainyhtälöitä. Koulukurssissa muuttuja on yleensä x , mutta nyt kirjain tulee vaihtumaan usein. Laskemisen periaatteet eivät ole kiinni käytetystä kirjaimesta.

On hyödyllistä pyrkiä noudattamaan seuraavaa eroa:

Lausekkeet. Kun lasketaan lausekkeen arvoa tai sievennetään lauseketta, kirjoitetaan lähtökohtana oleva lauseke rivin vasempaan reunaan ja sievennetty muoto '='-merkin jälkeen sen oikealle puolelle. Jos lausekkeen käsittely vaatii useamman välimuodon, jatketaan riviä oikealle niin pitkälle, kuin riviä riittää. Jos rivi ei riitä, jatkamme seuraavalta riviltä ensimmäisen '='-merkin kohdalta. Lausekkeen käsittely etenee vasemmalta oikealle.

Yhtälöt. Yhtälöt kirjoitetaan allekain. Yhtälön ratkaisu etenee ylhäältä alaspäin.

Esimerkki 1 Lausekkeen $(x+1)^2 - (x-2)^2$ sieventäminen etenee seuraavasti:

$$(x+1)^2 - (x+2)^2 = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) = 6x - 3$$



tai seuraavasti

$$\begin{aligned} \underline{(x+1)^2 - (x+2)^2} &= (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) \\ \downarrow &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 \\ \downarrow &= (x^2 - x^2) + (2x + 4x) + (1 - 4) \\ \downarrow &= 6x - 3 \end{aligned}$$

Esimerkki 2 Yhtälön $(x+1)^2 = (x-2)^2$ ratkaiseminen etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 \downarrow \quad (x+1)^2 &= (x-2)^2 \\
 \downarrow \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= x^2 - 4x + 4 \\
 \downarrow \Leftrightarrow 6x &= 3 \quad | :6 \\
 \downarrow \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Kerrattavia kaavoja

Seuraavat kaavat ovat koulukurssista tuttuja. Kertaa ne ja laske itse testitehtävät. Jos saat oikeat tulokset, niin voit sivuuttaa tämän kappaleen nopeasti. Jos saat vääriä vastauksia laskiessasi itse, niin kertaa kyseiset asiat joko vanhojen koulukirjojesi avulla, osallistumalla tukikurssin harjoituksiin tai etsi vastaavaa materiaalia verkosta.

Laskujärjestys. Merkityt laskutoimitukset suoritetaan järjestyksessä: (1) sulkeiden sisällä oleva lauseke, (2) kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle, (3) yhteen- ja vähennyslasku vasemmalta oikealle.

Esimerkki 3

$$\begin{aligned}
 \underline{5 \cdot 2} + 4 - 3 \cdot 3 &= 10 + 4 - \underline{3 \cdot 3} & (2.1) \\
 &= \underline{10 + 4} - 9 \\
 &= \underline{14 - 9} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{4 \cdot 3} / 6 \cdot 5 &= \underline{12} / 6 \cdot 5 & (2.2) \\
 &= \underline{2 \cdot 5} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (4 - 2 + \underline{3 \cdot 10 / 15}) & & (2.3) \\
 &= 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (4 - 2 + \underline{30 / 15}) \\
 &= 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (\underline{4 - 2 + 2}) \\
 &= 3 - \underline{2 \cdot (-2)} - \underline{(-2) \cdot 4} \\
 &= \underline{3 - (-4)} - \underline{(-8)} \\
 &= \underline{3 + 4 + 8} \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

Taitava laskija oppii tekemään useamman laskun kerralla.

$$\begin{aligned}
 3 - 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (4 - 2) + \frac{3 \cdot 10}{15} & \quad (2.4) \\
 &= 3 + 4 + 2 \cdot (4 - 2 + 2) \\
 &= 3 + 4 + \underline{2 \cdot 4} \\
 &= \underline{3 + 4 + 8} \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

Monen asian tekeminen kerralla vähentää välimuotojen määrää ja siten nopeuttaa laskemista. Toisaalta liian monen asian tekeminen kerralla usein tekee merkinnöistä vaikeammin luettavia ja aiheuttaa virheitä. Eri ihmisille sopii erilaiset laskutyyli. Kun haet omaa tyyliäsi, niin aseta tavoitteeksi, että käytät niin yksinkertaisia askelia ja niin monta välimuotoa, että vastauksiin ei tule huolimattomuusvirheitä. Jos voit tehdä useampia asioita kerralla ilman huolimattomuusvirheitä, niin tiivistä laskujasi. Muista kuitenkin, että välimuotoja tulisi olla niin paljon, että myös toiset ymmärtävät laskujesi välivaiheet.

Laskimen käyttö. Eri laskinten välillä on suuria eroja. On tärkeätä, että opettelet oman laskimesi käytön. Laske seuraavien lausekkeiden arvot laskimella, vertaa saamiasi vastauksia oikeisiin. Jos olet laskenut jonkin arvon väärin, niin selvitä laskuvirheesi syy. Tarvittaessa löydät lisämateriaalia verkosta. (<http://www.oph.fi/etalukio/>)

- (a) $\frac{8 - 2 \cdot (-3)}{7} =$
- (b) $(20 - 2 \cdot (5 + 10/3) + 2/3)/5 + 2 =$
- (c) $\frac{0.0325 \cdot 1.0325^{10}}{1.0325^{10} - 1} =$
- (d) $3^{2/3} =$
- (e) $\ln 1.00123 =$
- (f) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$

Vastauksia: (a) 2 (b) 2.8 (c) 0.118731 (d) 2.08008382 (e) 0.001229244 (f) 0.05

Murtoluvut. Jatkossa oletetaan, että murtoluvuilla osataan laskea. Jos huomaat epävarmuutta laskemisessasi, kertaa asia.

Olkoon A mitattavissa olevan suureen arvo (luku, rahamäärä, massa, pituus, tms.) ja olkoot n ja m kokonaislukuja. Sovitaan seuraavat sanonta-tavat:

$$\frac{A}{n} = \text{”}A:n \text{ n:n} \text{äs osa”}$$

(Esim: $\frac{1kg}{10} =$ kilogramman kymmenesosa $= 100g$, $\frac{1h}{4} =$ tunnin neljäsosa $= 15min$.)

$$\frac{m}{n} \cdot A = \text{”}m \text{ n:n} \text{äs osaa } A\text{:sta”}$$

(Esim: $\frac{3}{10} \cdot 1kg =$ kolme kymmenesosaa kilogrammasta $= 300g$, $\frac{3}{4} \cdot 1h =$ kolme neljäsosaa tunnista $= 45min$.)

$$\frac{A}{100} = \text{”sadasosa } A\text{:sta} = \text{prosentti } A\text{:sta”}$$

$$\frac{p}{100} \cdot A = \text{”}p \text{ sadasosaa } A\text{:sta} = p \text{ prosenttia } A\text{:sta”}$$

$$\frac{1}{n} = \text{”yksi n:n} \text{äs osa”}$$

(Esim: $\frac{1}{10} =$ yksi kymmenesosa $= 0.1$, $\frac{1}{4} =$ yksi neljäsosa $= 0.25$.)

$$\frac{m}{n} = \text{”}m \text{ n:n} \text{äs osaa”}$$

(Esim: $\frac{3}{10} =$ kolme kymmenesosaa $= 0.3$, $\frac{3}{4} =$ kolme neljäsosaa $= 0.75$.)

Olkoon seuraavassa $n \neq 0$. Tärkeimmät murtolukukaavat ovat :

$$\frac{p}{n} + \frac{m}{n} = \frac{p+m}{n} \quad \text{saman nimiset murtoluvut lasketaan yhteen}$$

$$\frac{p \cdot m}{p \cdot n} = \frac{m}{n} \quad \text{yhteinen tekijä voidaan supistaa pois}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{\frac{n \cdot p}{n \cdot q} + \frac{q \cdot m}{q \cdot n}}{\frac{nq}{nq}} = \frac{np + mq}{nq}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$$

$$p = \frac{p}{1} \quad \text{kokonaisluku voidaan tulkita murtoluvuksi}$$

$$p \cdot \frac{m}{n} = \frac{p}{1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{n}$$

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

$$\frac{m}{n} : p = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{p} = \frac{m}{n \cdot p}$$

Seuraavassa on joukko testitehtäviä.

(A) Laske ne ilman laskinta ja vertaa saamiasi tuloksia vastauksiin. Lopputulos yleensä supistetaan niin yksinkertaiseksi kuin mahdollista. Jos tämä tuloksen siistiminen jää tekemättä, niin tämä ei ole vakava virhe, koska numeroarvo desimaalilukuna on oikein. Kun vertaat vastuksiasi oikeisiin, tarkista myös laskimella desimaaliarvo.

(B) Lopuksi testaa lausekkeiden laskeminen laskimella niin, että lasket lausekkeiden arvot suoraan laskimella.

Jos testitehtävissä tulee virheitä, niin selvitä virheiden syy. Suhtaudu nyt virheisiin vakavasti, koska ne ennakoivat vaikeuksia myöhemmin.

Testitehtäviä:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

b) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} =$

c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{3})}{\frac{1}{4}} =$

d) $\frac{3+1}{7} : \frac{7}{3+9} =$

e) $\frac{3+1}{7} \cdot \frac{7}{3+9} =$

f) $\frac{3}{4} - \frac{3}{2} : 6 =$

Vastauksia:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{9}{20} &\sim 0.45 & \text{b) } -\frac{1}{20} &\sim -0.05 & \text{c) } \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7} &\sim 1.142857142857142857\dots \\ \text{d) } \frac{48}{49} &\sim 0.979591836734693877551020408 & \text{e) } \frac{1}{3} &\sim 0.333333\dots & \text{f) } \frac{1}{2} &\sim 0.5 \end{aligned}$$

Prosentti. Prosenttikäsitteen ydin on jo edellä esiintynyt kaava

$$”x \text{ on } p \text{ prosenttia } a\text{:sta}” \Leftrightarrow x = \frac{p}{100} a$$

Tästä voi helposti johtaa lähes kaiken prosenttilaskennan. Jos olet koulussa oppinut käsittelemään prosenttiongelmia ”pilkkua siirtelemällä” ja kertomalla sopivalla desimaaliluvulla, niin tämä ei jatkossa riitä. Lukion matematiikan kurssilla usein opetetaan juuri sen verran, että tietyt ylioppilastehtävissä mahdolliset tyypitehtävät osataan. Jos kuitenkin tutkittavaksi tulee ongelma, jossa perusarvo (edellä a eli se luku, josta sadasosat otetaan) ei ole heti näkyvillä, niin nämä kikat eivät monestikaan riitä.

Prosentteista on myöhemmin oma kappaleensa ja silloin kannattaa esimerkit käydä huolellisesti läpi. Yleissääntö on: ’Muodosta yhtälö, ratkaise tuntematon ja tulkitse tulos.’

Potenssikaavat. Sovitaan merkintä:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}} = a^n$$

Määritelmän perusteella voidaan helposti osoittaa tosiksi seuraavat kaavat.

samankantaisten	potenssien tulo ja osamäärä
$a^n \cdot a^m$	$= a^{n+m}, \text{ kaikille } a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$
$\frac{a^n}{a^m}$	$= a^{n-m}, \text{ kaikille } a \neq 0, a \in \mathbb{R}, n > m, n, m \in \mathbb{N}$
samaa astetta olevien	potenssien tulo ja osamäärä
$a^n \cdot b^n$	$= (ab)^n, \text{ kaikille } a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$\frac{a^n}{b^n}$	$= \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ kaikille } b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
potenssin potenssi	
$(a^n)^m$	$= a^{n \cdot m}$

Tekemällä sopimuksen ja merkintäsopimuksen

$$a^0 = 1, \text{ kaikilla } a \neq 0, a \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ kaikilla } a \neq 0, a \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

saamme poistettua suurimman osan edellä olleiden kaavojen lisäehdoista. Kun muistaa, että 0^0 ja $0/0$ eivät ole hyvin määriteltyjä ja nollalla ei saa jakaa, niin kaavat voidaan kirjoittaa muotoon:

sopimukset

$$a^0 = 1, \quad \text{kaikilla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{kaikilla } a \neq 0$$

samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \text{kaikille } a \neq 0$$

samaa astetta olevien potenssien tulo ja osamäärä

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \text{kaikille } b \neq 0$$

potenssin potenssi

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Testitehtäviä:

- a) $\frac{2^7}{2^3} =$
 b) $\frac{3^2}{2^2} - \frac{1}{4} =$
 c) $\frac{(3^3)^2}{9^2} =$
 d) $\frac{3^2 + 1}{5} : \frac{5}{2^{-2}} =$

Vastauksia:

- a) 16 b) 2 c) 9 d) $\frac{1}{10} \approx 0.1$

Juurikaavat. Luvun a neliöjuurella $\sqrt{a}$ tarkoitetaan yhtälön $x^2 = a$ ei-negatiivista juurta. Määritelmä edellyttää, että $a \geq 0$. Tavalliset juurikaavat ovat:

$$\text{tulon juuri} \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \text{kaikilla } a, b \geq 0$$

$$\text{osamäärän juuri} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \text{kaikille } a \geq 0, b > 0$$

$$\text{neliön juuri} \quad \sqrt{a^2} = |a|, \quad \text{kaikille } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{juuren neliö} \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \text{kaikille } a \geq 0$$

2.3 Välimerkinnät ja itseisarvo

Välimerkinnät

Jos x on suurempi kuin 3 ja x on pienempi kuin 5, niin merkitsemme $3 < x < 5$. Sovimme seuraavista joukkomerkinnoista:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[= (a, b) \quad (2.7)$$

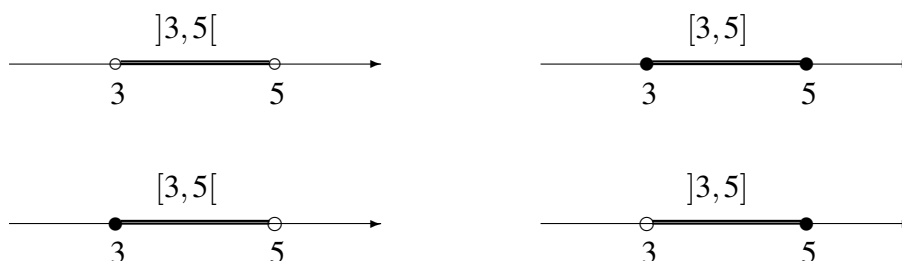
$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b] \quad (2.8)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b] = (a, b] \quad (2.9)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b[= [a, b) \quad (2.10)$$

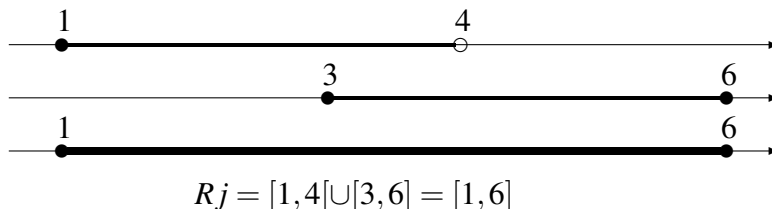
Yleisin ratkaisu tässä yhteydessä on käyttää kaarisulkeita aidon erisuuruuden tapauksessa, mutta myös hakasulkeita käytetään. Me tulemme käyttämään hakasulkeita, koska siten saadaan aikaan riittävä ero tason pisteen merkinnälle ja välimerkinnälle.

Välit tulee osata merkitä myös lukusuoralle. Välin päätepisteet merkitään lukusuoralle. Jos päätepiste ei sisälly väliin merkitään avoin pallo, jos päätepiste sisältyy väliin, merkitään suljettu pallo. Päätepisteiden väliin jäävä jana korostetaan.



HUOMAA, että on eri asia yhdistää joukkoja ja toinen asia yhdistää ehtoja.

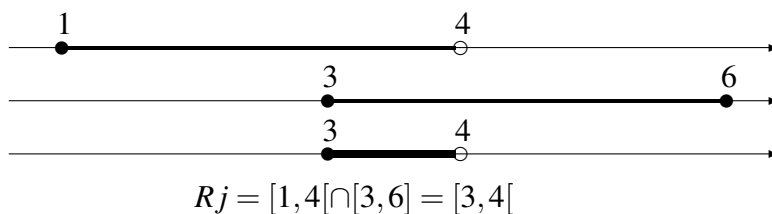
Esimerkki 4 (1) Jos ratkaisujoukko muodostuu välistä $[1, 4[$ ja välistä $[3, 6]$, niin yhdistämällä VÄLIT saamme ratkaisujoukoksi



(2) Jos ratkaisujoukko muodostuu niistä x :n arvoista jotka toteuttavat ehdon $1 \leq x < 4$ ja ehdon $3 \leq x \leq 6$, niin yhdistämällä EHDOT saamme kokonaisehdoksi

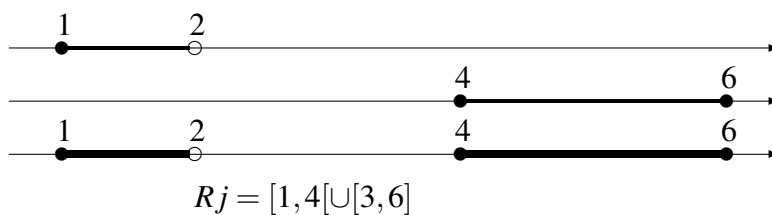
$$\begin{aligned} & (1 \leq x < 4) \text{ ja } (3 \leq x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & (1 \leq x) \text{ ja } (3 \leq x) \text{ ja } (x < 4) \text{ ja } (x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & 3 \leq x < 4 \\ \Leftrightarrow & Rj = [3, 4[\end{aligned}$$

Piirtämällä välit lukusuorille, näemme, että tapauksessa (2) ratkaisujoukko on $Rj = [1, 4[\cap [3, 6] = [3, 4[$.



Esimerkki 5 Otamme vielä vastaavan esimerkin, mutta hieman erilaisilla numeroilla.

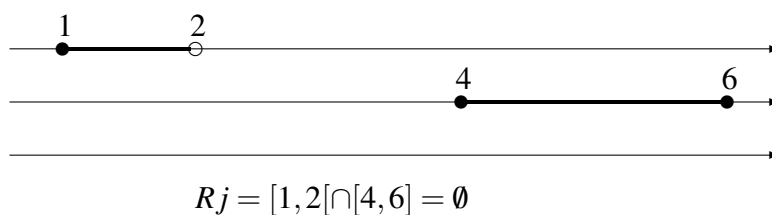
(1) Jos ratkaisujoukko muodostuu välistä $[1, 2[$ ja välistä $[4, 6]$, niin yhdistämällä VÄLIT saamme ratkaisujoukoksi



(2) Jos ratkaisujoukko muodostuu niistä x :n arvoista jotka toteuttavat ehdon $1 \leq x < 2$ ja ehdon $4 \leq x \leq 6$, niin yhdistämällä EHDOT saamme kokonaisehdoksi

$$\begin{aligned} & (1 \leq x < 2) \text{ ja } (4 \leq x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & (1 \leq x) \text{ ja } (4 \leq x) \text{ ja } (x < 2) \text{ ja } (x \leq 6) \\ \Leftrightarrow & (4 \leq x) \text{ ja } (x < 2) \quad (\text{mahdotonta!}) \\ \Leftrightarrow & R_j = \emptyset \end{aligned}$$

Piirtämällä välit lukusuorille, näemme, että tapauksessa (2) ratkaisujoukko on $R_j = [1, 2[\cap [4, 6] = \emptyset$.



Sovimme myös seuraavista muodollisista merkitätavoista (∞ = ”ääretön”)

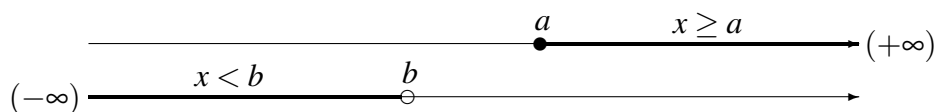
$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} =]a, \infty[= (a, \infty) \quad (2.11)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} = [a, \infty[= [a, \infty) \quad (2.12)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} =]-\infty, b] = (-\infty, b] \quad (2.13)$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} =]-\infty, b[= (-\infty, b) \quad (2.14)$$

Lukusuoralla



Itseisarvo

Luvun itseisarvolla tarkoitetaan luvun numero-osaa ilman mahdollista etumerkkiä. Siis

$$|-7| = 7, \quad |2| = 2, \quad |-100| = 100, \quad \text{jne...}$$

Niin kauan kun puhutaan yksittäisistä luvuista, asia on aika selvä, mutta nyt meidän on selvitettävä, mitä tarkoitetaan lausekkeen itseisarvolla!

Määritelmä 6 Lausekkeen a itseisarvo on

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0, \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

Siis

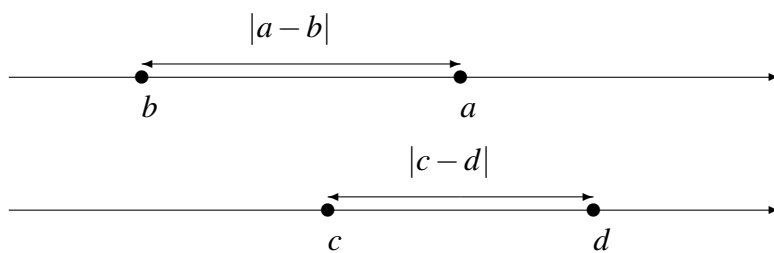
$$\begin{aligned} |-7| &= -(-7) = 7 && \text{(alemman kaavan mukaan),} \\ |2| &= 2 && \text{(ylemmän kaavan mukaan),} \\ |-100| &= -(-100) = 100 && \text{(alemman kaavan mukaan).} \end{aligned}$$

Jos tiedämme varmasti lausekkeen merkin, niin pystymme kirjoittamaan lausekkeen ilman itseisarvomerkkejä. Esimerkiksi $|x^2 + 1| = x^2 + 1$.

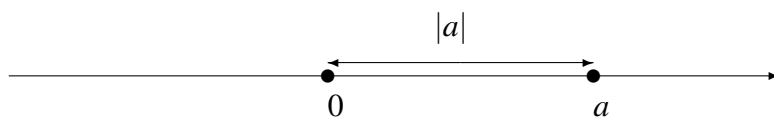
Kahden luvun a ja b etäisyys lukusuoralla on $|a - b|$, sillä

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{kun } a - b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b \\ b - a & \text{kun } a - b < 0 \Leftrightarrow a < b \end{cases},$$

joten kummassakin tapauksessa tapauksessa isommasta vähennetään pienempi ja näinpäin laskettu erotus on järkevä mitta etäisyydelle.



Erityisesti luvun a itseisarvo voidaan tulkita a :n ja nollan etäisyydeksi $|a| = |a - 0|$



2.4 Yhtälöt ja epäyhtälöt

Yhtälöiden ratkaiseminen on hyvin keskeinen taito, joka tällä kurssilla tulee hankkia ja harjoittaa. Yhtälöt eivät ole vaikeita, mutta oleellista on se, että tulet tarkastelemaan yhtälöitä, jotka syntyvät hieman yllättäen ja varoittamatta.

Koulussa olet useimmiten kotilaskua laskiessasi jo valmiiksi tiennyt, millainen yhtälö ratkaistavaksesi tulee. Nyt on tärkeätä tottua siihen, ettei alussa tiedä, mitä laskun aikana tapahtuu. Laskuun tulee uskaltaa heittäytyä luottaen siihen, että joka käänteessä osaa toimia oikein. Tämä luottamus syntyy harjoittelun kautta. Tässä tarkoitettua taitoa ei opi lukemalla seuraavat kolme sivua, vaan harjoittelemalla ahkerasti seuraavat kolme kuukautta.

Kaikkien yhtälöiden käsittelyssä on samat perusaskleet:

- Termi saa vaihtaa yhtälön puolta, jos se samalla vaihtaa merkkiä.
- Yhtälön saa jakaa nolasta eroavalla luvulla (muista jakaa jokainen termi).
- Yhtälön voi kertoa nolasta poikkeavalla luvulla (muista kertoa jokainen termi).

Epäyhtälöiden käsittelyssä on yksi tärkeä ero edelliseen:

- Yhtälön saa jakaa ja kertoa nolasta eroavalla luvulla, mutta kerrottaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla erisuuruus-merkki kääntyy.
- Epäyhtälön saa myös kertoa (jakaa) lausekkeella, jos varmasti tiedämme kertojan (jakajan) merkin.

Tarkastelemme seuraavaksi yhtälöitä ja epäyhtälöitä tyypeittäin. Osa materiaalista on koulusta tuttua, mutta osa voi olla uutta.

I asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen x :n yhtälö ratkaistaan seuraavasti.

1. Poista tarpeettomat sulut ja nimittäjät.
2. Perusaskelten avulla muunna yhtälö muotoon $x = \text{lauseke}$.
3. Edeltävä vaihe voi epäonnistua vain, jos x häviää pois yhtälöstä. Jos näin syntynyt yhtälö on tosi, on alkuperäinen yhtälö identtisesti tosi, eli aina tosi (ratkaisujoukko sisältää silloin kaikki reaalityöt (Rj = ℝ)). Jos syntynyt yhtälö on epätosi, ei yhtälöllä ole juurta (ratkaisujoukko on silloin tyhjä (Rj = ∅)).

Esimerkki 7 Kaksi erillistä yhtälöesimerkkiä

a) $ \begin{aligned} 5(x-1) &= x+7 \\ \Leftrightarrow 5x-5 &= x+7 \\ \Leftrightarrow 5x-x &= 7+5 \\ \Leftrightarrow 4x &= 12 & :4 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned} $	b) $ \begin{aligned} \frac{2x+1}{2} + 1 &= x & \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2x+1)}{2} + 2 \cdot 1 &= 2 \cdot x \\ \Leftrightarrow 2x+1+2 &= 2x \\ \Leftrightarrow 2x-2x &= -1-2 \\ \Leftrightarrow 0 &= -3 & \text{epätosi!} \\ \Leftrightarrow Rj &= \emptyset \end{aligned} $
--	--

Vastaus a) yhtälön juuri on 3, b) yhtälöllä ei ole juurta ($Rj = \emptyset$).

Edellä ei erillisen vastauksen kirjoittaminen tunnu kovin tarpeelliselta. Jokainen luki- ja varmasti osaa tulkita yhtälön juuret yhtälön ratkaisun viimeisen rivin merkinnöistä. Jatkossa kuitenkin ongelmat muuttuvat vähitellen mutkikkaammiksi, ja vastauksen kirjoittaminen täsmällisesti on tärkeä taito.

PERIAATE: Jos ratkaisin yhtälön, koska esimieheni kysyi minulta erästä seikkaa, niin jos mahdollista kirjoitan ratkaisuni perään vastauksen, joka vastaa esitettyyn kysymykseen.

Esimerkki 8 Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa x kappaletta. Tällä hetkellä $x = 200 \text{ kpl/kk}$. Tuotteen myyntihinta on 18.00€ . Yhden tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 8.50€ ja viikossa kiinteät kustannukset ovat 250€ . Miten paljon pitää tuotteita valmistaa kuukaudessa, jotta myyntitulo on sama kuin valmistuskustannukset kuukaudessa?

Ratkaisu: Kirjoitetaan yhtälö, jonka vasen puoli on myyntitulo kuukauden ajalta ja oikea puoli on valmistuskustannukset samalta ajalta.

$$\begin{aligned} x \cdot 18.00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} &= x \cdot 8.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} + 4 \frac{\text{vko}}{\text{kk}} \cdot 250 \frac{\text{€}}{\text{vko}} \\ \Leftrightarrow x \cdot 9.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} &= 1000.00 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1000.00}{9.50} \cdot \frac{\text{€}}{\text{kk}} \cdot \frac{\text{kpl}}{\text{€}} \approx 105.29 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Vastaus: Tuotteita tulee valmistaa kuukaudessa vähintään 105 kappaletta, jotta myyntitulo vastaa kustannuksia.

II asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälön normaalimuoto on

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.15)$$

ja se ratkaistaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.16)$$

Jos juurrettava eli diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen, niin juuria on kaksi. Jos diskriminantti on nolla, saadaan yksi juuri. Jos diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole reaalisia juuria.

$$\begin{aligned} D > 0 &\longrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ D = 0 &\longrightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ D < 0 &\longrightarrow R_j = \emptyset \end{aligned}$$

Esimerkki 9 Edellisessä esimerkissä (8) oletettiin myyntihinnan pysyvän vakiona. Usein kuitenkin on niin, että lisättäessä tuotantoa on myyntihintaa laskettava, jotta tuotanto saadaan myytyä. Nyt on arvioitu, että myyntihinta riippuu valmistusmäärästä seuraavasti

$$p = 20.00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x.$$

Yhden tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 8.50€ ja kuukaudessa kiinteät kustannukset ovat 1000€. Miten paljon nyt pitää tuotteita valmistaa kuukaudessa, jotta myyntitulo on sama kuin valmistuskustannukset kuukaudessa?

Ratkaisu: Vastaavasti kuin edellä kirjoitamme taas yhtälön, jonka vasemmalla puolella on kuukauden myyntitulo ja oikealla puolella vastaavan ajan valmistuskustannukset

$$\begin{aligned} p \cdot x &= x \cdot 8.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} + 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow \left(20.00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x \right) \cdot x &= x \cdot 8.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} + 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow 11.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot x - 0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 &= 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow -0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 + 11.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot x - 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on nyt normaalimuodossa, joten teemme sijoitukset ratkaisukaavaan.

$$\Leftrightarrow x = \frac{-11.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \pm \sqrt{11.50^2 \frac{\text{€}^2}{\text{kpl}^2} - 4 \cdot \left(-0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \right) \cdot \left(-1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \right)}}{2 \cdot \left(-0.01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \right)}$$

Nyt juuretavassa yksikkö on $(\text{€}^2)/(\text{kpl}^2)$ joten koko osoittajan yksikkö on €/kpl. Silloin ratkaisukaavan mukaisen juuren yksikkö on

$$\frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot \frac{\text{kpl}^2}{\text{€} \cdot \text{kk}} = \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$$

kuten pitääkin. Nyt voimme keskittyä numerolaskuun.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{-11.50 \pm \sqrt{11.50^2 - 4 \cdot (-0.01) \cdot (-1000)}}{2 \cdot (-0.01)} \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \\ &= \frac{-11.50 \pm \sqrt{92.25}}{-0.02} \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow x_1 &= 94,77 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \approx 95 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}, \text{ ja } x_2 = 1055,23 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \approx 1055 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \end{aligned}$$

Juuria tuli nyt kaksi. Asia saa luonnollisen selityksen, kun otamme vastaavat ongelmat uudelleen käsittelyyn voitonmaksimoinnin yhteydessä. Jos valmistusmäärä on pieni, ei myyntituloa kerry riittävästi. Jos valmistusmäärä on iso, niin kysyntäfunktion mukaan myyntihinta painuu pieneksi ja myyntitulo on taas liian pieni kustannusten kattamiseen. On siis olemassa rajat järkevän tuotannon määrälle.

Vastaus: Myyntitulo kattaa valmistuskustannukset, jos $95 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \leq x \leq 1055 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$.

Testitehtäviä: Ratkaise seuraavat toisen asteen yhtälöt

- a) $3x^2 - 2x + 1 = 0$
- b) $x(x + 6) = 7$
- c) $3x^2 - 1 = x(x - 4)$
- d) $(x - 2)(x + 4) = 7$
- e) $(x - 2)(x - 2) = -1$
- f) $2x^2 - x(x + 1) = x(x - 2) + 1$

Vastauksia:

- a) $x_1 = 1, x_2 = -1/3$ b) $x_1 = 1, x_2 = -7$
- c) $x_1 = 0.224745, x_2 = -2.24745$
- d) $x_1 = 0.414214, x_2 = -2,414214$ e) $R_j = \emptyset$ f) $x = 1$

Korkeamman asteen yhtälöt

Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöt voidaan ratkaista niihin liittyvillä ratkaisukaavakokoelmilla. Kaavat ovat sen verran mutkikkaita, ettei niitä tällä kurssilla opetella. Seuraavassa opimme käsittelemään kolmannen asteen yhtälöä, kun yksi juuri tunnetaan. Menettely yleistyy helposti vielä korkeampiulotteisille yhtälöille.

Olkoon tarkasteltavana yhtälö

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \quad (2.17)$$

Jos tiedämme, että yksi juuri on $x = z$, niin silloin yhtälö (2.17) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.17) \Leftrightarrow (x - z)(x^2 + b_1x + b_0) = 0 \quad (2.18)$$

missä b_1 ja b_0 voidaan valita siten, että yhtälöiden (2.17) ja (2.18) vasemman puolen lausekkeet ovat identtiset. Siis

$$\begin{aligned}
 x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (x-z)(x^2 + b_1x + b_0) \\
 &= x^3 + (b_1 - z)x^2 + (b_0 - zb_1)x - b_0z \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} b_1 & = & a_2 + z \\ -zb_1 + b_0 & = & a_1 \\ -zb_0 & = & a_0 \end{array} \right. \begin{array}{l} +z \\ \leftarrow \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} b_1 & = & a_2 + z \\ b_0 & = & a_1 + a_2z + z^2 \\ -zb_0 & = & a_0 \end{array} \right. \begin{array}{l} +z \\ \leftarrow \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} b_1 & = & a_2 + z \\ b_0 & = & a_1 + a_2z + z^2 \\ 0 & = & \underbrace{a_0 + a_1z + a_2z^2 + z^3}_{=0} \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} b_1 & = & a_2 + z \\ b_0 & = & a_1 + b_1z \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 10 Ratkaise yhtälö

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Yksi yhtälön juuri on $x = -2$. (Tämän näkee suoraan sijoittamalla x :n paikalle -2 , jolloin yhtälö tulee todeksi.)

Silloin $b_1 = a_2 + z = -3 + (-2) = -5$ ja $b_0 = a_1 + b_1z = -6 + (-5) \cdot (-2) = 4$. Siis

$$\begin{aligned}
 x^3 + 3x^2 - 3x - 10 &= 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 5x + 4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 4
 \end{aligned}$$

Edellä esietty on erikoistapaus seuraavasta yleisemmästä tuloksesta.

Lause 11 Jos $P_n(x)$ on astetta n oleva polynomi, ja $P_n(x_1) = 0$, niin on olemassa astetta $n-1$ oleva polynomi $Q_{n-1}(x)$, jolle

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x), \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Jos polynomilla $Q_{n-1}(x)$ on edelleen reaalinollakohta x_2 siten, että $Q_{n-1}(x_2) = 0$, niin on olemassa polynomi $Q_{n-2}(x)$ siten, että

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_{n-2}(x), \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Toistamalla tätä menettelyä niin kauan, kuin reaalisiä nollakohtia löytyy, saamme seuraavan tuloksen.

Lause 12 (1) Jos $P_n(x)$ on astetta n oleva polynomi, niin se voidaan aina kirjoittaa muotoon

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)Q(x), \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

missä luvut $x_1, x_2, \dots, x_k$ ovat polynomin $P(x)$ reaaliset nollakohdat ja astetta $n - k$ olevalla polynomilla $Q(x)$ ei ole reaalisiä nollakohtia.

(2) n :nnen asteen yhtälöllä on enintään n kappaletta reaalisia juuria.

Korkeamman asteen yhtälöitä emme tällä kurssille juurikaan ratko. Aina kun mallinamme jotakin taloudellista ilmiötä, pyrimme korkeintaan astetta kaksi oleviin yhtälöihin. Jos kuitenkin joudut opintojesi aikana ratkaisemaan kolmatta tai korkeampaa astetta olevan yhtälön, niin tässä kannattaa käyttää hyväksi Newtonin menetelmää, joka opetellaan derivoinnin yhteydessä tai jotakin symbolisen laskennan ohjelmistoa (Mathematica, Matlab, tms.).

Jotta osaisimme oikein tulkita ohjelmien antamat tulosteet, on osattava kompleksilukujen perusteet. Tätä varten palaamme tähän aiheeseen uudelleen kappaleessa, jonka pääaihe on kompleksiluvut.

Hankalat yhtälöt

Jos yhtälö ei sijoitu mihinkään edellä mainituista ryhmistä, sitä voi pitää hankalana tai ainakin ylimääräistä huolellisuutta vaativana. Eräitä tapauksia tullaan käsittelemään myöhemmin. (Itseisarvoyhtälöt, juuriyhtälöt, eksponenttiyhtälöt, Newtonin menetelmä.)

Hankalan tuntuinen yhtälö kannattaa usein muokata uuteen muotoon siirtämällä kaikki termit samalle puolelle (yleensä vasemmalle puolelle eli LHS:iin). LHS määrittelee nyt x :n funktion $y = f(x) = LHS(x)$. Jos tämän funktion kuvaajan pystyy selvittämään ja erityisesti löytää kaikki sen nollakohdat, niin silloin yhtälökin on saatu ratkaistua.

Esimerkki 13 Tarkastellaan uudelleen esimerkin (9) yritystä. Kysyntäfunktio on

$$p = 20,00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 0,01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x.$$

Yhden tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 8.50€ ja kuukaudessa kiinteät kustannukset ovat 1000€ . Lisäksi nyt huomioidaan lopputuotevaraston kokonaiskustannukset $\sqrt{cq}$, $c = 2\text{€}^2/\text{kk}/\text{kpl}$. Varastointikustannusten vaikutus ei ole suuri, mutta se kuitenkin vaikuttaa ratkaisuun. Varastointikustannusten lauseke $\sqrt{cq}$ on teorian mukainen. Myöhemmin tutustumme varastomalleihin omassa luvussaan.

Miten paljon nyt pitää tuotteita valmistaa kuukaudessa, jotta myyntitulo on sama kuin valmistuskustannukset kuukaudessa?

Merkitään nyt seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{valmistusmäärä} &= x \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}, \\ \text{myyntihinta} &= p \frac{\text{€}}{\text{kpl}}. \end{aligned}$$

Silloin kysyntäfunktio menee muotoon

$$\begin{aligned} p \frac{\text{€}}{\text{kpl}} &= 20,00 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 0,01 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \\ \Leftrightarrow p &= 20,00 - 0,01x \end{aligned}$$

Tehtävässä tarkoitettu yhteys myyntitulon ja kustannusten välillä saa muodon

$$\begin{aligned} \text{myyntitulo}(\text{€}/\text{kk}) &= \text{kustannukset}(\text{€}/\text{kk}) \\ \Leftrightarrow p \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot x \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} &= 8,50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \cdot x \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} + 1000 \frac{\text{€}}{\text{kk}} + \sqrt{2 \frac{\text{€}^2}{\text{kk} \cdot \text{kpl}} \cdot x \cdot \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}} \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (20,00 - 0,01x)x &= 8,50x + 1000 + \sqrt{2x} \\ \Leftrightarrow -0,01x^2 + 11,50x - 1000 - \sqrt{2x} &= 0. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Saatu yhtälö on hankala, sillä sen ratkaisemisaan ei ole olemassa mitään suoraa kaavaa. Piirtämällä LHS:in kuvaajan, saamme ongelman ratkaisuksi: $96 \leq x \leq 1050$. ■

I asteen epäyhtälö

Ensimmäisen asteen epäyhtälöä käsitellään muuten samoin kuin yhtälöä, mutta kerrottaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla, erisuuruusmerkki kääntyy.

Huomaa, että taloudellisissa sovelluksissa usein epäyhtälö on luonnollisempi kuin yhtälö. Yleensä yritys haluaa, että sen tulot ovat suuremmat kuin sen menot. Jos ratkaisemme yhtälön ”tulot = menot” ja toimimme ratkaisun ohjaamina, saatamme toimia vähemmän kannattavasti kuin jos olisimme tutkineet epäyhtälön ”tulot > menot” ratkaisua luovasti.

Esimerkki 14 Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän x (kpl/kk). Tuotteen myyntihinta on 18.35€. Jokaisen tuotteen valmistaminen aiheuttaa muuttuvia valmistuskustannuksia 15.50€. Kiinteät kustannukset ovat 8500€/kk. Edellisen kuukauden aikana yritys valmisti 5000 tuotetta, jolloin kate oli

$$\begin{aligned} \text{kate} &= \text{myyntitulo} - \text{muuttuvat kustannukset} \\ &= 5000 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 18.35 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} - 5000 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 15.50 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} \\ &= 91\,750 \text{€}/\text{kk} - 77\,500 \text{€}/\text{kk} \\ &= 14\,250 \text{€}/\text{kk} \end{aligned}$$

ja vastaavasti kuukauden tulos oli

$$\begin{aligned} \text{tulos} &= \text{kate} - \text{kiinteät kustannukset} \\ &= 14\,250 \frac{\text{€}}{\text{kk}} - 8\,500 \frac{\text{€}}{\text{kk}} \\ &= 5\,750 \text{€}/\text{kk}. \end{aligned}$$

Tulos on nyt positiivinen, eli yritys tekee voittoa. Voitto (tulos) oli 6.3% myynnistä, sillä

$$\frac{\text{voitto}}{\text{myynti}} \cdot 100\% = \frac{5\,750 \text{€}/\text{kk}}{91\,750 \text{€}/\text{kk}} \cdot 100\% = 6.267\% \approx 6.3\%$$

Miten suuri pitää valmistusmäärän olla, jotta voitto olisi vähintään 10% myynnistä?

Kirjoitetaan vastaava epäyhtälö, kun tuotantomäärä on x .

$$\begin{aligned} \text{voitto} &\geq \frac{10}{100} \cdot \text{myynti} \\ \Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 15.50) \text{ €/kpl} - 8500 \text{ €/kk} &\geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35 \text{ €/kpl} \\ \Leftrightarrow x \cdot 1.015 \text{ €/kpl} &\geq 8500 \text{ €/kk} \quad | : 1.015 \text{ €/kpl} \\ \Leftrightarrow x &\geq 8375 \text{ kpl/kk} \end{aligned}$$

Vastaus: Jos tuotantomäärä on vähintään 8375 kpl/kk, niin voitto on vähintään 10% myynnistä.

Epäjatkuvuuden huomiointi

Usein epäyhtälössä esiintyvät lausekkeet sisältävät epäjatkuvuuksia. Silloin epäyhtälö ei enää olekaan oikea ensimmäisen asteen epäyhtälö.

Kun epäjatkuvuuskohdat merkitään lukusuoralle (x -akselille), niin nämä kohdat jakavat lukusuoran väleihin siten, että kullakin välillä epäyhtälö voidaan kirjoittaa yksinkertaiseen muotoon. Seuraava esimerkki valaisee asiaa.

Esimerkki 15 Tarkastellaan uudelleen esimerkin (9) yritystä. Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän x (kpl/kk). Tuotteen myyntihinta on 18.35 €. Jos tuotantomäärä on riittävän suuri, on mahdollista saada raaka-ainehankintojen yhteydessä määräälennuksia. Määräalennuksista johtuen muuttuvat kustannukset ovat

$$\text{muuttuvat kustannukset} = \begin{cases} x \cdot 15.50 \text{ €/kpl}, & \text{kun } x \leq 12000 \\ x \cdot 14.75 \text{ €/kpl}, & \text{kun } x > 12000 \end{cases}$$

Vastaavasti kiinteät kustannukset ovat

$$\text{kiinteät kustannukset} = \begin{cases} 8500 \text{ €/kk}, & \text{kun } x \leq 9000 \\ 10500 \text{ €/kk}, & \text{kun } x > 9000 \end{cases}.$$

Tämä epäjatkuvuus kiinteissä kustannuksissa on (esimerkiksi) seurausta siitä, että laajennettaessa tuotantoa, yrityksen on pakko ottaa käyttöön uusia tuotantotiloja, mikä

puolestaan lisää lämmitys-, vuokra-, vakuutus-, vartiointi-, siivous-, ym. kustannuksia.

Miten suuri pitää valmistusmäärän olla, jotta voitto olisi vähintään 10% myynnistä?

Jaamme tarkastelun kolmeen osaan:

Tapaus 1 ($x \leq 9000$)

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 15.50) \text{ €/kpl} - 8500 \text{ €/kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35 \text{ €/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1.015 \text{ €/kpl} \geq 8500 \text{ €/kk} \quad | : 1.015 \text{ €/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 8375 \text{ kpl/kk}$$

$$\longrightarrow [8375; 9000] \subset R_j$$

Tapaus 2 ($9000 < x \leq 12000$)

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 15.50) \text{ €/kpl} - 10500 \text{ €/kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35 \text{ €/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1.015 \text{ €/kpl} \geq 10500 \text{ €/kk} \quad | : 1.015 \text{ €/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 10345 \text{ kpl/kk}$$

$$\longrightarrow [10345; 12000] \subset R_j$$

Tapaus 3 ($12000 < x$)

$$\text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti}$$

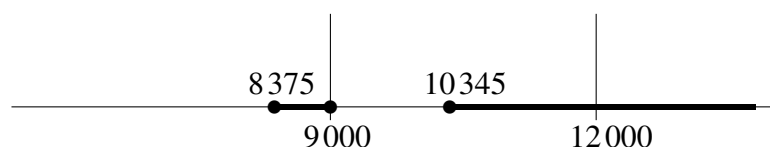
$$\Leftrightarrow x \cdot (18.35 - 14.75) \text{ €/kpl} - 10500 \text{ €/kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot 18.35 \text{ €/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot 1.765 \text{ €/kpl} \geq 10500 \text{ €/kk} \quad | : 1.765 \text{ €/kpl}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 5949 \text{ kpl/kk}$$

$$\longrightarrow]12000; \infty[\subset R_j$$

Lukusuoralla ratkaisujoukko näyttää seuraavalta:



Vastaus: Voitto on vähintään kymmenen prosenttia myynnistä jos valmistusmäärä kuukaudessa x toteuttaa ehdon

$$8375 \leq x \leq 9000 \quad \text{tai} \quad x \geq 10345.$$

II asteen epäyhtälö

Seuraavassa sanomme, että epäyhtälön vasen puoli on LHS (Left Hand Side) ja epäyhtälön oikea puoli on RHS (Right Hand Side). Pienen tovin saa #-merkki edustaa kaikkia erisuuruusmerkkejä $\leq, <, >, \geq, \neq$. Tällä halutaan nyt korostaa sitä, että erisuuruusmerkin tyyppi astuu kuvaan vasta aivan algoritmin loppuvaiheessa.

Toisen asteen epäyhtälön normaalimuoto on $ax^2 + bx + c \neq 0$. Toisin sanoen normaalimuodon LHS on toisen asteen polynomi ja RHS on nolla.

Toisen asteen epäyhtälön ratkaisualgoritmi voidaan tiivistää seuraaviin askeliin:

- (1) vie epäyhtälö normaalimuotoon,
- (2) ratkaise LHS:n nollakohdat,
- (3) muodosta LHS:n merkkikaavio,
- (4) päätele ratkaisujoukko merkkikaavion ja #-n perusteella.

Laadimme kohdassa (3) mainitun merkkikaavion siten, että hahmottelemme x -akselin päälle paraabelin $y = \text{LHS}$, joka leikkaa x -akselia LHS:n nollakohdissa. Merkkikaavion muoto riippuu nyt kertoimesta a , joka määrää paraabelin aukeamissuunnan ja diskriminantista $D = b^2 - 4ac$, joka määrää paraabelin ja x -akselin leikkauspisteiden lukumäärän. Eri vaihtoehdot on esitetty taulukossa 2.1.

Esimerkki 16 Ratkaise epäyhtälö $(x+1)x \geq 5 - 3x^2$.

Viedään ensin epäyhtälö normaalimuotoon:

$$\begin{aligned} (x+1)x &\geq 5 - 3x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x &\geq 5 - 3x^2 \\ \Leftrightarrow \underbrace{4x^2 + x - 5}_{=\text{LHS}} &\geq 0 \end{aligned}$$

Taulukko 2.1: Toisen asteen epäyhtälön LHS:n merkkikaavio.

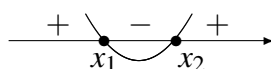
par. aukeamissuunta	juuret	merkkikaavio
$a > 0 \rightarrow$ ylöspäin	$D > 0 \rightarrow x_1$ ja x_2	
$a > 0 \rightarrow$ ylöspäin	$D = 0 \rightarrow x_1$	
$a > 0 \rightarrow$ ylöspäin	$D = 0 \rightarrow Rj = \emptyset$	
$a < 0 \rightarrow$ alaspäin	$D > 0 \rightarrow x_1$ ja x_2	
$a < 0 \rightarrow$ alaspäin	$D = 0 \rightarrow x_1$	
$a < 0 \rightarrow$ alaspäin	$D = 0 \rightarrow Rj = \emptyset$	

Toisen asteen termin kerroin $a = 4 > 0$, joten paraabeli aukeaa ylöspäin. Diskriminantti on $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 81 > 0$, joten juuria on kaksi.

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = -1.25 \quad \text{ja}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = 1$$

Merkkikaaviosta



näemme, että

$$\text{LHS} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1.25 \text{ tai } x \geq 1$$

Esimerkki 17 Tarkastellaan uudelleen esimerkin (9) yritystä. Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän x (kpl/kk). Tuotteen myyntihinta on

$$p = 25.00\text{€}/\text{kpl} - 0.00133 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x.$$

Jokaisen tuotteen valmistaminen aiheuttaa muuttuvia valmistuskustannuksia 15.50€. Kiinteät kustannukset ovat 8500€/kk.

Miten suuri pitää valmistusmäärän olla, jotta voitto olisi vähintään 10% myynnistä?

Kirjoitetaan vastaava epäyhtälö, kun tuotantomäärä on x .

$$\begin{aligned}
 & \text{voitto} \geq 0.1 \cdot \text{myynti} \\
 \Leftrightarrow & x \cdot (p - 15.50\text{€/kpl}) - 8500\text{€/kk} \geq 0.1 \cdot x \cdot p \\
 \Leftrightarrow & 0.9 \cdot x \cdot p - 15.50\text{€/kpl} \cdot x - 8500\text{€/kk} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & 0.9 \cdot x \cdot (25.00\text{€/kpl} - 0.00133 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x) - 15.50\text{€/kpl} \cdot x - 8500\text{€/kk} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & -0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 + 7.00\text{€/kpl} \cdot x - 8500\text{€/kk} \geq 0
 \end{aligned}$$

Koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen on LHS:n kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli, ja ratkaisujoukkoon kuuluvat yhtälön $LHS = 0$ juurten välissä olevat x :n arvot. Ratkaistaan seuraavaksi nämä juuret

$$\begin{aligned}
 & LHS = 0 \\
 \Leftrightarrow & -0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \cdot x^2 + 7.00\text{€/kpl} \cdot x - 8500\text{€/kk} = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{-7.00\text{€/kpl} \pm \sqrt{(7.00\text{€/kpl})^2 - 4 \cdot (-0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2}) \cdot (-8500\text{€/kk})}}{2 \cdot \left(-0.001197 \frac{\text{€} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2}\right)} \\
 \Leftrightarrow & x = \left(\frac{7.00 \pm \sqrt{8.302}}{0.002394} \right) \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \\
 \Leftrightarrow & x_1 = 1720.4 \text{ kpl/kk} \quad \text{ja} \quad x_2 = 4127.5 \text{ kpl/kk}
 \end{aligned}$$

Vastaus: Jos tuotantomäärä x on välillä $1720 \text{ kpl/kk} \leq x \leq 4130 \text{ kpl/kk}$, niin voitto on vähintään 10% myynnistä.

Kun vastausta vertaa esimerkin (9) vastaukseen, niin ero tuntuu suurelta. Esimerkkien yhteinen lähtökohta on nykyinen tuotannon laajuus $x = 5000 \text{ kpl/kk}$ ja nykyinen hinta 18.50€/kpl . Esimerkin (9) vastaus merkitsee sitä, että yrityksen tulee kasvattaa tuotantoaan saadakseen voiton haluamakseen, ja edellisen esimerkin mukaan yrityksen tulee pienentää tuotantoaan, jos se haluaa voiton olevan 10% myynnistä. Esimerkkien välinen ero on siinä, että esimerkissä (9) oletetaan tuotteista saatavan sama myyntihinta vaikka tuotantoa kasvatetaan. Tämä ei yleensä ole totta. Esimerkki (17) antaa todemman kuvan siitä, miten tuotantoa joudutaan mitoittamaan. Joskus tuotantoa su-pistetaan kannattavuussyistä!

Testitehtäviä: Ratkaise seuraavat toisen asteen epäyhtälöt

- a) $3x^2 - 2x \geq -1$
- b) $x(x+6) < 7$
- c) $-3x^2 + 2 > 5x$
- d) $(2-x)(x+4) < 0$
- e) $(x-2)(x-2) > -1$
- f) $x^2 - 2(x+1) \leq -3$

Vastauksia:

- a) $x \leq -1/3$ tai $x \geq 1$
- b) $-7 < x < 1$
- c) $-2 < x < 1/3$
- d) $x \leq 2$ tai $x \geq 4$
- e) $R_j = \mathbb{R}$
- f) $x = 1$

2.5 Prosentti

Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa (latinaksi 'pro centum', englanniksi 'per cent', espanjaksi 'por ciento'). p prosenttia, $p\%$, on p sadasosaa. Seuraavat lauseet sanovat siis saman asian.

$$\begin{aligned}
 & \text{"Maksu on 5 prosenttia 600 eurosta."} \\
 \Leftrightarrow & \text{"Maksu on 5 sadasosaa 600 eurosta."} \\
 \Leftrightarrow & \text{"Maksu on } 5 \cdot \frac{600\text{€}}{100} \\
 \Leftrightarrow & \text{"Maksu on } \frac{5}{100} \cdot 600\text{€} \\
 \Leftrightarrow & \text{"Maksu on } 0.05 \cdot 600\text{€}
 \end{aligned}$$

Sovimme ensin seuraavista termeistä.

Jos b on p prosenttia a :sta, eli

$$b = \frac{p}{100} \cdot a, \quad (2.21)$$

joka voidaan myös kirjoittaa, myös muotoon

$$\frac{b}{a} \cdot 100\% = p\%, \quad (2.22)$$

niin sanomme, että

$$\begin{aligned} a &= \text{perusarvo (mihin verrataan?)(minkä sadasosista on kysymys?)} \\ p &= \text{prosenttiluku (miten monta sadasosaa?)} \\ b &= \text{prosenttiarvo (mitä verrataan?)} \\ \frac{p}{100} &= \text{prosenttikerroin (millä kerrotaan)} \end{aligned}$$

Esimerkki 18 Olkoon tuotteen alkuperäinen hinta 23.00€. Jos se myydään 20% alennuksella, niin alennettu hinta on 80% alkuperäisestä. Mikä tämä alennettu hinta on?

Ratkaisu: merkitään

$$\begin{aligned} \text{perusarvo} &= 23.00\text{€} \\ \text{prosenttikerroin} &= \frac{80}{100} = 0.80 \\ \text{prosenttiarvo} &= x = \text{alennettu hinta} \end{aligned}$$

Siis

$$x = \frac{80}{100} \cdot 23.00\text{€} = 18.40\text{€}$$

Esimerkki 19 Erään tuotteen valmistuskustannus on 123.00€ ja sen myyntihinta on 141.00€. Silloin kate (myyntitulo- valmistuskustannus) on $141.00\text{€} - 123.00\text{€} = 18.00\text{€}$. Kate on silloin 12.77% myyntihinnasta, sillä

$$\frac{18.00\text{€}}{141.00\text{€}} \cdot 100\% = 12.77\%.$$

Millä myyntihinnalla kate olisi 10% myyntihinnasta?

Ratkaisu: merkitään myyntihintaa x :llä.

$$\begin{aligned} \text{perusarvo} &= x = \text{myyntihinta} \\ \text{prosenttikerroin} &= \frac{10}{100} = 0.10 \\ \text{prosenttiarvo} &= x - 123.00\text{€} = \text{kate} \end{aligned}$$

Siis

$$x - 123.00\text{€} = \frac{10}{100} \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} \text{LHS: kate} \\ \text{RHS: 10\% myynnistä} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad x - 0.1x &= 123.00\text{€} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{123.00\text{€}}{0.9} = 136.67\text{€} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Edellisen esimerkin tapaisissa ongelmissa kokematon laskija yleensä ajattelee, että nyt pitäisi opetella miten lauseke (2.24) muodostetaan. Ei ole vaikeata keksiä, millä valmistuskustannus pitää jakaa lausekkeessa (2.24). Tämän kaltaiset yksinkertaiset ”temput” toimivat hienosti niin kauan, kuin kaikilla tehtävässä esiintyvillä prosenttiluvuilla on sama perusarvo. Kun perusarvoja on monta, tulee temppujen hallinta raskaaksi.

HELPOMMALLA PÄÄSEE seuraavalla periaatteella.

1. Selvitä ratkaistava suure ja merkitse sen arvoa x :llä.
2. tulkitse perusarvo, prosenttiluku ja prosenttiarvo.
3. Kirjoita prosenttiyhtälö käyttäen tehtävässä esiintyviä lukuja ja x :ää.
4. Ratkaise x yhtälöstä.
5. Tulkitse tulos niin, että vastaus on hyvää suomen kieltä ja vastaa tehtävässä esitettyyn kysymykseen.

Kahden luvun vertaaminen

Jos y on $p\%$ suurempi kuin x , niin eroa verrataan ”kuin”-arvoon. Siis

$$\begin{aligned}\text{perusarvo} &= x = (\text{”kuin”-arvo}) \\ \text{prosenttiluku} &= p \\ \text{prosenttiarvo} &= y - x = \text{ero}\end{aligned}$$

$$y - x = \frac{p}{100} \cdot x \Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Jos y on $p\%$ pienempi kuin x , niin eroa verrataan ”kuin”-arvoon. Siis

$$\begin{aligned}\text{perusarvo} &= x = (\text{”kuin”-arvo}) \\ \text{prosenttiluku} &= p \\ \text{prosenttiarvo} &= x - y = \text{ero}\end{aligned}$$

$$x - y = \frac{p}{100} \cdot x \Leftrightarrow y = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Arvon muuttuminen

Olkoon seuraavassa alkuperäinen arvo x ja muuttunut arvo X .

Jos x kasvaa $p\%$, niin muutosta verrataan alkuperäiseen arvoon

$$\begin{aligned}\text{perusarvo} &= x = \text{alkuperäinen arvo} \\ \text{prosenttiluku} &= p \\ \text{prosenttiarvo} &= X - x = \text{muutos}\end{aligned}$$

$$X - x = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad X = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Jos x pienenee $p\%$, niin muutosta verrataan alkuperäiseen arvoon

$$\begin{aligned}\text{perusarvo} &= x = \text{alkuperäinen arvo} \\ \text{prosenttiluku} &= p \\ \text{prosenttiarvo} &= x - X = \text{muutos (plus-merkkisenä)}\end{aligned}$$

$$x - X = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad X = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$$

Olkoot seuraavassa alkuperäiset arvot x ja y ja muuttuneet arvot X ja Y .

Jos x on $p\%$ arvosta y ja x **kasvaa d prosenttiyksikköä**, niin X on $(p + d)\%$ Y :stä.

alkuperäinen	muuttunut
perusarvo = y	perusarvo = Y
prosenttiluku = p	prosenttiluku = $p + d$
prosenttiarvo = x	prosenttiarvo = X

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{100} \cdot y \\ X &= \frac{p+d}{100} \cdot Y \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow d = \frac{X}{Y} \cdot 100 - \frac{x}{y} \cdot 100$$

Jos x on $p\%$ arvosta y ja x **pienenee d prosenttiyksikköä**, niin X on $(p - d)\%$ Y :stä.

alkuperäinen	muuttunut
perusarvo = y	perusarvo = Y
prosenttiluku = p	prosenttiluku = $p - d$
prosenttiarvo = x	prosenttiarvo = X

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{100} \cdot y \\ X &= \frac{p-d}{100} \cdot Y \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow -d = \frac{X}{Y} \cdot 100 - \frac{x}{y} \cdot 100$$

Esimerkki 20 Leipuri leipo0 pullia ja myy ne torilla. Kesä ja heinäkuun katelaskelmat ovat seuraavat

kesäkuu		heinäkuu	
myyntitulo	10 000€	myyntitulo	13 200€
palkkakustannus	−2 500€	palkkakustannus	−2 300€
raaka-ainekust.	−6 000€	raaka-ainekust.	−9 000€
kate	1 500€	kate	1 900€

Nyt katteen muutos prosentteina on

$$\frac{1900 - 1500}{1500} \cdot 100\% = 26,7\%,$$

ja kateprosentin muutos on

$$\frac{1900}{13200} \cdot 100\% - \frac{1500}{10000} \cdot 100\% = -0,61\%.$$

Voimme siis sanoa, että kate kasvoi 26,7 prosenttia ja kate pieneni 0,61 prosenttiyksikköä. (Eli kateprosentti pieneni.)

2.6 Kompleksiluvut

Yhtälöiden ratkaisujen aikana saattaa tulla tilanne, jossa toisen asteen yhtälöllä ei ole reaalisia juuria, mutta yhtälölle löytyy silloin aina kompleksiset juuret. Tavallisten rahalaskujen yhteydessä kompleksisia juuria ei yleensä tuoda esiin juurina, koska niille ei löydy reaalista tulkintaa. On kuitenkin kaksi tilannetta, jolloin on syytä ainakin tietää mitä kompleksiset luvut ovat. (1) Kun käytetään differentiaaliyhtälöitä muutostilmiöiden kuvaamisessa, muodostetaan karakteristinen yhtälö. Jos karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksiset, se merkitsee käytännössä heilahtelevaa ratkaisufunktiota.

(2) Jos ratkaistaan yhtälö tietokoneohjelmalla, niin ohjelmat usein antavat reaalijuuren puuttuessa kompleksiset juuret. Tämä aiheuttaa hämminkiä, jos ei tiedä mitä tulos merkitsee.

Kompleksilukujen esitys imaginääriyksikön avulla. Sovimme seuraavasta merkinnästä

$$\sqrt{-1} = i = \text{imaginääriyksikkö}.$$

Lukua $z = x + iy = x + y\sqrt{-1}$ sanomme kompleksiluvuksi, jonka reaaliosa on x ja imaginaariosa on y . Imaginääriyksikön tärkein ominaisuus, on

$$\boxed{i^2 = -1} \quad (2.25)$$

Kun muistaa kaavan (2.25), kompleksiluvuilla laskeminen sujuu automaattisesti oikein.

Määritelmä 21 Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ reaaliosa on

$$\operatorname{Re} z = x.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ imaginaariosa on

$$\operatorname{Im} z = y.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ liittoluku on

$$z^* = x - iy.$$

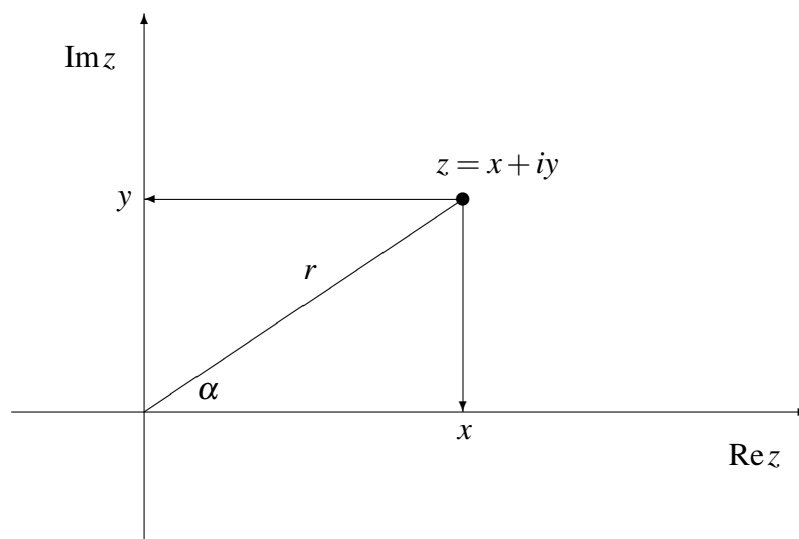
Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ moduli on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ argumentti on

$$\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Kompleksitaso. Kompleksiluku $z = x + iy$ "sijoitetaan" xy -tasoon pisteeseen (x, y) . Jos nyt $r = |z|$ ja $\alpha = \arg z$, niin suoraan kuvasta nähdään, että r on pisteen etäisyys origosta ja α on pisteen paikkavektorin ja x -akselin välinen kulma. Silloin



$$x = r \cos \alpha \quad \text{ja} \quad y = r \sin \alpha$$

Esimerkki 22 Ratkaistaan yhtälö $2x^2 + 4x + 4 = 0$. Juuret saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{4} = -1 \pm i \end{aligned}$$

Ratkaisukaava siis antoi kompleksiset juuret $x_1 = -1 + i$ ja $x_2 = -1 - i$. Juuret toteuttavat yhtälön, sillä

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 4x_1 + 4 &= 2(-1 + i)^2 + 4(-1 + i) + 4 \\ &= 2((-1)^2 - 2i + i^2) + 4(-1 + i) + 4 \\ &= (2 - 4i - 2) + (-4 + 4i) + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2^2 + 4x_2 + 4 &= 2(-1 - i)^2 + 4(-1 - i) + 4 \\ &= 2((-1)^2 + 2i + i^2) + 4(-1 - i) + 4 \\ &= (2 + 4i - 2) + (-4 - 4i) + 4 = 0 \end{aligned}$$

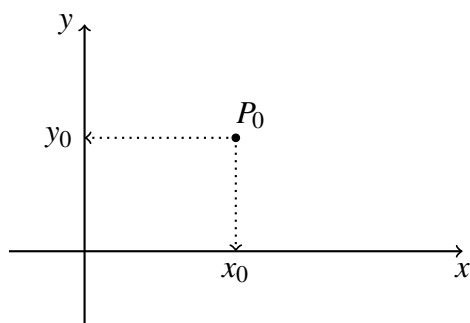
2.7 (x, y) -taso ja suoran yhtälö

Koulusta tuttu (x, y) -taso syntyy, kun taso varustetaan koordinaattiakseleilla eli ristikkäin olevilla lukusuorilla. x -akseli on yleensä vaakasuora ja sen suunta on vasemmalta oikealle. y -akseli on yleensä pystysuora ja sen suunta on alhaalta ylöspäin. Akselit sijoitetaan siten, että ne ovat kohtisuorassa toistensa suhteen. Akselien leikkauspiste on *origo*. Origo on akselien ainoa yhteinen piste ja se on kummankin akselin mitta-asteikon nollakohta.

Jokaisen tason pisteen P_0 paikka voidaan yksikäsitteisesti ilmaista seuraavasti. Piirretään pisteen P_0 kautta pystysuora suora, joka leikkaa x -akselin kohdassa x_0 ja piirretään pisteen P_0 kautta vaakasuora suora, joka leikkaa y -akselin kohdassa y_0 . Merkitsemme

$$P_0 = (x_0, y_0),$$

ja sanomme, että piste P_0 on *kohdassa* x_0 ja *korkaudella* y_0 .



merkintä:	$P_0 = (x_0, y_0)$
sanotaan:	"P_nolla on x_nolla y_nolla"

Suoran yhtälö

Suoralle on koulussa käytetty kahta perusformaattia.

$$y = ax + b, \quad \text{ja} \quad (2.26)$$

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.27)$$

Yhtälö (2.26) on helppo muistaa siitä, että funktion $f(x) = ax + b$ kuvaaja on suora. Toinen suoran yhtälön muoto (2.27) ei ole yhtä tuttu, mutta usein suoran yhtälö tulee esiin juuri tässä muodossa. Siksi on tärkeää tunnistaa se suoran yhtälöksi.

	merkintä:	$y = ax + b$
	sanotaan:	”y on a_x plus b”
merkintä:	$Ax + By + C = 0$	
sanotaan:	”A_x plus B_y + C on nolla”	

Esimerkki 23

$$\begin{aligned} \text{Piste } (x, y) = (4, 9) \text{ on suoran } y &= \frac{3}{2} \cdot x + 3 \text{ piste,} \\ \text{sillä } 9 &= \frac{3}{2} \cdot 4 + 3. \end{aligned}$$

Esimerkki 24

$$\begin{aligned} \text{Piste } (x, y) = (4, 9) \text{ on suoran } -3x + 2y - 6 &= 0 \text{ piste,} \\ \text{sillä } -3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Suoran jyrkkyys, kulmakerroin

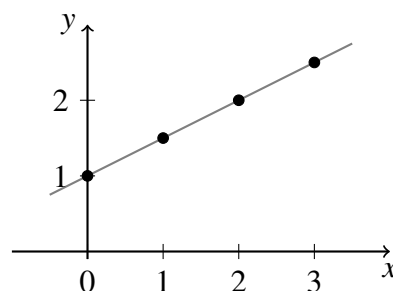
Tarkastellaan ensin suoraa

$$y = ax + b. \quad (2.28)$$

Suoralla on suuri määrä pisteitä. Pisteen $P_0 = (x_0, y_0)$ kohta x_0 voidaan valita vapaasti ja sitä vastaava suoran pisteen korkeus y_0 saadaan sijoittamalla x_0 yhtälöön (2.28) ja ratkaisemalla siitä y .

Esimerkki 25 Lasketaan joukko pisteitä suoralta $y = 0,5x + 1$.

x_k	$y_k = 0,5x_k + 1$	(x_k, y_k)
$x_0 = 0$	$y_0 = 0,5 \cdot 0 + 1 = 1$	$(0,0; 1,0)$
$x_1 = 1$	$y_1 = 0,5 \cdot 1 + 1 = 1,5$	$(1,0; 1,5)$
$x_2 = 2$	$y_2 = 0,5 \cdot 2 + 1 = 2$	$(2,0; 2,0)$
$x_3 = 3$	$y_3 = 0,5 \cdot 3 + 1 = 2,5$	$(3,0; 2,5)$



Kun katsomme esimerkin kuvaa, niin välittömästi huomaa, että kun yhdestä suoran pisteen kohdasta x_i siirrymme 1:n verran oikealle kohtaan $x_i + 1$, niin uudessa kohdassa suoran pisteen korkeus on 0,5:n verran isompi kuin lähtökohdassa. Suoran pisteestä pääsee uuteen suoran pisteeseen, kun siirtyy ”yhden oikealle ja 0,5 ylös”.

Määritelmä 26 Jos suoran yhtälö muutetaan muotoon

$$y = ax + b, \quad (2.29)$$

niin sanomme kerrointa a suoran kulmakertoimeksi. Jos suoran kulmakerroin on positiivinen, niin sanomme, että suora on nouseva. Jos suoran kulmakerroin on negatiivinen, niin sanomme, että suora on laskeva.

Mitä suurempi nousevan suoran kulmakerroin on, sitä jyrkemmin suora nousee. Vastaavasti mitä suurempi laskevan suoran kulmakertoimen itseisarvo on, sitä jyrkemmin suora laskee. Seuraavassa on todettu kaksi suoran kulmakertoimen ominaisuutta. Kumpikin niistä voisi olla kulmakertoimen määritelmä.

Lause 27 Olkoon suoran yhtälö

$$y = ax + b.$$

(1) Jos (x_0, y_0) on suoran piste, niin myös $(x_0 + 1, y_0 + a)$ on suoran piste. Toisin sanoen: kun suoran pisteestä siirrytään

”yksi oikealle ja a ylös”,

niin ollaan taas suoralla.

(2) Jos (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) ovat kaksi suoran pistettä ($x_0 \neq x_1$), niin kulmakerroin a ja vakiotermi b saadaan lausekkeista

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \\ b &= y_0 - ax_0. \end{aligned}$$

(1) Kohdassa $x_1 = x_0 + 1$ pisteen y -koordinaatti on

$$y_1 = ax_1 + b = a(x_0 + 1) + b = (ax_0 + b) + a = y_0 + a.$$

(2)

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 - ax_0}{x_1 - x_0} = a.$$

■

Suora kahden pisteen kautta

Jos tiedämme kaksi suoran pistettä $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $P_1 = (x_1, y_1)$, niin voimme helposti määrittää yhtälön suoralle, joka kulkee annettujen pisteiden kautta.

Sijoittamalla suoran yhtälön perusmuotoon $y = ax + b$ lauseen (27) mukaiset lausekkeet saadaan

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ \Leftrightarrow y &= ax + (y_0 - ax_0) \\ \Leftrightarrow y &= y_0 + a(x - x_0) \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\Leftrightarrow y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{2.31}$$

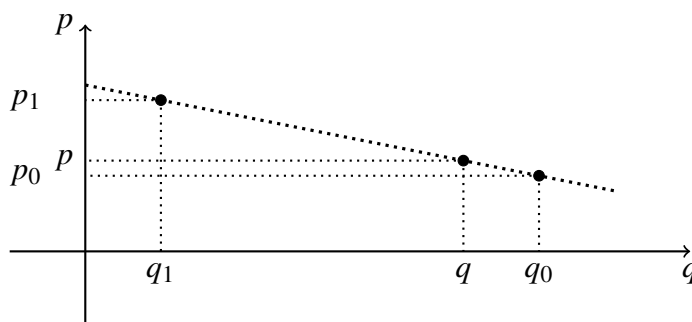
Esimerkki 28 Maanviljelijä M. V. tuo tuotteitaan torille myytäväksi. Porkkanan kysyntä riippuu sen hinnasta. Eri aamuina torilla on eri määrä tuottajia ja heidän torille tuomansa porkkanan kokonaismäärä vaihtelee. Tarkastellaan aamua, jolloin porkkanan kokonaistarjonta torilla on q (kg). Toripäivä alussa maanviljelijä M. V. miettii oikeata kilohintaa p (€/kg) porkkanalle.

Eilen oli ollut hyvä toripäivä. Porkkanaa oli ollut tarjolla q_0 (kg) ja viimeinenkin porkkana saatiin myytyä hintaan p_0 (€/kg) juuri ennen toripäivän päättymistä. Eilinen tarjonta oli reippaasti isompi kuin tänään, eli $q_0 > q$. Tänään ei kannata myydä samalla hinnalla kuin eilen, sillä jos myytäisiin pienempää määrää samalla hinnalla, niin porkkana loppuisi jo iltapäivällä. Maanviljelijän kannalta on hyvä, että kaikki porkkana saadaan myytyä, mutta hieman suuremmalla hinnalla olisi myös saatu kaikki porkkanat myydyksi ja päivän myyntituotto olisi ollut isompi. Maanviljelijä asettaa siis kilohinnan isommaksi kuin p_0 . (Siis: $q < q_0 \Rightarrow p > p_0$)

Kaksi päivää sitten oli myös ollut hyvä toripäivä. Porkkanaa oli ollut tarjolla q_1 (kg) ja viimeinenkin porkkana saatiin myytyä hintaan p_1 (€/kg) juuri ennen toripäivän päättymistä. Toissapäiväinen tarjonta oli reippaasti pienempi kuin tänään, eli $q_1 < q$. Tänään ei kannata myydä samalla hinnalla kuin kaksi päivää sitten, sillä jos myytäisiin isompaa määrää samalla hinnalla, niin suuri osa porkkanoista jäisi myymättä ja maanviljelijän pitäisi kuljetta ne takaisin tilalleen. Tämä lisää työtä ja kasvattaa hävikkiä. Osa porkkanoista saattaa pilaantua. Maanviljelijä toivoo taas, että hieman ennen toripäivän loppumista viimeinenkin porkkanapussi tulee myydyksi, ja sitä varten tulee porkkanakilon hintaa laskea kahden päivän takaisesta. Maanviljelijä asettaa nyt kilohinnan pienemmäksi kuin p_1 . (Siis: $q > q_1 \Rightarrow p < p_1$)

Esimerkki 29 Olkoon edellisen esimerkin eilinen määrä $q_0 = 200\text{kg}$ ja hinta $p_0 = 1,45\text{€/kg}$, ja vastaavasti toissapäiväinen määrä $q_1 = 100\text{kg}$ ja hinta $p_1 = 2,10\text{€/kg}$. Tänään on myynnissä $q = 182\text{kg}$ porkkanaa. Miten asetamme tämän päivän hinnan p ?

Koska $q_1 < q < q_0$, niin edellisen esimerkin perusteella arvelemme, että $p_0 < p < p_1$. Kovin paljon enempää emme sitten voikaan varmuudella sanoa. On kuitenkin järkevää ja käytännössä ”totta” olettaa, että (q, p) -tasoon piirretyt järkevät arvoparit sijaitsevat likimain suoralla



Pisteiden (q_0, p_0) ja (q_1, p_1) kautta kulkevan suoran yhtälöstä saamme arvion

$$\begin{aligned} p &\approx p_0 + \frac{p_1 - p_0}{q_1 - q_0}(q - q_0) \\ &= 1,45\text{€/kg} + \frac{2,10\text{€/kg} - 1,45\text{€/kg}}{100\text{kg} - 200\text{kg}} \cdot (182\text{kg} - 100\text{kg}) = 1,98\text{€/kg} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Huomautus 30 Aloitimme edeltävän esimerkkisarjan toteamuksella, että ”kysyntä q riippuu hinnasta p ”. Nyt kuitenkin kuvan perusteella näyttääkin siltä, että p riippuu q :sta.

Kuluttaja, joka saattaa jättää porkkanapussin ostamatta, jos se on kovin kallis, on edelleen sitä mieltä, että kysyntä riippuu hinnasta. Edellä oleva kuva esittääkin maanviljelijän hinnoitteluprosessia, jossa hinta tulee asettaa mahdollisimman korkeaksi niin, että päivän lopussa kaikki porkkanat on saatu myytyä. Maanviljelijän näkökulmasta kuva antaa hyvän ja havainnollisen kuvan vaihtoehdoista.

Kuluttajakin on tyytyväinen kuvaan, jos kääntää q -akselin pystyyn ja katsoo kuvaa lukien paperia valoa vasten paperin kääntöpuolelta.

2.8 Polynomifunktio

Tässä kappaleessa kertaamme nopeasti koulusta tuttuja asioita. Seuraavassa pääluvussa laajennamme näkökulmaa ja täsmennämme käsitteitä.

Polynomi

Muuttujan x polynomi on muotoa

$$P(x) = c_n x^n + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

oleva lauseke. Polynomi muodostuu siis termeistä, ja jokainen termi on muotoa:

$$+2x^3$$

merkki kerroin potenssi

- merkki on $+$ tai $-$. Ensimmäisen termin $+$ -merkki voidaan jättää merkitsemättä.
- kerroin on luku tai muuttuja. Ykkönen voidaan kertoimena jättää merkitsemättä.
- potenssi on muotoa: muuttuja^{eksponentti}.

Muuttuja on usein x , mutta voi olla jokin toinenkin kirjain. Eksponentti on ei-negatiivinen kokonaisluku. Eksponentti on samalla termin asteluku.

Eksponentti 1 jätetään yleensä merkitsemättä ($x^1 = x$). Samoin astetta 0 oleva potenssi on yksi ja se voidaan jättää merkitsemättä ($5x^0 = 5 \cdot 1 = 5$).

Jos polynomissa on vain yksi termi sitä sanotaan *monomiksi*. Jos polynomissa on kaksi termiä se on *binomi*. Jos polynomissa on kolme termiä se on *trinomi*. Korkeinta astetta olevan termin asteluku (eksponentti) on polynomin asteluku.

Polynomi kerrotaan luvulla siten, että jokainen termi kerrotaan erikseen. Kahden polynomin summa $P_1(x) + P_2(x)$ lasketaan siten, että samaa astetta olevat termit lasketaan yhteen. Kahden polynomin erotus saadaan periaatteessa yhdistämällä edeltävistä. $P_1(x) - P_2(x) = P_1(x) + (-1 \cdot P_2(x))$. Kahden polynomin tulo saadaan periaatteella: ”jokaisella termillä kerrotaan jokainen termi.

Esimerkki 31 Olkoon $P_1(x) = 3x^2 + 1$, ja $P_2(x) = -x^2 + 2x - 1$. Polynomien summa, erotus ja tulo ovat

$$P_1(x) + P_2(x) = (3x^2 + 1) + (-x^2 + 2x - 1) = 2x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} P_1(x) - P_2(x) &= (3x^2 + 1) - (-x^2 + 2x - 1) \\ &= (3x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

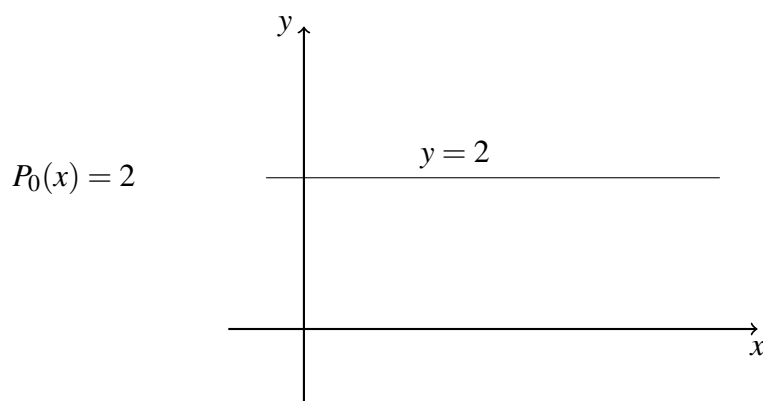
$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot P_2(x) &= (3x^2 + 1) \cdot (-x^2 + 2x - 1) \\ &= 3x^2 \cdot (-x^2) + 3x^2 \cdot 2x + 3x^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-x^2) + 1 \cdot 2x + 1 \cdot (-1) \\ &= -3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x^2 + 2x - 1 = -3x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Edellisen esimerkin laskutehtävät ovat peruskoulutasoa, eikä tällä kurssilla ole aikaa selittää tai harjoitella näitä asioita. Jos huomaat tekeväsi virheitä tämän kaltaisessa laskemisessa, niin ota selvää verkossa olevasta interaktiivisesta harjoitus-materiaalista. Harjoita rutiinia niin, että paineenkin alla koetilanteessa tiedät osaavasi manipuloida lausekkeita oikein.

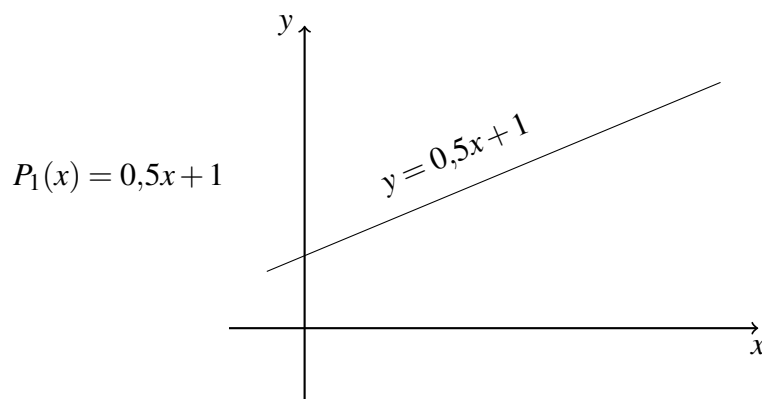
Polynomifunktion kuvaaja

Funktio on laki, joka liittää jokaiseen mahdolliseen kohtaan x vastaavan arvon $y = f(x)$. Kun kaikki (kohta, arvo)-parit piirretään pisteinä (x, y) -koordinaatistoon, saadaan funktion kuvaaja.

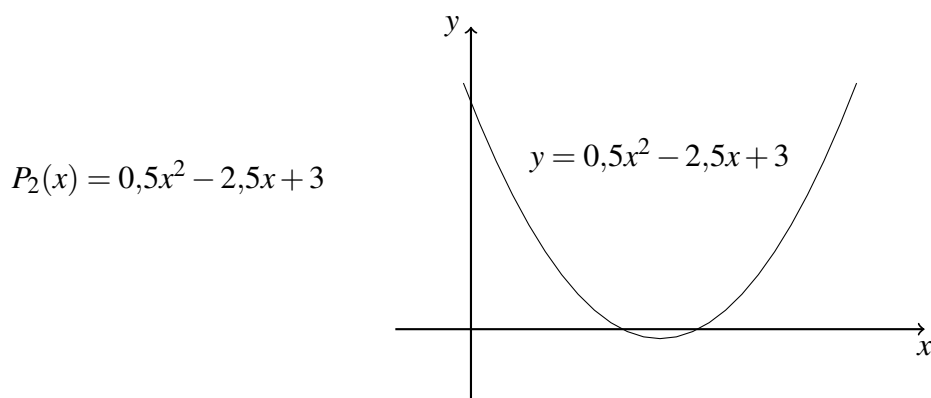
Aste = 0 Jos polynomin aste on nolla, niin siinä on ainoastaan vakiotermi, ja funktio saa vakioarvon. Funktion kuvaaja on vaakasuora.



Aste = 1 Jos polynomien aste on yksi, niin kuvaaja on suora. Suora on nouseva, jos x :n kerroin on positiivinen ja suora on laskeva, jos x :n kerroin on negatiivinen. x :n kerrointa voidaan sanoa kulmakertoimeksi, koska funktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin se on. Jos kulmakerroin eroaa nolasta, niin polynomifunktiolla on yksi nollakohta.



Aste = 2 Jos polynomien aste on kaksi, niin kuvaaja on *paraabeli*. Paraabeli on ylöspäin aukeava, jos toisen asteen termin kerroin on positiivinen ja paraabeli on alaspäin aukeava, jos toisen asteen termin kerroin on negatiivinen.

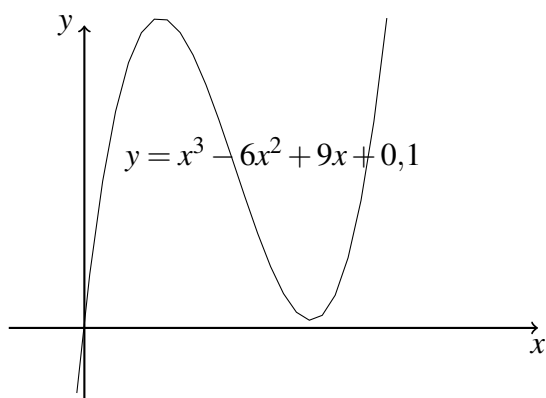


Toisen asteen polynomifunktion kuvaajan hahmottaminen on tarpeen voitonmaksimoinnin yhteydessä. Nollakohtien lukumäärä riippuu diskriminantista. Polynomifunktioon $P(x) = ax^2 + bx + c$ liittyvä diskriminantti on $D = b^2 - 4ac$. Jos diskriminantti on positiivinen, niin funktiolla on kaksi nollakohtaa (paraabeli leikkaa x -akselia kahdessa pisteessä). Jos diskriminantti on nolla, niin funktiolla on yksi nollakohta (eli paraabeli sivuaa x -akselia). Jos diskriminantti on negatiivinen, niin funktiolla ei ole nollakohtia. Kuvaajan kaikki pisteet ovat silloin samalla puolella x -akselia. Huomaa, että paraabeli

on kyllä olemassa, vaikka nollakohtia ei olisikaan.

Aste = 3 Kolmannen asteen polynomifunktiolle ei ole omaa nimeä. Emme tarvitse tämän kurssin aikana kolmannen asteen polynomifunktiota. Hyvään yleissivistykseen kuitenkin kuuluu tietää miltä sen kuvaaja näyttää. Kolmannen asteen polynomifunktiolla on yksi, kaksi tai kolme reaalista nollakohtaa. Joka tapauksessa sillä on ainakin yksi reaalinen nollakohta.

$$P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 0,1$$



Funktio (Käytännöllinen määritelmä)

Jos $y = f(x) = x^2 - 2x$, niin sanomme, että

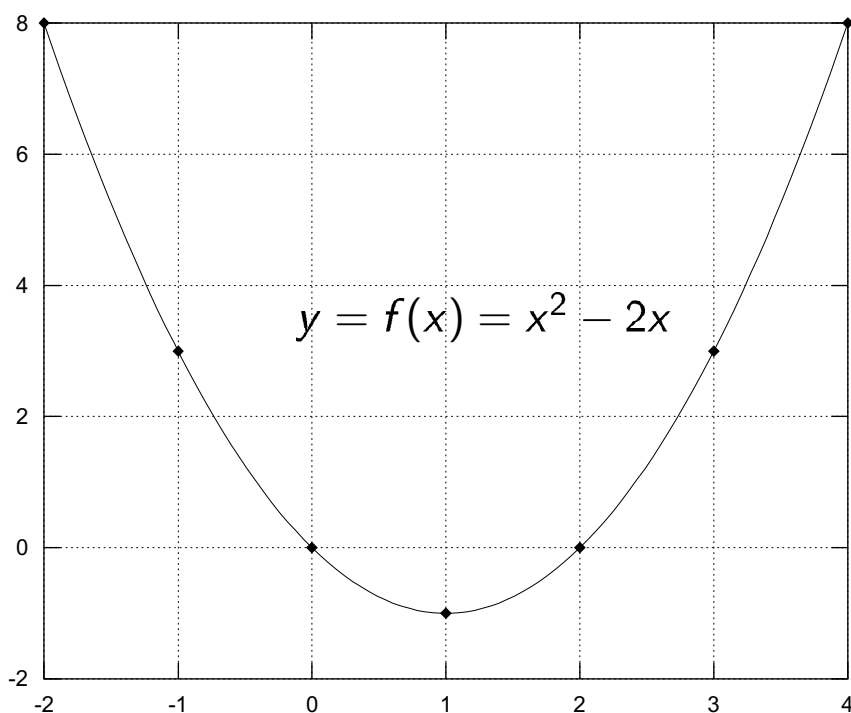
” y on funktion f arvo kohdassa x ”.

Saadaksemme paremman kuvan funktiosta laskemme sen arvoja useassa kohdassa

x	$y = f(x) = x^2 - 2x$	(x, y)
-2	$(-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 8$	$(-2, 8)$
-1	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$	$(-1, 3)$
0	$0^2 - 2 \cdot 0 = 0$	$(0, 0)$
1	$1^2 - 2 \cdot 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	$(2, 0)$
3	$3^2 - 2 \cdot 3 = 3$	$(3, 3)$
4	$4^2 - 2 \cdot 4 = 8$	$(4, 8)$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Funktion kuvaaja



(x, y)
$(-2, 8)$
$(-1, 3)$
$(0, 0)$
$(1, -1)$
$(2, 0)$
$(3, 3)$
$(4, 8)$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

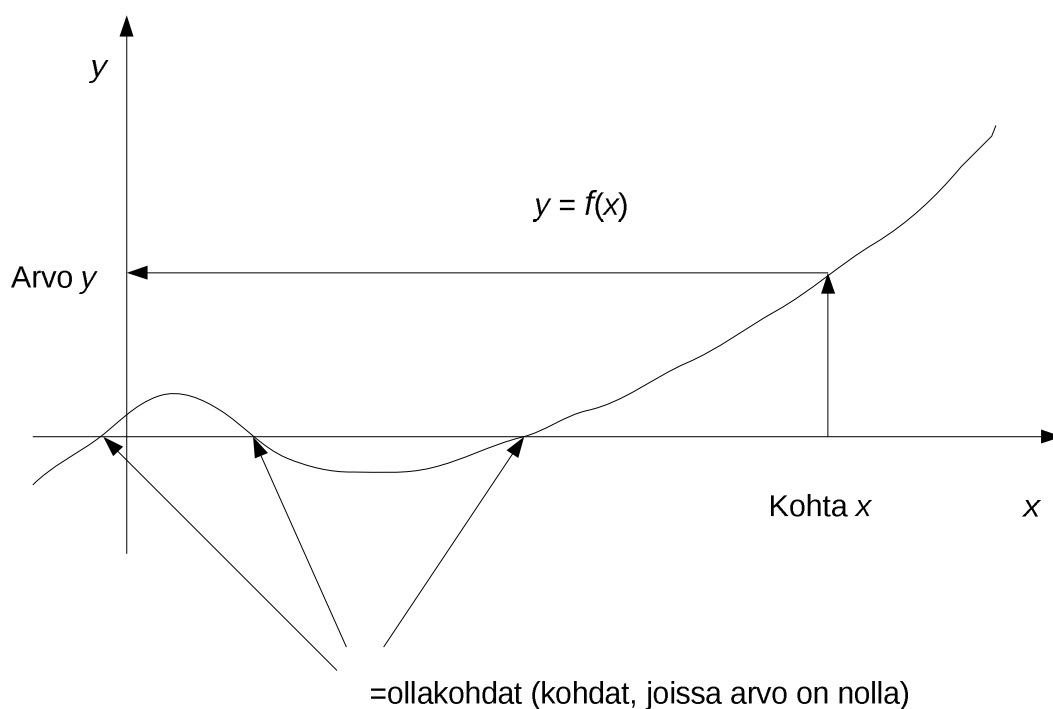
Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

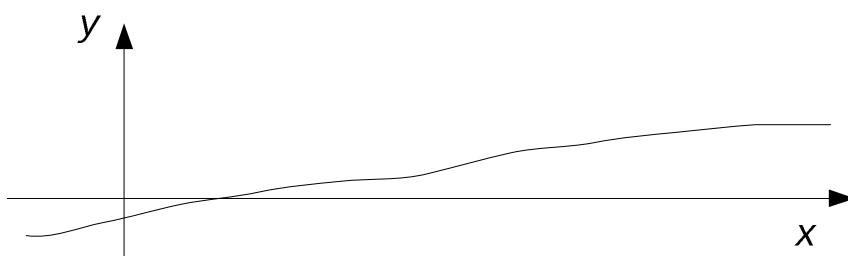
Testi 3

Edellisen funktion nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktio saa arvon nolla. Nollakohdat ratkaistaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{(otsikko-yhtälö)} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= 0 && \text{(mitä se tarkoittaa)} \\ \Leftrightarrow x(x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 2 &&& \text{(juuret)} \end{aligned}$$



Funktion kasvaminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **kasvava**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **aidosti kasvava**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

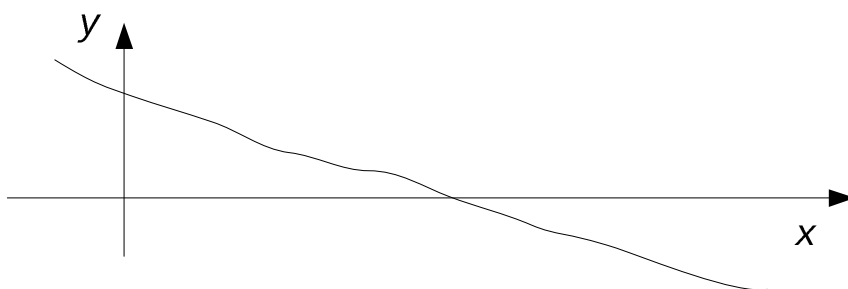
Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion väheneminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **aidosti vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **monotoninen**, jos se on kasvava tai vähenevä välillä (a, b) .

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Esimerkki. (a) Tarkastellaan funktiota

$$y = f(x) = x^2, \quad \text{kun } x \geq 0.$$

Haluamme osoittaa, että f on (aidosti)kasvava määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Olkoot x_1 ja x_2 mitkä tahansa kaksi ei-negatiivista reaalilukua siten, että $x_1 < x_2$. (huom. x_2 ei voi olla 0.) Silloin on olemassa nollaa isompi luku h siten, että $x_2 = x_1 + h$.

Nyt

$$f(x_2) = x_2^2 = (x_1 + h)^2 = x_1^2 + 2hx_1 + h^2 > x_1^2 = f(x_1)$$



(b) Toinen esimerkki olkoon funktio

$$y = g(x) = x^2, \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Tämä funktio ei ole kasvava määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$. Perusteluksi riittää kaksi arvoa, jotka ovat vastoin kasvamisen määritelmää.

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 > 0 = 0^2 = f(0)$$



Lukion terminologia: *maa/kurssi1*/Etälukio.

Kun funktiota $y = f(x)$ käsitellessämme rajoitamme x :n arvot joukkoon A ja y :n arvot joukkoon B , niin sanomme, että

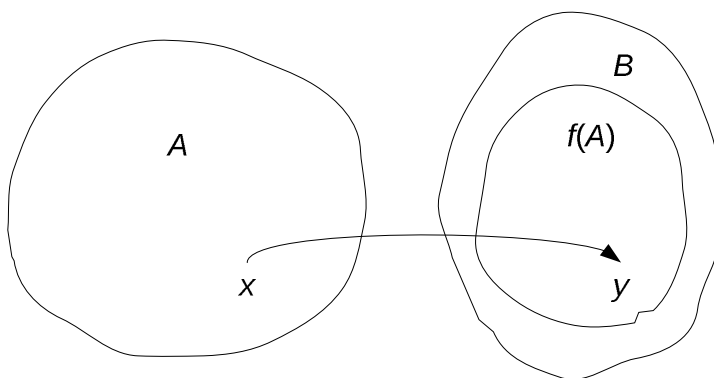
- ▶ A on funktion määrittelyjoukko ($x \in A$).
- ▶ B on funktion maalijoukko ($f(x) \in B$).
- ▶ Jos $f(x) = y$ niin sanomme, että y on x :n kuva (image), ja x on y :n alkukuva (preimage).
- ▶ Kaikki funktion kuvapistet muodostavat arvojoukon $f(A) = \{y \in B \mid y = f(x), \text{ jollakin } x \in A\}$.
 $f(A) \subseteq B$.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Funktio ja kuvaus

Kuvausmerkintä

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x)$$



"Tikkataulusta muistaa", että "arvojen tulee olla maalissa", ja arvojoukko voi olla aito maalijoukon osajoukko.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Yhdistetty funktio

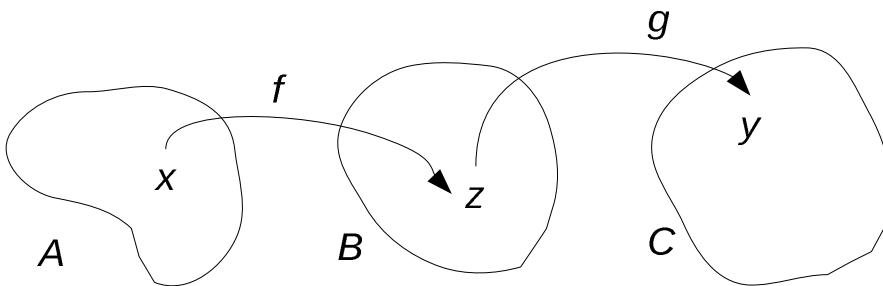
Jos kuvaukset

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B_1, & x &\mapsto z = f(x) \\ g : B_2 &\rightarrow C, & z &\mapsto y = g(z) \end{aligned}$$

ovat hyvin määriteltyjä ja $f(A) \subseteq B_2$, niin kuvaus

$$g \circ f : A \rightarrow C, x \mapsto y = g(f(x))$$

on hyvin määritelty.



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Yhdistetty funktio

Esimerkki. Olkoon

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty), & x \mapsto z = f(x) = x^2 + 1 \\ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, & z \mapsto y = g(z) = \sqrt{z} \end{cases}$$

Silloin

$$g(f(x)) = g(z) = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

yhdistetyn funktion kasvusääntö

sisäfunktio	ulkofunktio	yhdistetty f.
kasvava	kasvava	kasvava
vähenevä	kasvava	vähenevä
kasvava	vähenevä	vähenevä
vähenevä	vähenevä	kasvava

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

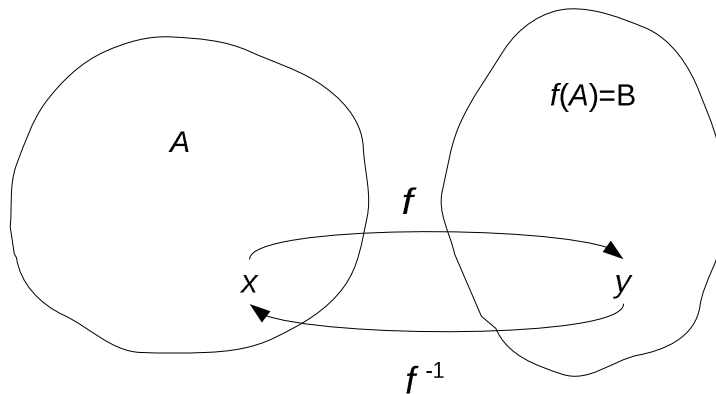
Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x)$$

Jos jokainen $y \in B$ on kuva ($f(A) = B$) ja jokaisella $y \in B$ on täsmälleen yksi alkukuva ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$), niin "kääntämällä nuolet" saamme **käänteiskuvauksen**



$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.
Silloin

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x+10}{x+1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2(x+1)+8}{x+1} = 2 + \frac{8}{x+1} \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \frac{8}{x+1} \\ &\Leftrightarrow x+1 = \frac{8}{y-2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8}{y-2} - 1 = \frac{10-y}{y-2} \end{aligned}$$

Siis

$$f^{-1}(y) = \frac{10-y}{y-2}.$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

(1) Piirrä funktion kuvaaja ja laske funktion nollakohdat:

a) $f(x) = 2x - 8$ b) $g(x) = x(4 - x) + 5$

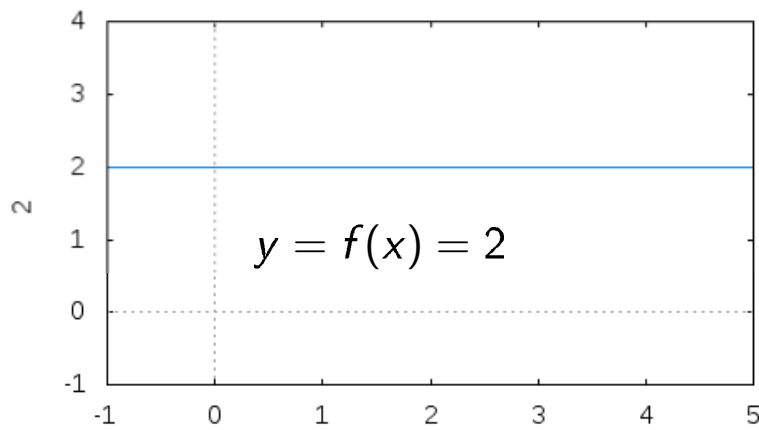
(2) Piirrä funktion kuvaaja ja laske milloin $h(x) = 30$?

$$h(q) = \frac{100}{x} + 2x.$$

(3) Millä x :n arvoilla tehtävien 1 ja 2 funktiot $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ovat kasvavia? (Vastaa piirtämäsi kuvan perusteella.)

(4) Mikä on funktion $y = f(x) = (2x + 10)^{1/2}$, $x > 0$ käänteisfunktio?

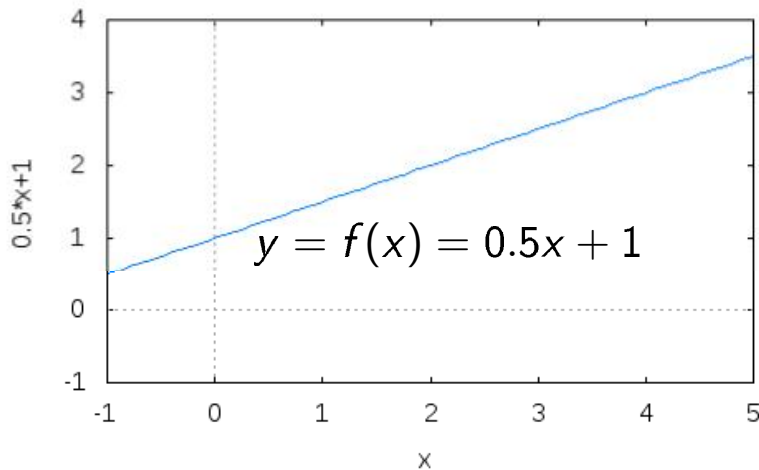
Potenssifunktio



Vakiofunktion

$$y = a$$

kuvaaja on vaakasuora viiva.



Funktion

$$y = kx + b$$

kuvaaja on suora, joka leikkaa y-akselin korkeudella b . Suoran kulmakerroin on k .

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen eksponentti-funktio

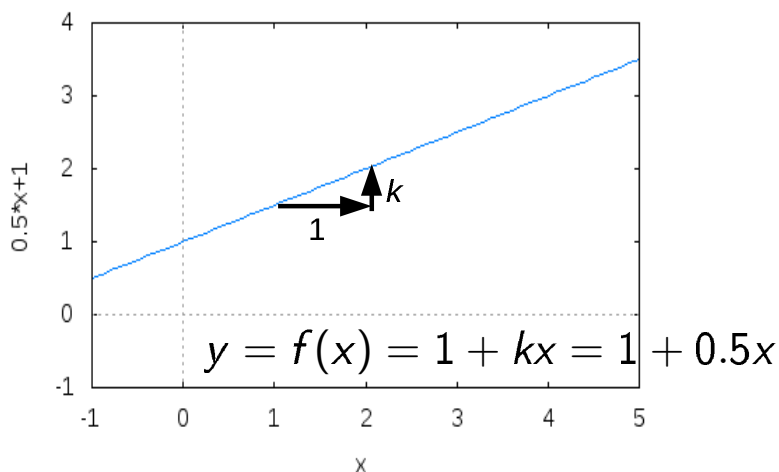
Eksponentti-funktio

a kantainen logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi

Kulmakerroin



Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen eksponentti-funktio

Eksponentti-funktio

a kantainen logaritmi-funktio

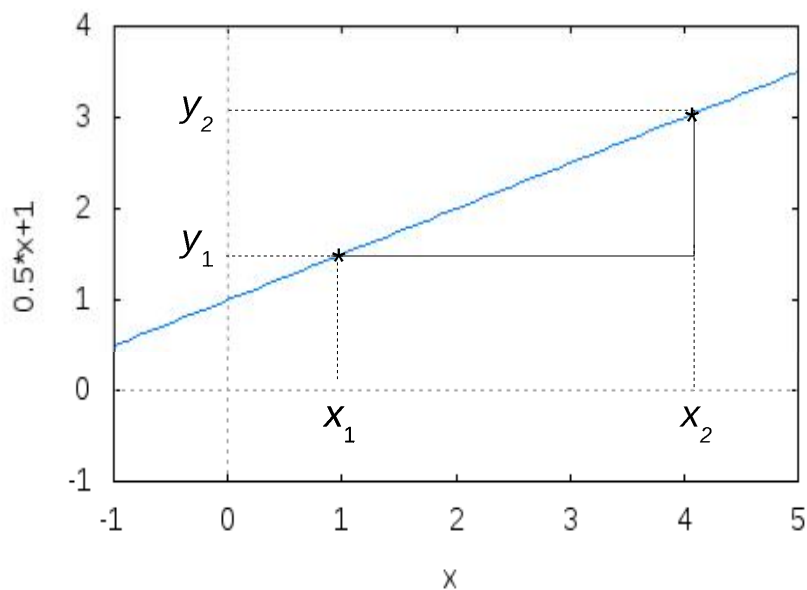
Logaritmikaavat

Testi

Kun suoran pisteestä $(1, 1.5)$ siirrytään pisteeseen $(2, 2)$, niin kohta kasvoi 1:n verran ja arvo kasvoi kulmakertoimen k verran

1 oikealle k ylös

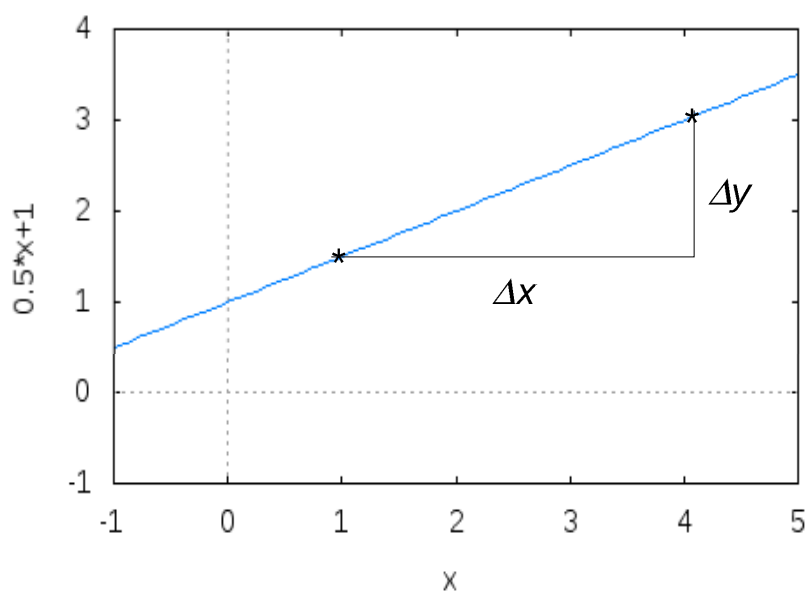
Kulmakerroin



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Kulmakerroin



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

potenssi-funktio

a-kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi

Aiheet

potenssi-funktio

a-kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

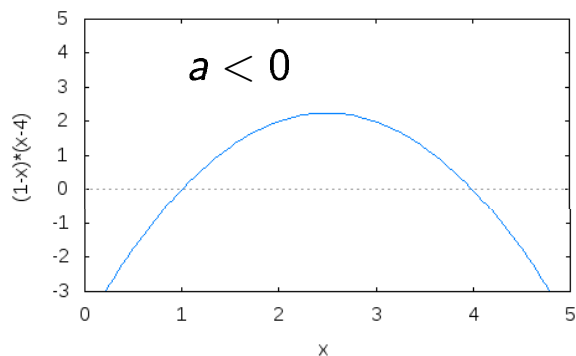
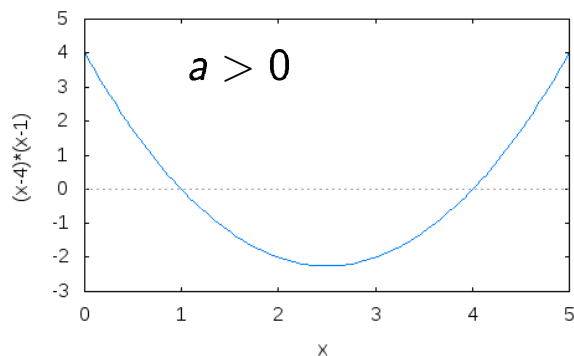
Testi

aste 2, paraabeli

Toisen asteen polynomifunktion

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

kuvaaja on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$, ja aukeaa alaspäin, jos $a < 0$.



Navigation icons: back, forward, search, etc.

aste 3

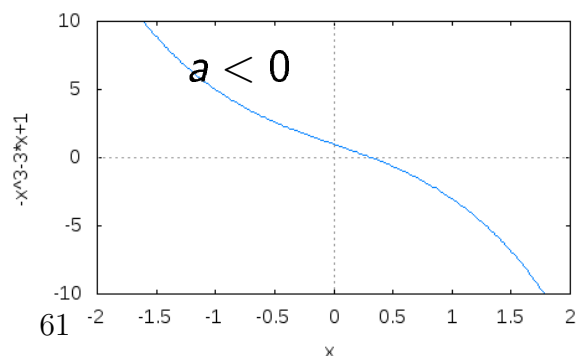
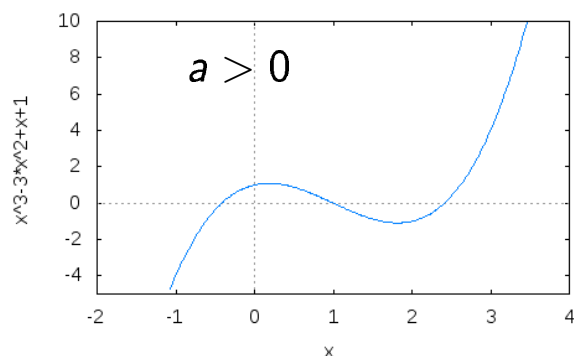
Kolmannen asteen polynomifunktion

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

kuvaaja.

Kun $a > 0$, niin kuvaaja painuu vasemmalla alas ja nousee oikealla ylös. Kaukana origosta $(0,0)$ funktio on kasvava.

Kun $a < 0$, niin kuvaaja nousee vasemmalla ylös ja painuu oikealla alas. Kaukana origosta $(0,0)$ funktio on vähenevä.



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

potenssi-funktio

a-kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

esti

Aiheet

potenssi-funktio

a-kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi

a -kantainen eksponentti-funktio, a^x

Aiheet

potenssi-funktio

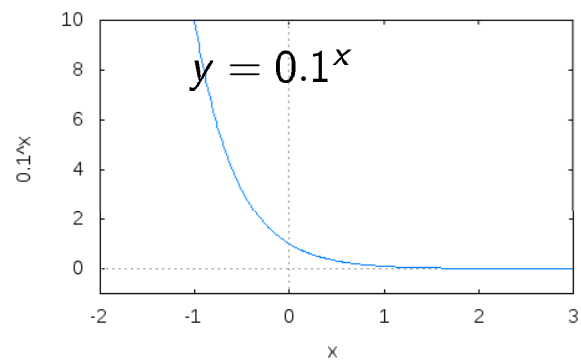
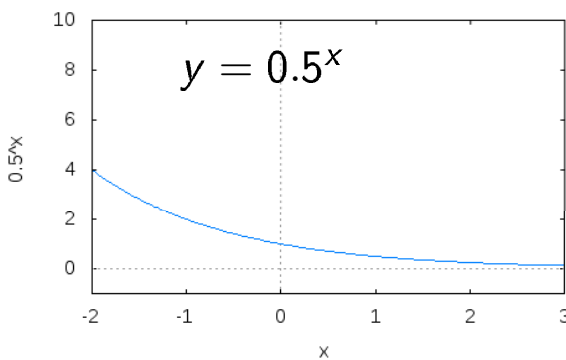
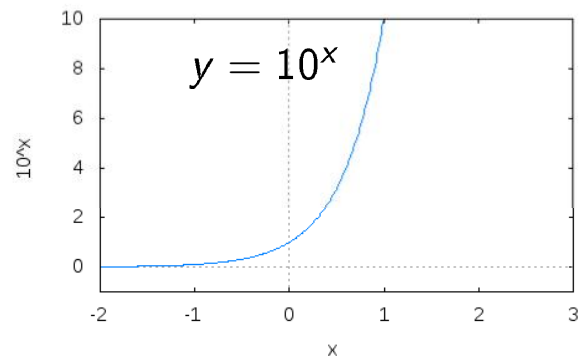
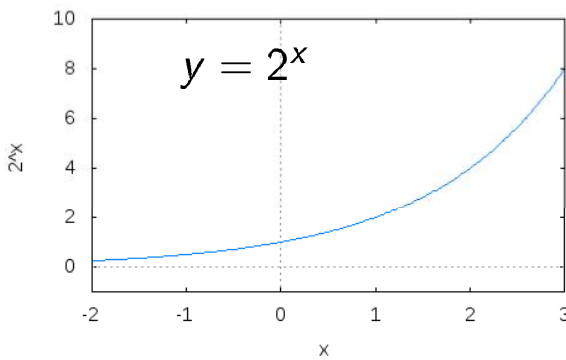
a -kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a -kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi



Navigation icons: back, forward, search, etc.

a -kantainen eksponentti-funktio, a^x

Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a -kantainen
logaritmi-funktio

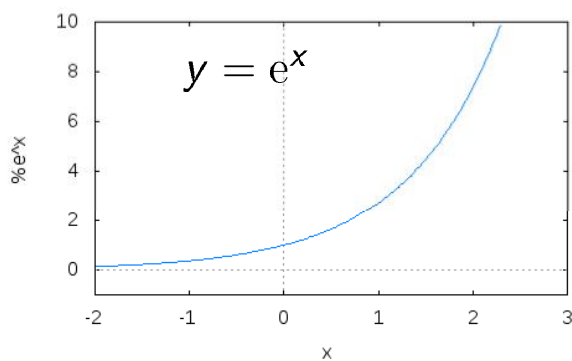
Logaritmikaavat

Testi

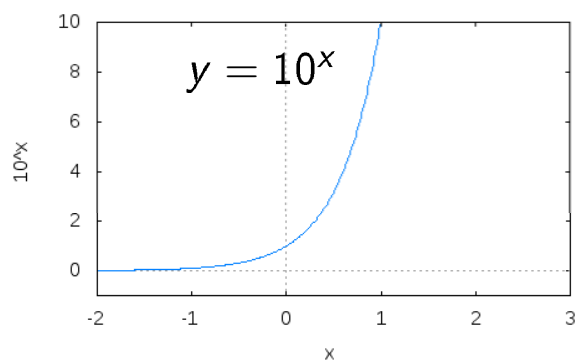
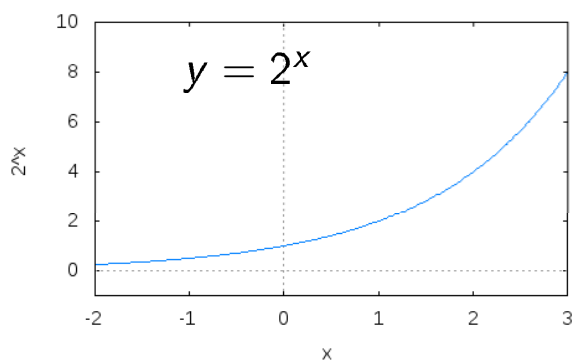
- ▶ Funktio $y = f(x) = a^x$ on hyvin määritelty vain, jos $a > 0$.
- ▶ Jos $a > 1$, niin funktio on kasvava.
- ▶ Jos $a < 1$, niin funktio on vähenevä.
- ▶ Jos $a = 1$, niin funktio on vakiofunktio.
- ▶ Tärkeitä kantalukuja ovat 2, 10 ja $e \approx 2.718281828$ (Neperin luku)
- ▶ Kun $a > 1$, niin a^x kasvaa lopulta nopeammin kuin mikään x :n potenssi x^n
 $\therefore \forall (a > 1, n \in \mathbb{N}), \exists x_0$ siten, että $(x > x_0 \Rightarrow a^x > x^n)$.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

EkspONENTTI-funktio, e^x



kasvavia,
määritelty $\forall x \in \mathbb{R}$,
arvot positiivisia reaalilukuja,



Navigation icons: back, forward, search, etc.

a -kantainen logaritmi-funktio, $\log_a x$

a -kantainen logaritmifunktio on a -kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktio.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y$$

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y = \log y$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \log_e y = \ln y$$

Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen
eksponentti-
funktio

EkspONENTTI-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi

Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen
eksponentti-
funktio

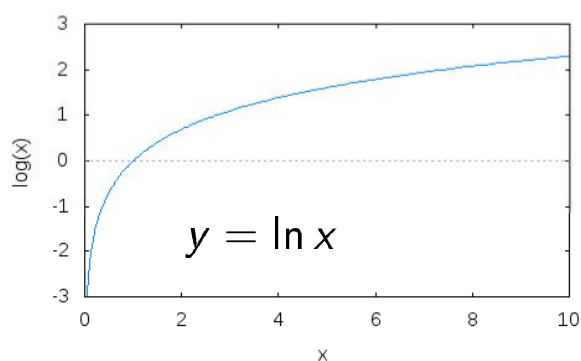
EkspONENTTI-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

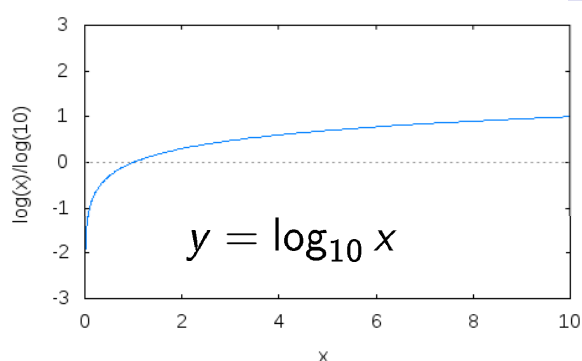
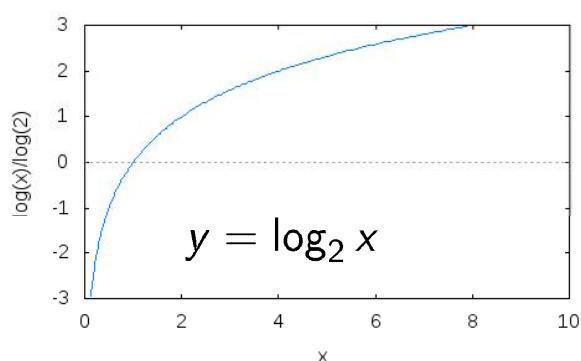
Logaritmikaavat

Testi

a -kantainen logaritmi-funktio, $\log_a x$



kasvavia,
määritelty, kun $x > 0$,
arvojoukko $\mathbb{R}$



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Logaritmikaavat

- (1) $\log_a(a^b) = b$
- (2) $\log_a(a) = 1$
- (3) $\log(1) = 0$
- (4) $\log(b \cdot c) = \log b + \log c$
- (5) $\log(b/c) = \log b - \log c$
- (6) $\log(b^c) = c \cdot \log b$
- (7) $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi

Aiheet

potenssi-funktio

a -kantainen
eksponentti-
funktio

Eksponentti-
funktio

a kantainen
logaritmi-funktio

Logaritmikaavat

Testi

(1) Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, b) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, ($-2 \leq x \leq 2$)

(2) Laske 2-kantainen logaritmi luvusta 1024.

(3) Piirrä funktion $h(x) = x^3 - 3x + 1$ kuvaaja.

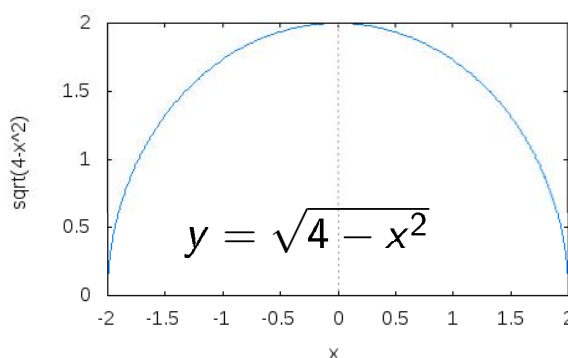
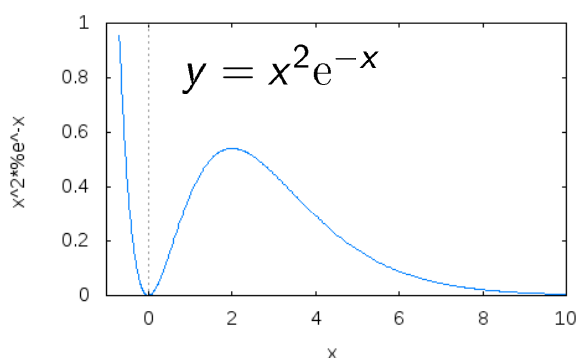
(4) Piirrä funktion $w(x) = \log_2(8x)$ kuvaaja.

(5) Ratkaise

$$\log_2(8x) > 5$$

Vastauksia:

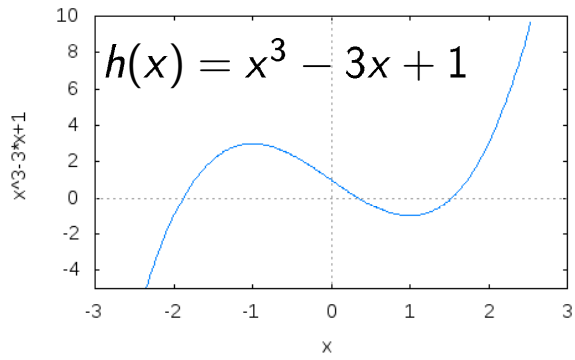
(1)



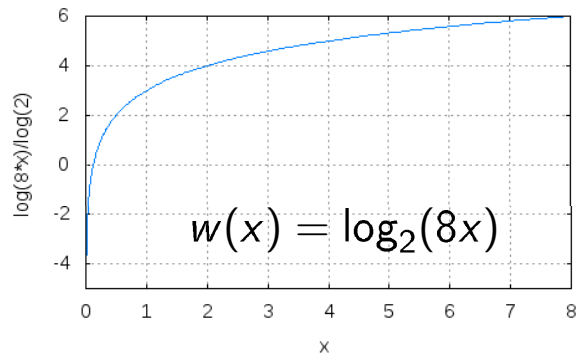
(2)

$$\log_2 1024 = \frac{\ln 1024}{\ln 2} = 10$$

(3)



(4)



(5)

$$\begin{aligned}\log_2 8x &> 5 \\ \Leftrightarrow \log_2 8 + \log_2 x &> 5 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &> 5 - 3 \quad |2^{(\cdot)} \\ \Leftrightarrow x &> 2^2 = 4\end{aligned}$$

Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

arvoa ei voi laskea kohdassa $x = 2$.

Jos x eroaa kahdesta ($x \neq 2$), niin funktion arvo voidaan laskea ja seuraavasta taulukosta nähdään, että arvot ovat sitä lähempänä 4:ää mitä lähempänä x on 2:ta

x	$f(x)$
1.9	3.91
1.99	3.99
1.999	3.999
2.000	–
2.001	4.001
2.01	4.01
2.1	4.1

Asia ilmaistaan merkinnällä

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Lue: "Raja-arvo, kun x lähestyy arvoa 2, lausekkeesta $(x^2 - 4)/(x - 2)$ on 4."

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

Toinen paljon käytetty merkintätapa on

$$f(x) \longrightarrow 4, x \rightarrow 2,$$

tai

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 4.$$

Lue: " $f(x)$ lähestyy 4:ää, kun x lähestyy 2:ta"

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

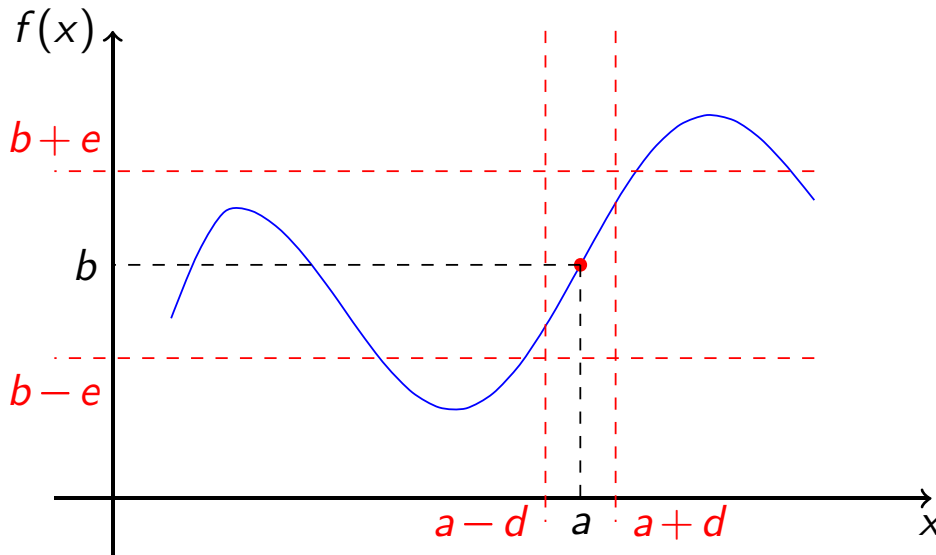
[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

Määritelmä: Funktion $f(x)$ raja-arvo kohdassa a on b (eli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), jos jokaista $e > 0$ kohti on olemassa vastaava $d > 0$ siten, Että

$$(|x - a| < d) \Rightarrow (|f(x) - b| < e).$$



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{1 \cdot (x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)}{1} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 \cdot (x - 3)}{1 \cdot (x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{1} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

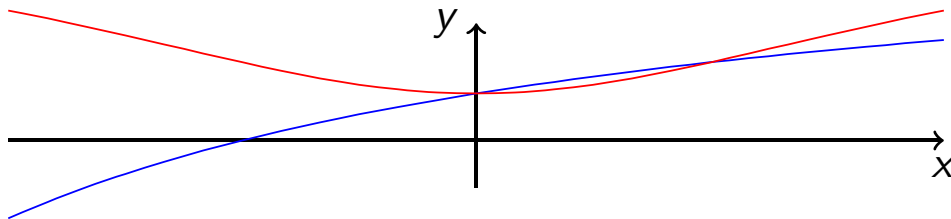
[Polynomifunktion derivaatta](#)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Laske seuraavat raja-arvot

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 5x} \right) =$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 5} \right) =$$



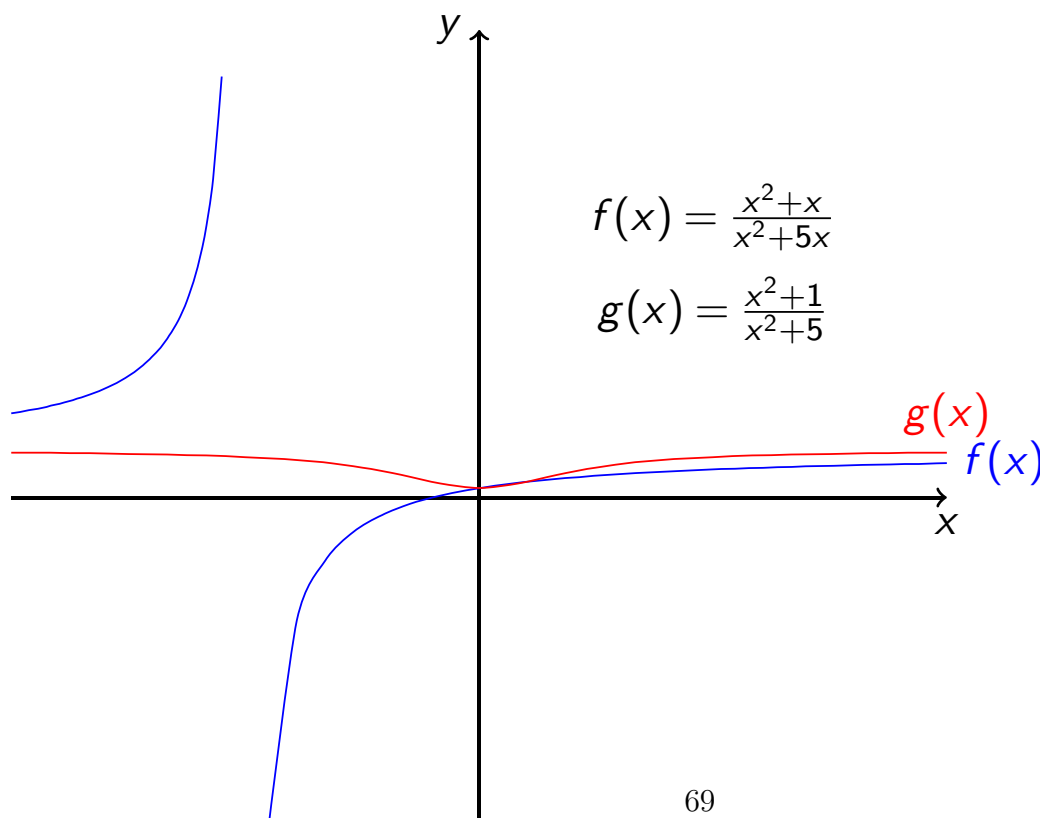
Lisäpohdinta-aihe: Miltä esimerkin funktioiden $f(x) = (x^2 + x)/(x^2 + 5x)$ ja $g(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 5)$ kuvaajat näyttäisivät, jos kuvaajista piirrettisiin isompi alue (esim $-10 < x < 10$)?

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Raja-arvo, harjoitus, jatkuu

7

Lisäpohdinnan tulos



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Linkkejä

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

Aiheet

Linkkejä

Raja-arvo

Jatkuvuus

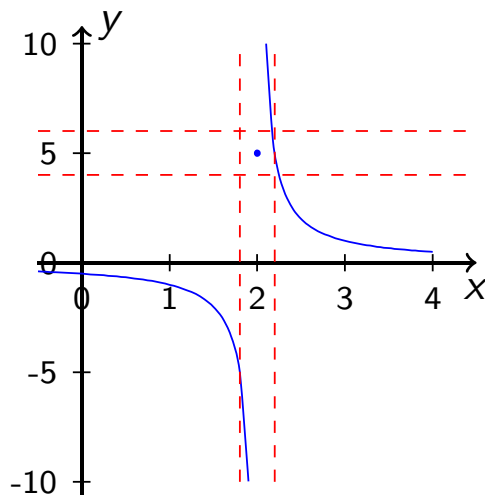
Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

Raja-arvoa ei aina ole olemassa. Esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} f(x) &= \frac{1}{x-2}, \text{ kun } x \neq 2 \\ f(2) &= 5 \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 2$.



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Linkkejä

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

Raja-arvo, olemassaola

9

Edellisen esimerkin perustelu.

Perutelemme väitteen:

Ei ole niin, että: "on olemassa b siten, että kaikilla $e > 0$ on olemassa $d > 0$ niin, että

$$(|x - 2| < d) \Rightarrow (|f(x) - b| < e).$$

perustelemalla vahvemman väitteen: Valitaan $b, e > 0$ ja $d > 0$ miten tahansa, niin aina löytyy sellainen x :n arvo, että $|x - 2| < d$ mutta $|f(x) - b| > e$.

Olkoon $M = |b| + e$. Valitaan $x = \min(2 + \frac{d}{2}, 2 + \frac{1}{2M})$.
Silloin $2 - d < x < 2 + d$ ja

$$f(x) - b = \frac{1}{x-2} - b \geq 2M - b = 2|b| + 2e - b > e$$

Aiheet

Linkkejä

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomifunktion
derivaatta

Määritelmä 1: Funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa $x = x_0$, jos

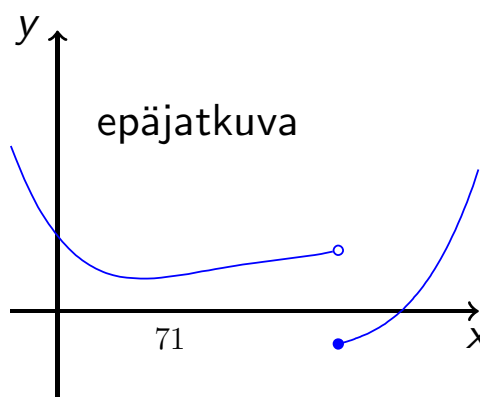
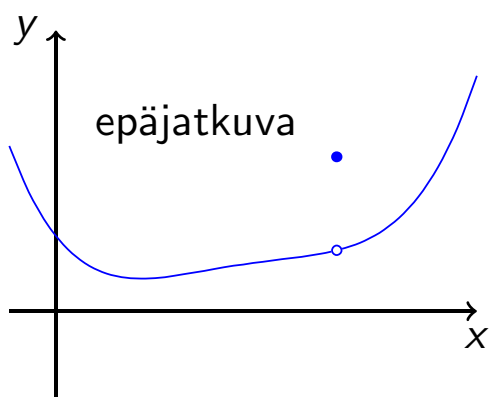
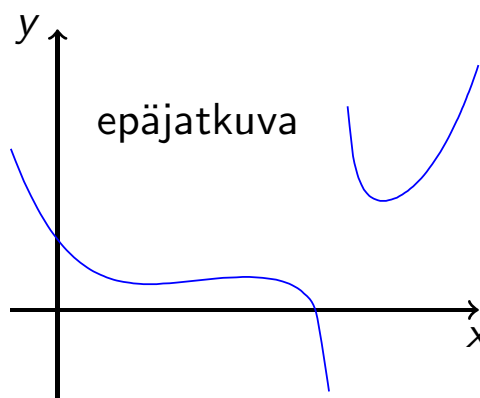
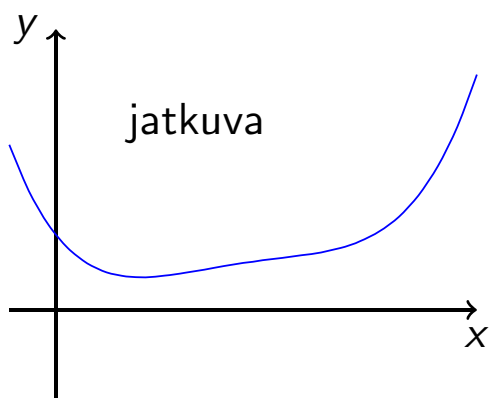
- ▶ funktion arvo kohdassa $x = x_0$, eli $f(x_0)$, on hyvin määritelty (eli laskettavissa)
- ▶ funktion raja-arvo kohdassa $x = x_0$, eli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, on olemassa
- ▶ arvo ja raja-arvo ovat samat, eli

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Määritelmä 2: Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä (a, b) , jos se on jatkuva jokaisessa välin (a, b) kohdassa (pisteessä).

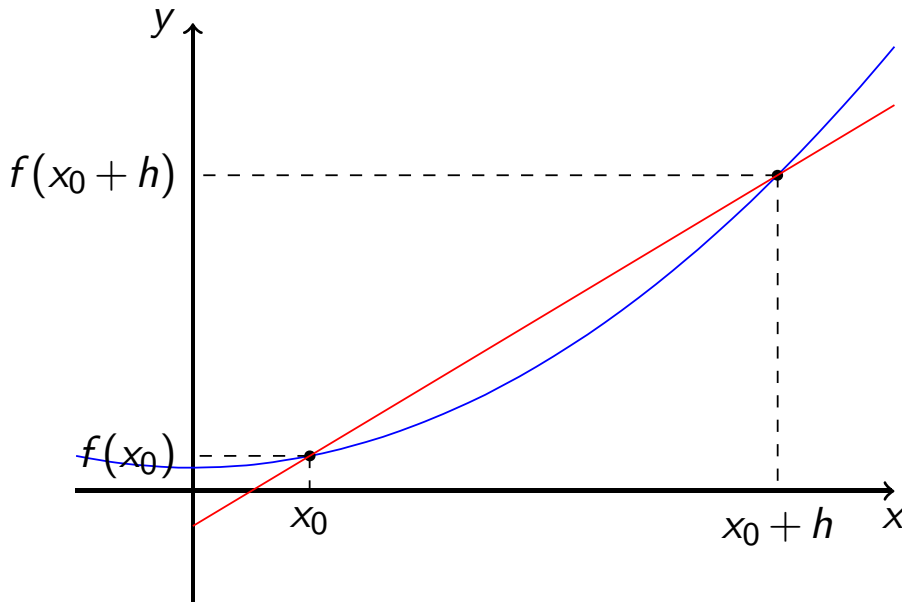
◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Havainnollinen kuvailu: Funktio $f(x)$ on jatkuva, jos sen kuvaaja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista.

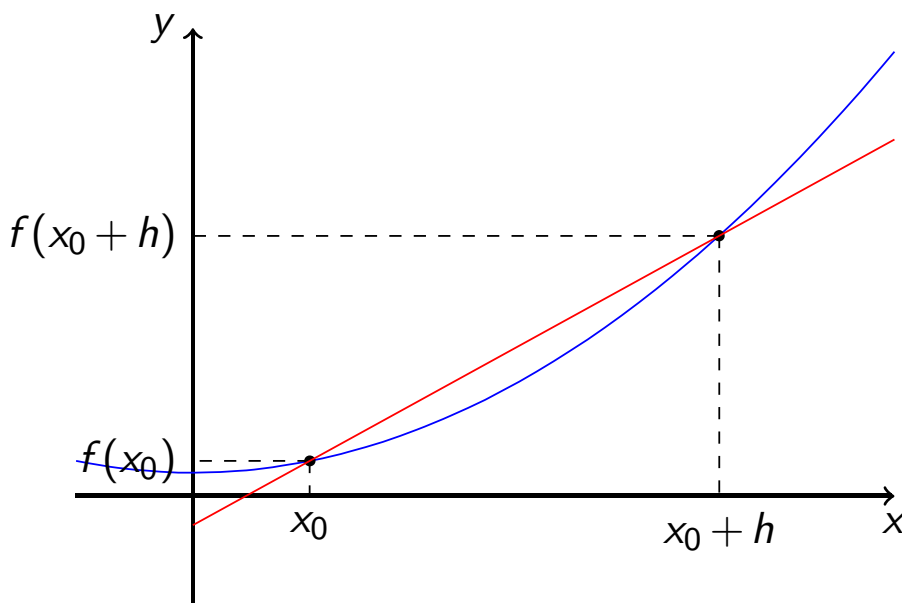


◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

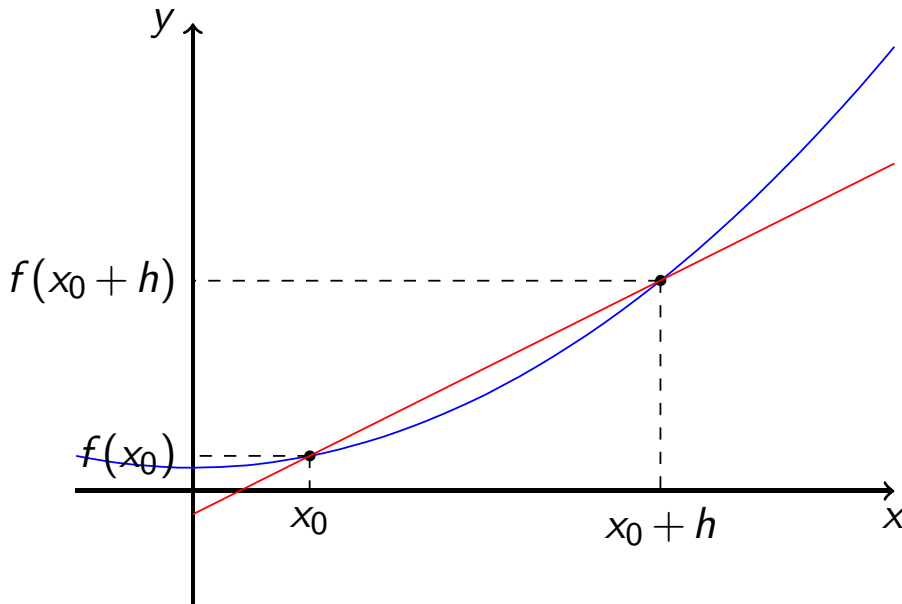
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



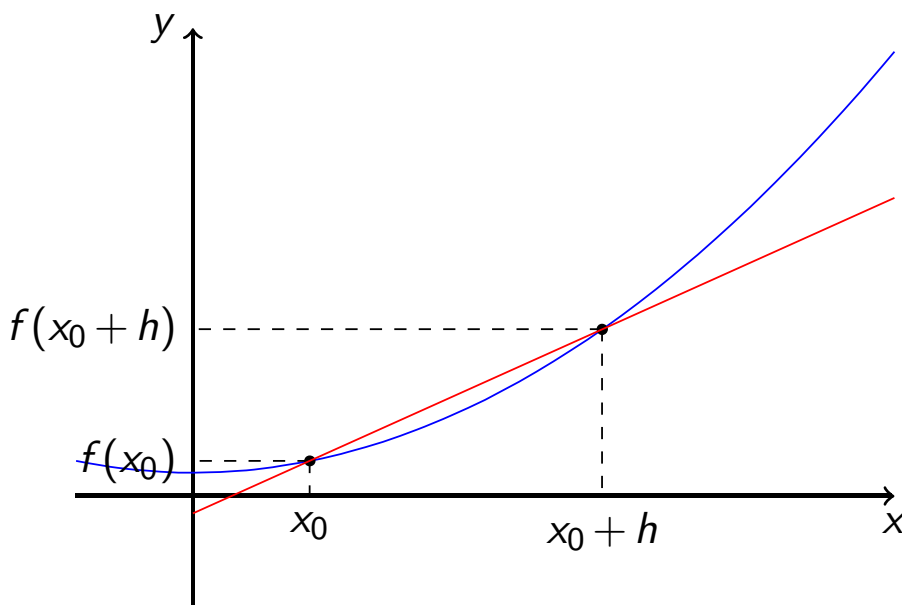
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



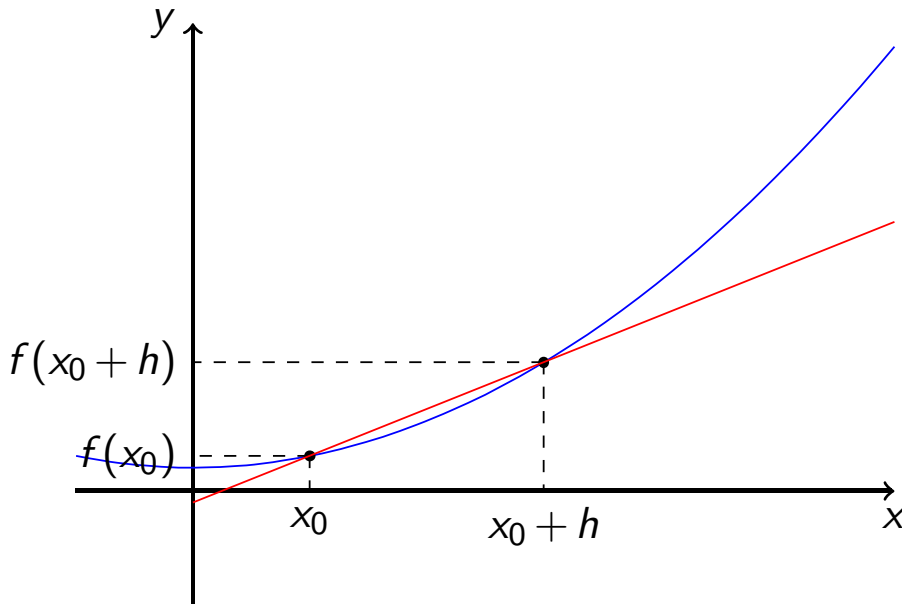
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



Navigation icons: back, forward, search, etc.

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

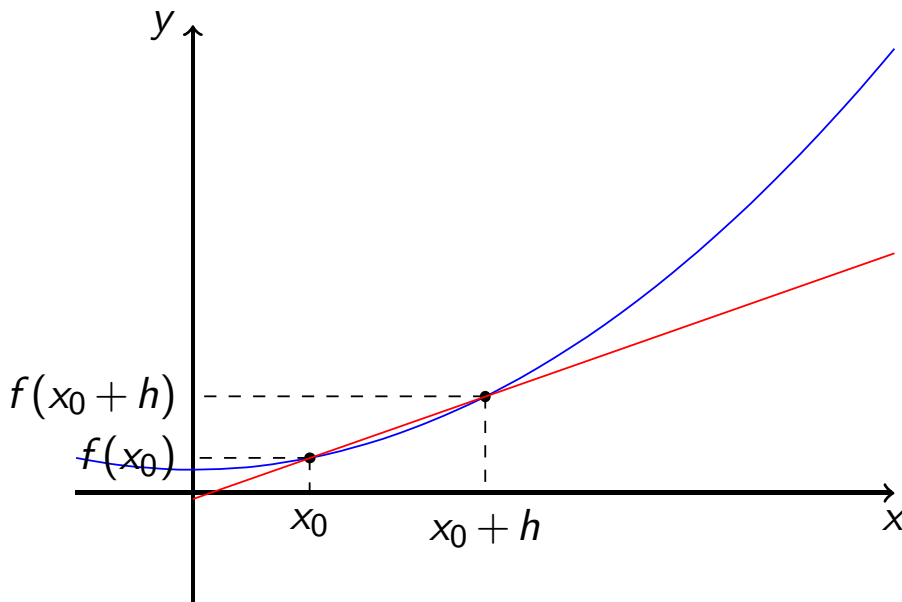
[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



Navigation icons: back, forward, search, etc.

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

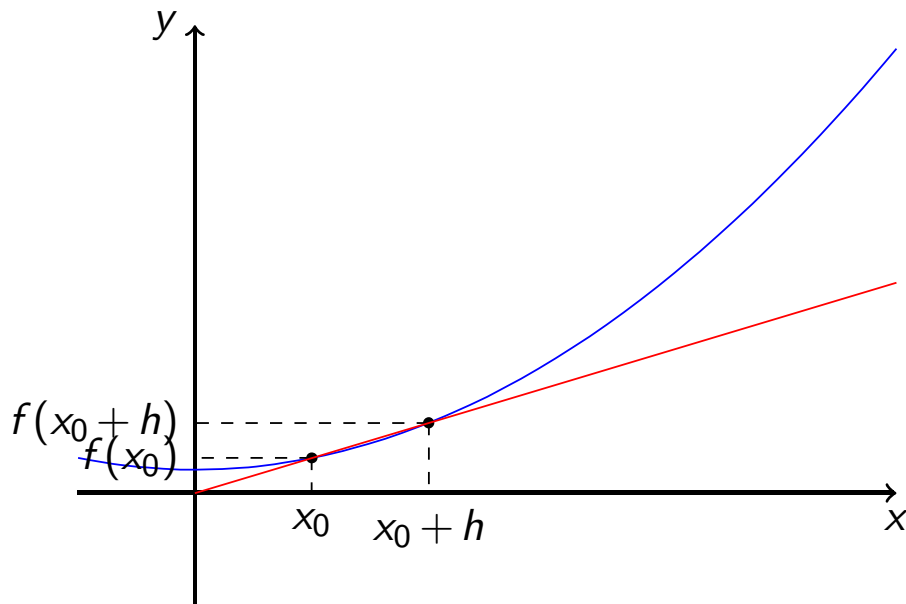
[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

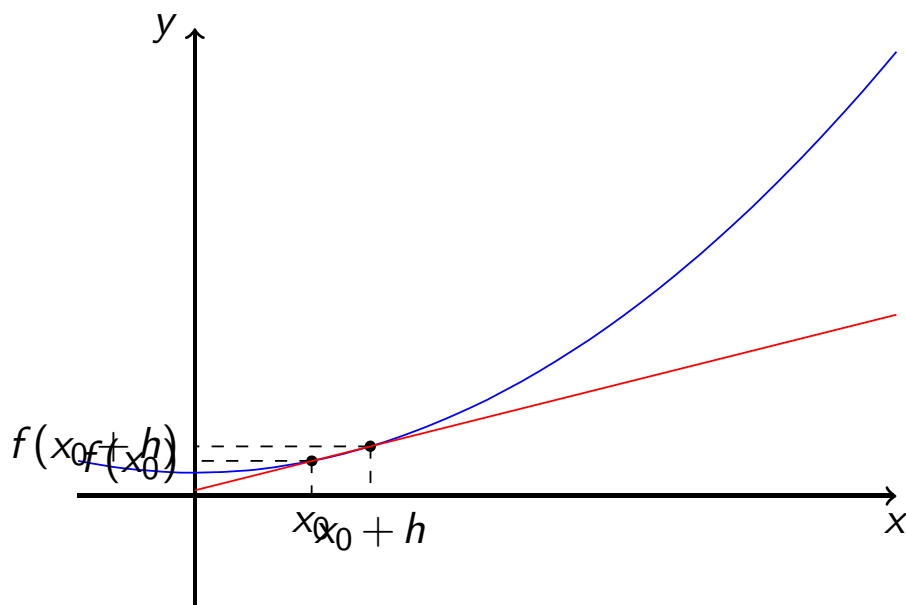
[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

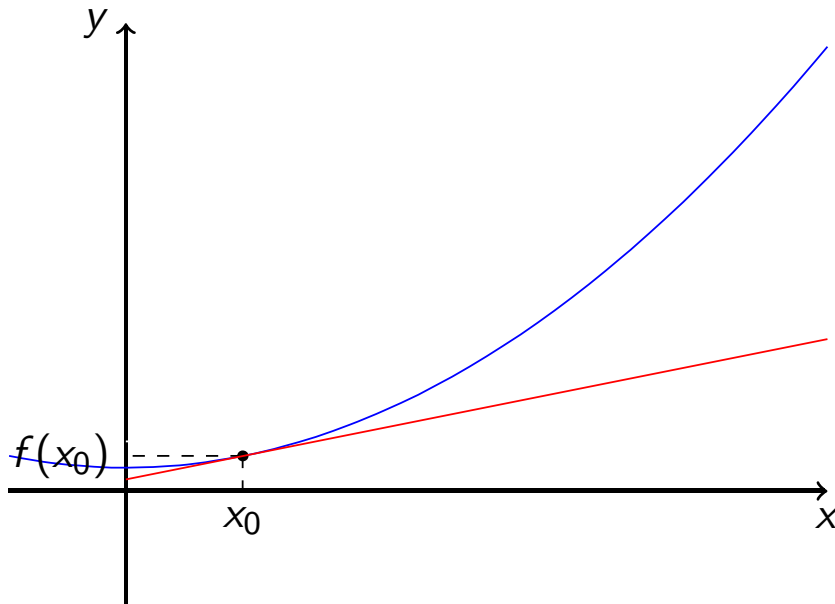
Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on "melkein kuvaajan suuntainen" kohdassa x_0 .



◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

Derivaatta, määritelmä

13

Funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on funktion erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}.$$

Derivaatalle käytetään monia merkintöjä. Jos $y = f(x)$, niin merkinnän $f'(x)$ lisäksi käytetään myös merkintöjä

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, Df(x), Df, \frac{d}{dx} f(x)$$

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion derivaatta](#)

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + 2h^2 - ax_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah) = 2ax_0 \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx}(ax^2) = 2ax$$

Apulause: Jos $n > 0$ on kokonaisluku, niin

$$(x + h)^n = x^n + nhx^{n-1} + hP_n(x, h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} P_n(x, h) = 0$.

Todistus: (1) Väite pitää paikkansa, kun $n = 1$, sillä

$$(x + h)^1 = x^1 + 1 \cdot h \cdot x^0 + h \cdot 0.$$

(2) Toiseksi oletamme, että väite pitää paikkansa, kun $n = 1, 2, \dots, k$, ja osoitamme, että se pitää silloin myös paikkansa, kun $n = k + 1$. Nyt

$$\begin{aligned} (x + h)^{k+1} &= (x + h)(x^k + khx^{k-1} + hP_k(x, h)) \\ &= x^{k+1} + (k + 1)hx^k + h \underbrace{[khx^{k-1} + (x + h)P_k(x, h)]}_{= P_{k+1}(x, h) \rightarrow 0, \text{ kun } h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

□

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta.

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x_0, h) - ax_0^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nax_0^{n-1} + aP_n(x_0, h))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (na x_0^{n-1} + aP_n(x_0, h)) = na x_0^{n-1}
 \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = na x^{n-1}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion
derivaatta](#)

On helppoa ja suoraviivaista osoittaa, että

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

Perustelu. Olkoon $s(x) = f(x) + g(x)$. Silloin

$$\begin{aligned}
 s'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) + g(x_0 + h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right) \\
 &= f'(x_0) + g'(x_0)
 \end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

[Aiheet](#)

[Linkkejä](#)

[Raja-arvo](#)

[Jatkuvuus](#)

[Derivaatta](#)

[Polynomifunktion
derivaatta](#)

Siis: Polynomifunktio derivoidaan termi kerrallaan ja jokainen termi derivoidaan kaavoilla

$$\text{(peruskaava)} \quad \frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$\text{(vakio-x)} \quad \frac{d}{dx}(ax) = a$$

$$\text{(vakio)} \quad \frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x + 7 + 0 = 6x + 7 \quad \square$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20 \quad \square$$

$$(3) \quad h(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 11$$

$$\Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 8x + 2 \quad \square$$

Derivointikaavoja

Funktioita

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x^{1/2}) = \dots$$

Palutui edeltävään kaavaan (EI OMAA KAAVAA)

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Derivointikaavoja

Funktioita

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}e^{ax} = a \cdot e^{ax}$$

$$\left(\frac{d}{dx}a^x = \ln(a) \cdot e^x \right)$$

Logaritmifunktio:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \right)$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

$$\frac{d}{dx}(f(c) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$
$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$\begin{array}{lll} f(x) & = & 5x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 5 \\ g(z) & = & e^z \quad \longrightarrow \quad g'(z) = e^z \end{array}$$
$$\frac{d}{dx}(e^{5x}) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{5x} \cdot 5$$

Derivointikaavoja

Yleisiä

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 2: Olkoon $(5 + x^2)^3 = g(f(x))$, missä

$$f(x) = 5 + x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$$

$$g(z) = z^3 \longrightarrow g'(z) = 3z^2$$

Silloin

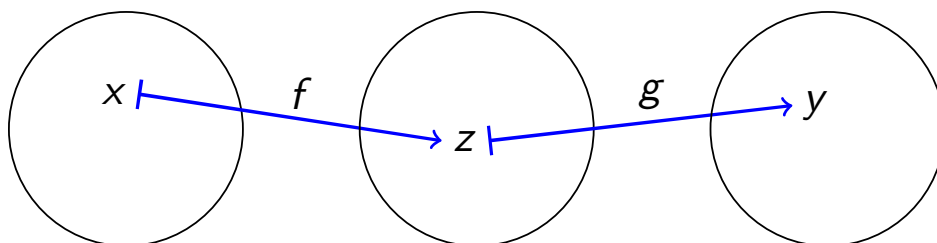
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((5 + x^2)^3) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \\ &= 3(5 + x^2)^2 \cdot 2x = 6x(5 + x^2)^2\end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Derivointikaavoja

Ketjusääntö

$$y = g(z) = g(f(x))$$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g(f(x))) &= \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= g'(z) \cdot f'(x) = g'(f(x))f'(x)\end{aligned}$$

Interpolointi

Aiheet

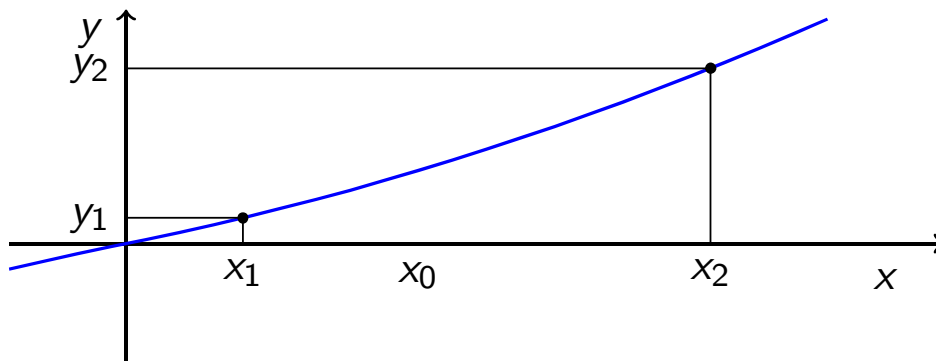
Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

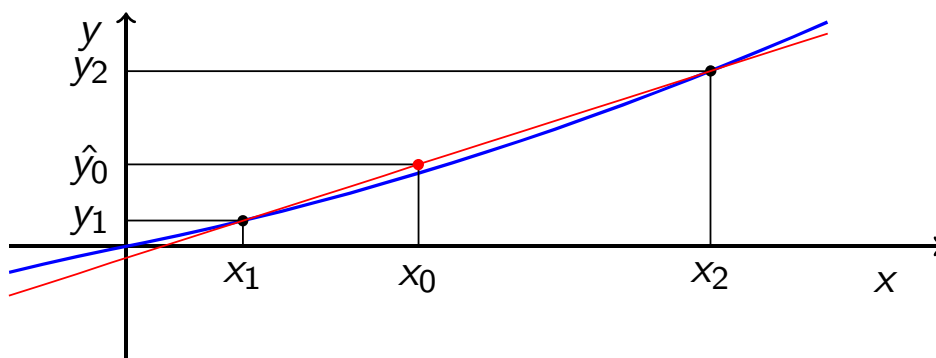
Olkoon $y = f(x)$ funktio, jonka kuvaaja on "melkein suora". Tiedämme funktion f arvot kahdessa kohdassa: $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$. Haluamme arvioida (estimoida) funktion arvoa kohdassa x_0 , joka on kohtien x_1 ja x_2 välissä.



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Interpolointi

Piirretään suora pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja luetaan arvio suoralta



$$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

$$f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)$$

- ▶ Jos $x_1 < x_0 < x_2$, niin kaavan soveltamista sanotaan **interpoloinniksi**.
- ▶ Jos x_0 ei ole kohtien x_1 ja x_2 välissä (eli $x_0 < x_1 < x_2$ tai $x_1 < x_2 < x_0$), niin kaavan soveltamista sanotaan **ekstrapoloinniksi**.
- ▶ Kaava on sama.
- ▶ Ekstrapoloinnissa syntyvä virhe saattaa olla suuri!

Interpolointi

Linearinen kysyntäfunktio

Se hinta p , jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q . Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2) , niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot $(q_1, p_1) = (200\text{kpl/kk}, 12.50\text{e})$ ja $(q_2, p_2) = (250\text{kpl/kk}, 10.00\text{e})$. Jos $q_1 < q < q_2$, niin

$$\begin{aligned} p = f(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\ &= 12.50 + \frac{10.00 - 12.50}{250 - 200}(q - 200) \\ &= 22.50 - 0.05q_{84} \end{aligned}$$

Jousto

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Jos jonkin suureen (esim hinta p) arvon muuttuminen saa aikaan sen, että myös toisen suureen (esim kysyntä q) arvo muuttuu, niin kuvaamme tämän vaikutuksen voimakkuutta joustolla seuraavsti.

y :n jousto x :n suhteen on y :n prosenttimuutos jaettuna x :n prosenttimuutoksella.

$$jousto = \frac{(\Delta y / y) \cdot 100\%}{(\Delta x / x) \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Kysynnän hintajousto (price elasticity of demand) on siis

$$jousto = \frac{q: n \% - \text{muutos}}{p: n \% - \text{muutos}} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Jousto

Esimerkki. Tuotteen kysynnän hintajousto on -1.5 . Hinta on nyt $p = 25.00\text{€}/\text{kpl}$ ja kysyntä on nyt $q = 2200\text{kpl}/\text{kk}$. Miten paljon kysyntä muuttuu, jos hinta nostetaan 28.00 euroon kappaleelta.

$$p = 25.00\text{€}/\text{kpl}$$

$$\Delta p = 28.00\text{€} - 25.00\text{€} = +3.00\text{euro}$$

$$q = 2200\text{kpl}/\text{kk}$$

$$\Delta q = x$$

$$jousto = -1.5$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = jousto$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3\text{€}} \cdot \frac{25.00\text{€}}{2200\text{kpl}/\text{kk}} = -1.5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1.5 \cdot 3\text{€} \cdot 2200\text{kpl}/\text{kk}}{25.00\text{€}} = -396\text{kpl}/\text{kk}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y :n jousto x :n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\begin{aligned} \text{jousto} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\ &= f'(x) \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{1-1/2} \cdot \frac{x}{x^{1/2}} \\ &= \frac{x}{2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto $MR(q)$ kertoo miten paljon tuotto kasvaa, kun q :ta kasvatetaan yhdellä ($\Delta q = 1$)

$$\begin{aligned} MR(q) &= R(q+1) - R(q) \\ &= \frac{R(q+1) - R(q)}{1} \approx \frac{d}{dq} R(q) = R'(q) \end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Ja rajatuotto $MR(q)$ on

$$\begin{aligned} MR(q) &= \frac{d}{dq}(20q - 0.1q^2) \\ &= 20 - 0.2q \end{aligned}$$

HUOMAA:

$$\begin{array}{lcl} p & = & 20 - 0.1q \\ MR & = & 20 - 0.2q \end{array} \quad \longrightarrow \quad MR < p$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$\begin{aligned} MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\ &= \left(\frac{d}{dq}q\right) \cdot p(q) + q \cdot \left(\frac{d}{dq}p(q)\right) \\ &= p + q \cdot \frac{dp}{dq} = p \left(1 + \frac{dp}{dq} \cdot \frac{p}{q}\right) \\ &= p \left(1 + \frac{1}{\text{kh-jousto}}\right) \end{aligned}$$

Normaali tuotteella kysynnän hintajousto on negatiivinen ja

$$MR > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{kh-jousto} < -1$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

Aiheet

Derivointikaavoja

Interpolointi

Jousto

Rajatuotto

5. Sovelluksia talousmatematiikkaan

5.1 Rajasuureet eli marginaaliset suureet.

Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä. Yritys valmistaa kuukaudessa q tuotetta ja myy ne hintaan p (yksikköhinta). Tuotannosta aiheutuu kustannus $C(q)$. Myyntitulo on $R(q) = pq$. Seuraava taulukko sisältää mahdollisen esimerkkitalanteen.

q	$C(q)$	p
100	1000	12,0
101	1005	11,5
102	1010	11,0
103	1016	10,5
104	1022	10,0
105	1029	9,5
106	1036	9,0
107	1044	8,8
108	1052	8,0

Yritys tuottaa nyt 100 tuotetta kuukaudessa ja harkitsee tuotantonsa laajentamista. Tätä varten laajennamme taulukkoa sarakkeilla joissa on myyntitulo $R = pq$ ja kustannuksen lisäys $\Delta C = C(q + \Delta q) - C(q)$ ja myyntitulon lisäys $\Delta R = R(q + \Delta q) - R(q)$ kun tuotantoa lisätään yhdellä $\Delta q = 1$.

q	$C(q)$	ΔC	p	R	ΔR
100	1000	5	12,00	1200,00	6,95
101	1005	5	11,95	1206,95	6,85
102	1010	6	11,90	1213,80	6,75
103	1016	6	11,85	1220,55	6,65
104	1022	7	11,80	1227,20	6,55
105	1029	7	11,75	1233,75	6,45
106	1036	8	11,70	1240,20	6,35
107	1044	8	11,65	1246,55	6,25
108	1052	9	11,60	1252,80	6,15

Jos yritys kasvattaa tuotantoaan yhdellä (100 → 101) niin kustannus kasvaa 5:llä ja tuotto 6,95:llä. Yrityksen kannattaa siis kasvattaa tuotantoaan. Askeleet (101 → 102 → 103 → 104) kannattaa vielä ottaa, mutta arvosta 104 ei tuotantoa enää kannata kasvattaa. Kun tuotanto on 104 aiheuttaa sen kasvattaminen yhdellä kustannuksiin lisäyksen $\Delta C = 7$ ja myyntituloon lisäyksen $\Delta R = 6,55$. Koska kustannus kasvaisi siis enemmän kuin tulo, ei muutosta kannata enää tehdä.

Sanomme, että kustannuksen lisäys, kun tuotantoa kasvatetaan yhdellä on rajakustannus MC (käytetään myös termiä marginaalinen kustannus, marginal cost). Vastaavasti tulon lisäys, kun tuotantoa kasvatetaan yhdellä on rajatulo MR (marginaalinen tulo, marginal revenue).

Kun muutokset ovat pieniä voimme käyttää differentiaalia $MC = \Delta C|_{\Delta q=1} \approx \frac{dC}{dq} \Delta q = \frac{dC}{dq}$.

Siis

$$MC = \frac{dC}{dq} \text{ ja } \Delta C \approx MC \cdot \Delta q$$

$$MR = \frac{dR}{dq} \text{ ja } \Delta R \approx MR \cdot \Delta q$$

$$MR > MC \Rightarrow \text{tuotantoa kannattaa kasvattaa}$$

$$MR < MC \Rightarrow \text{tuotantoa kannattaa pienentää}$$

Jos kustannus riippuu muistakin tekijöistä kuin tuotannon määrästä, mutta haluamme tutkia vain tuotannon määrän vaikutusta *ceteris paribus* (pitäen muut vaikuttavat tekijät vakioina) laskemme rajakustannuksen osittaisderivaattana

$$MC = \frac{\partial C}{\partial q}$$

Teollisessa tuotannossa voidaan sääntönä pitää laskevia rajatuloja ja nousevia rajakustannuksia. Tästä seuraa, että yritykselle on olemassa optimaalinen tuotannon taso (joka riippuu yrityksen kustannusrakenteesta, tuottavuudesta ja markkinoiden (asiakkaiden) kysynnästä).

5.2 Joustot.

Tarkastellaan sementtitehtaan rajatuloa $MR = \frac{dR}{dq}$. Rajatulo voidaan ilmaista erilaisissa yksiköissä: (markkaa/säkki), (\$/tonni), (£/kg) jne. Useimmat muutokset taloudessa on tapana ilmaista suhteellisinä (prosentteina). Tämä johtaa luonnollisella tavalla seuraavaan jouston käsitteeseen.

Olkoon $y = f(x)$. Muuttujan y jousto (elasticity) x :n suhteen on

$$\frac{y:n \text{ suhteellinen muutos}}{x:n \text{ suhteellinen muutos}} = \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \approx \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Jousto on laaduton luku, joten yksiköistä aiheutuva harmi jää pois. Joustolle käytetään kirjallisuudessa ainakin seuraavia merkintöjä

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{Ey}{Ex} = E_x[y] = \varepsilon = \varepsilon_x = \varepsilon_{xy} = \eta$$

Esimerkki: Olkoon q :n jousto p :n suhteen -2. Silloin $\frac{q:n \text{ prosenttimuutos}}{p:n \text{ prosenttimuutos}} = -2$. Jos siis p

kasvaa 5%, niin q pienenee 10%.

Jos y riippuu x :n lisäksi muistakin tekijöistä ja haluamme laskea jouston *ceteris paribus*, laskemme osittaisjouston osittaisderivaatan avulla Seuraava esimerkki valaisee asiaa.

Esimerkki: Naudanlihan kysyntä Q_n riippuu tulotasosta Y , naudanlihan hinnasta p_n ja sianlihan hinnasta p_s seuraavasti

$$Q_n = 4850 - 5p_n + 1,5p_s + 0,1Y.$$

Määritetään naudanlihan kysynnän a) tulojousto, b) hintajousto ja c) ristijousto, kun $Y = 10\,000$, $p_n = 200$, $p_s = 100$.

Kysyntä on siis $Q_n = 4850 - 5 \cdot 200 + 1,5 \cdot 100 + 0,1 \cdot 10\,000 = 5000$.

$$a) E_Y[Q_n] = \frac{\partial Q_n}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{Q_n} = 0,1 \cdot \frac{10\,000}{5000} = +0,2$$

Siis kun tulotaso nousee 1%:n, niin naudanlihan kysyntä nousee 0,2%.

$$b) E_{p_n}[Q_n] = \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \cdot \frac{p_n}{Q_n} = -5 \cdot \frac{200}{5000} = -0,2$$

Siis kun naudanlihan hinta nousee 1%:n, niin sen kysyntä laskee 0,2%.

$$c) E_{p_s}[Q_n] = \frac{\partial Q_n}{\partial p_s} \cdot \frac{p_s}{Q_n} = 1,5 \cdot \frac{100}{5000} = +0,03$$

Siis kun sianlihan hinta nousee 1%:n, niin naudanlihan kysyntä kasvaa 0,03%.

Olkoon kysynnän hintajousto $\eta = E_p[q] = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$. Silloin rajatulolle saadaan lauseke

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(pq) = p + q \frac{dp}{dq} = p \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq} \right) = p \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)$$

Koska kysynnän hintajousto η on negatiivinen, on rajatulo MR pienempi kuin yksikköhinta p .

Esimerkki: a) Olkoon tuotteen kysynnän hintajousto $\eta = -2,5$. Silloin

$$MR = p \left(1 + \frac{1}{-2,5} \right) = 0,6 p \text{ ja rajatulo on positiivinen.}$$

b) Olkoon tuotteen kysynnän hintajousto $\eta = -0,2$. Silloin $MR = p \left(1 + \frac{1}{-0,2} \right) = -4 p$ ja

rajatulo on negatiivinen. Järkevästi toimivalla yrityksellä on siis ilmeisesti kysynnän hintajousto pienempi kuin -1 .

5.3 Kustannus- ja tuottofunktiot, voiton maksimointi.

Yrityksen tuotannon määrästä q riippuvat seuraavat funktiot.

R = tuotto (revenue),

$$R(q) = pq$$

MR = rajatuotto,

C = kustannukset (cost),

MC = rajakustannus,

P = voitto (profit),

$$P = R - C$$

FC = kiinteät kustannukset (fixed cost),

VC = muuttuvat kustannukset (variable cost),

$$C = VC + FC$$

AC = yksikkökustannukset (average VC),

$$AC = C/q$$

AVC = muuttuvat yksikkökustannukset,

$$AVC = VC/q$$

AFC = kiinteät yksikkökustannukset,

$$AFC = FC/q$$

Mikrotalousteoriassa perustellaan nyrkkisääntö, jonka mukaan normaalisti toimivan yrityksen rajakustannukset ovat kasvavia $MC' > 0$ ja rajatuotot väheneviä $MR' < 0$.

Etsimme seuraavassa voittofunktion maksimia (Olettaen, että edellä esitellyt funktiot ovat jatkuvia ja derivoituvia (eli sileitä)).

$$P(q) = R(q) - C(q)$$

$$P'(q) = R'(q) - C'(q) = MR(q) - MC(q)$$

$$P''(q) = MR'(q) - MC'(q) < 0 \Rightarrow \text{voittofunktio on konkaavi}$$

Maksimi löytyy siis derivaatan nollakohdasta eli ääriarvokohta toteuttaa ehdon

$$P'(q) = 0$$

$$\Leftrightarrow MR(q) - MC(q) = 0$$

$$\Leftrightarrow MR(q) = MC(q)$$

Saimme siis klassisen voitonmaksimointikriteerin

$$\text{MR} = \text{MC}$$

$$\text{rajatuotot} = \text{rajakustannukset}$$

Esimerkki: Olkoon tuotteen yksikköhintaa 2 mk ja kustannusfunktio $C(q) = \frac{q^2}{10000} + 500$.

- a) Tuottofunktio on $R(q) = 2q$.
- b) Rajatuotto on $MR(q) = 2$.
- c) Kiinteät kustannukset ovat $FC = C(0) = 500$.
- d) Muuttuvat kustannukset ovat $VC(q) = C(q) - C(0) = q^2/10000$.
- e) Rajakustannukset $MC(q) = q/5000$.
- f) Voitto maksimoidaan, kun

$$MR = MC$$

$$\Leftrightarrow 2 = q/5000$$

$$\Leftrightarrow q = 10\,000$$

- g) Maksimivoitto on $P_{\max} = P(10000) = 2 \cdot 10000 - \frac{10000^2}{10000} - 500 = 9\,500 \text{ (mk)}$

Etsitään seuraavaksi ehto yksikkökustannusten minimille.

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}$$

$$\Rightarrow AC'(q) = \frac{d}{dq} \left(\frac{C(q)}{q} \right) = \frac{MC \cdot q - C}{q^2}$$

$$\Rightarrow AC''(q) = \frac{d}{dq} \left(\frac{MC \cdot q - C}{q^2} \right) = \frac{(MC' \cdot q + MC - MC)q^2 - 2q(MC \cdot q - C)}{q^4}$$

Merkitään q^* :llä yksikkökustannusfunktion derivaatan nollakohtaa. Siis

$$AC'(q^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow MC(q^*) \cdot q^* = C(q^*)$$

$$\Leftrightarrow MC(q^*) = \frac{C(q^*)}{q^*}$$

$$\Leftrightarrow MC(q^*) = AC(q^*) \Leftrightarrow \text{rajakustannus} = \text{yksikkökustannus}.$$

Kohdassa q^* on $AC''(q^*) = MC'(q^*)/q > 0$ joten kohdassa on AC :n minimi.

Esimerkki: Tarkastellaan uudelleen edellistä esimerkkiä. Tuotteen yksikköhinta 2 mk ja kustannusfunktio $C(q) = \frac{q^2}{10000} + 500$. Millä tuotantomäärällä saavutetaan pienin yksikkökustannus ja mikä on silloin voitto?

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q}{10000} + \frac{500}{q} \text{ ja}$$

$$MC(q) = \frac{q}{5000}$$

Siis yksikkökustannusten minimi saadaan, kun

$$\begin{aligned} MC = AC &\Leftrightarrow \frac{q}{5000} = \frac{q}{10000} + \frac{500}{q} \\ &\Leftrightarrow q^2 = 5\,000\,000 \\ &\Leftrightarrow q \approx 2236 \end{aligned}$$

Voitto on nyt $P(2236) = 2 \cdot 2236 - \frac{2236^2}{10000} - 500 = 3472$, mikä on huomattavasti

vähemmän

kuin edellisen esimerkin antama maksimivoitto. Voiton maksimointi on siis eri asia kuin yksikkökustannusten minimointi. Se, että maksimivoitto saadaan tuotannolla, joka on kaukana yksikkökustannusten minimikohdasta viittää siihen, että tuotantokoneistoa kannattaisi uusia.

Esimerkki: Olkoon yrityksen valmistaman tuotteen kysyntäfunktio $p = 10 - q/50$ ja yksikkökustannukset $AC(q) = 20/q + 3 + 0.5q$. Maksimoi voitto.

$$\begin{aligned} R(q) &= pq = (10 - q/50)q = 10q - q^2/50 \\ \Rightarrow MR &= 10 - 2q/50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(q) &= q \cdot AC(q) = q(20/q + 3 + 0.5q) = 20 + 3q + q^2/2 \\ \Rightarrow MC &= 3 + q \end{aligned}$$

Voiton maksimointikriteeri:

$$MR = MC$$

$$\Leftrightarrow 10 - \frac{2q}{50} = 3 + q$$

$$\Leftrightarrow 7 = \frac{52}{50}q$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{50}{52} \cdot 7 \approx 6,73$$

Tällöin hinta on $p \approx 10 - 6,73/50 \approx 9,87$ ja voitto on

$$P(q) = R(q) - C(q) = 10q - q^2/50 - (20 + 3q - q^2/2)$$

$$= 7q - \frac{26}{50}q^2 - 20 \approx 3,56$$

Esimerkki: Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrän $q = 150$ ja saa sen markkinoitua kappalehintaan $p = 18$ mk. Kysynnän hintajousto on $E_p[q] = \varepsilon = -3$. Kustannusfunktio on $C(q) = 200 + 2q + 0,1q^2$.

a) Laske voitto.

b) Maksimoi voitto, kun oletetaan, että kysyntäfunktio on lineaarinen.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad R(q) &= pq = 18 \cdot q & \Rightarrow R(150) &= 18 \cdot 150 = 2700 \\ C(q) &= 200 + 2q + 0,1q^2 & \Rightarrow C(150) &= 200 + 2 \cdot 150 + 0,1 \cdot 150^2 = 2750 \\ P &= R - C = 2700 - 2750 = -50 \end{aligned}$$

b) Kysyntäfunktio on lineaarinen, eli muotoa $p = a + bq$, missä a ja b ovat numerovakioita. Määritämme ensin kertoimet a ja b .

Selvästi $\frac{dp}{dq} = b$, joten $\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{b} \cdot \frac{p}{q}$. Sijoittamalla arvot tähän yhtälöön,

saadaan

$$-3 = \frac{1}{b} \cdot \frac{18}{150} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{25}$$

Kun muuttujien p ja q sekä vakion b arvot sijoitetaan kysyntäfunktion määrittelevään yhtälöön saadaan

$$p = a + bq \xrightarrow{\text{sij.}} 18 = a - \frac{1}{25} \cdot 150 \Leftrightarrow 18 = a - 6 \Leftrightarrow a = 24$$

Siis $p = 24 - q/25$.

$$R(q) = pq = (24 - q/25)q = 24q - q^2/25$$

$$MR(q) = \frac{dR}{dq} = 24 - \frac{2}{25} \cdot q$$

$$C(q) = 200 + 2q + 0,1q^2$$

$$MC(q) = \frac{dC}{dq} = 2 + \frac{2}{10}q$$

Voiton maksimointikriteeri:

$$MR = MC$$

$$\Leftrightarrow 24 - \frac{2}{25}q = 2 + \frac{2}{10}q$$

$$\Leftrightarrow 22 = \frac{14}{50}q$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{50}{14} \cdot 22 = \frac{1100}{14} \approx 79$$

Optimaalinen tuotantomäärä on siis noin 79 tuotetta kuukaudessa. Voitto on tällöin

$$P(q) = R(q) - C(q) = (24q - q^2/25) - (200 + 2q + q^2/10) = 22q - \frac{7}{50}q^2 - 200$$

$$\Rightarrow P(79) = 22 \cdot 79 - \frac{14}{50} \cdot 79^2 - 200 \approx 664.$$

Esimerkki: Yrityksen tuotannosta tiedämme, että yksikkökustannukset ovat pienimmillään, kun $q = 200$, kiinteät kustannukset ovat $FC = 800$ mk ja rajakustannus on 12 mk, kun tuotantomäärä on 250.

a) Määritä se kustannusfunktio, joka on toisen asteen polynomifunktio ja jolla on edellä mainitut ominaisuudet.

b) Maksimoi voitto, kun koko tuotanto saadaan markkinoitua 12 mk hintaan.

a) Siis määritämme vakiot a ja b kustannusfunktiossa $C(q) = aq^2 + bq + 800$.

$$\text{Rajakustannus} = MC(q) = \frac{dC}{dq} = 2aq + b$$

$$\text{Yksikkökustannus} = AC(q) = \frac{C}{q} = aq + b + \frac{800}{q}$$

Yksikkökustannusten minimikohdassa $MC = AC$, joten

$$MC(200) = AC(200)$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot 200 + b = a \cdot 200 + b + \frac{800}{200}$$

$$\Leftrightarrow 400a = 200a + 4$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$$

Toisaalta

$$MC(250) = 12$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{50} \cdot 250 + b = 12$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

Siis

$$C(q) = \frac{1}{50} \cdot q^2 + 2q + 800$$

b) $R(q) = pq = 12q$

$$MR(q) = 12$$

$$C(q) = \frac{1}{50} \cdot q^2 + 2q + 800$$

$$MC(q) = \frac{2}{50} \cdot q + 2$$

Voiton maksimointikriteeri:

$$MR = MC$$

$$\Leftrightarrow 12 = \frac{2}{50}q + 2$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{50}{2} \cdot (12 - 2) = 250$$

Maksimi voitto on

$$\begin{aligned} P(250) &= R(250) - C(250) = 12 \cdot 250 - \left(\frac{1}{50} \cdot 250^2 + 2 \cdot 250 + 800 \right) \\ &= 450 \end{aligned}$$

Talousmatematiikan perusteet

Mallintamisesta,
esimerkkinä varastomallit

Professori Ilkka Virtanen

10.4.2001

1

Sisällysluettelo

Varastomallit esimerkkinä mallintamisesta

1. Peruskäsitteet
2. Perusmalli (EOQ -malli, yhden muuttujan optimointitehtävä)
 - 2.1. Mallin muodostus
 - 2.2. Mallin ratkaisu
 - 2.3. Ratkaisun analysointi ja tulkinta

10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

98

2

Sisällysluettelo, jatkuu

3. Perusmalli tapauksessa, kun puute sallitaan (kahden muuttujan optimointiteht.)
4. Perusmalli tapauksessa, kun täydennysnopeus on äärellinen (tuotantomalli)
5. EOQ -malli ja määrälennukset (epäjatkuva tavoitefunktio)
6. Perusmalli kahden hyödykkeen ja rajoitetun varastotilan tapauksessa (Lagrangen kerroin-menetelmä)

Sisällysluettelo, jatkuu

7. Ratkaisun optiminjälkeinen herkkyyssanalyysi
 - 7.1. Herkkyyssanalyysin yleinen kysymyksenasettelu
 - 7.2. EOQ -mallin herkkyyssanalyysi

Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Kysyntä. Tuotteen kysyntä voi olla
 - deterministinen so. etukäteen tunnettu
 - tasainen tai monotonisesti muuttuva (staattinen)
 - dynaaminen (esim. kausivaihtelu)
 - stokastinen eli satunnaisuutta sisältävä
- ✓ Varaston täydentämisnopeus voi olla
 - ääretön (kertasuoritus esim. ulkopuolisena toimituksena)
 - äärellinen (täydennys esim. tuotannosta)

Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Tilausväli on kahden peräkkäisen tilaushetken väli. Perusteena
 - varaston taso (hälytysraja)
 - tarkkailu (jatkuva tai jaksollinen)
 - kiinteä väli
- ✓ Toimitusaika, viive tilauksen ja täydennys-erän toimituksen välillä
- ✓ Suunnittelukausi, aika jolle laskelmat tehdään

Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Varastoitavien lajikkeiden määrä; merkitystä, jos lajikkeilla keskinäistä riippuvuutta tai tilarajoituksia
- ✓ Varastokapasiteetti; merkitystä, jos varastotila rajoite
- ✓ Täydennyserän koko, tilattava tuotanto- tai toimituserä
- ✓ Ostohinta, mikäli on määräalennuksia

Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Myyntihinta, mikäli on tukku- tai muita alennuksia
- ✓ Varaston ylläpitokustannus sisältää pääoma-, varastointi- ja käsittelykustannukset, pilaantumisen ja hävikin, verot ja vakuutukset ym.
- ✓ Tilauuskustannukset, tilauksen teosta tai tuotannon aloittamisesta aiheutuva kiinteä kertakustannus

Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Puutekustannus syntyy, kun kysyntää ei pystytä tyydyttämään
 - menetetty myynti tai ylimääräiset hankintakustannukset
 - maineen menetys
 - seisokki- tai ylityökustannukset

Mallinnettava päätösongelma

Tehtäviä päätöksiä ovat mm.

- kuinka usein tilataan (tilausväli)?
- kuinka paljon tilataan kerralla (erä koko)?
- milloin tilataan (tilaushetki)?

Perusmallin olettamukset

- ✓ Perusmallina ns. Economic Order Quantity (EOQ) -malli v. 1915 (F.W. Harris), tunnettu myös neliöjuurikaavana.
- ✓ Mallin olettamukset (vrt. peruskäsitteet):
 - Pelkistykset ja rajaukset
 - täydennykset kertosuorituksena (täydennysnop. = ∞)
 - toimitusaika vakio (voidaan olettaa = 0, vrt. ennakointi)
 - pitkä suunnittelukausi (toistuvat tilaukset)
 - yksi varastoitava tuote

Perusmallin olettamukset

- ei tilarajoituksia
- osto- ja myyntihinnat vakioita (ei paljous- ym. alennuksia)
- puutetta ei sallita
- ✓ Mallin parametrit
 - kysyntä D on tunnettu ja vakio, $[D] = \text{kpl/v}$
 - varaston ylläpitokustannus h on vakio, $[h] = \text{mk/kpl} \cdot \text{v}$
 - tilauskustannus K on vakio ja tilausmäärästä riippumaton, $[K] = \text{mk/erä}$

Perusmallin olettamukset

✓ Mallin (päättös)muuttujat

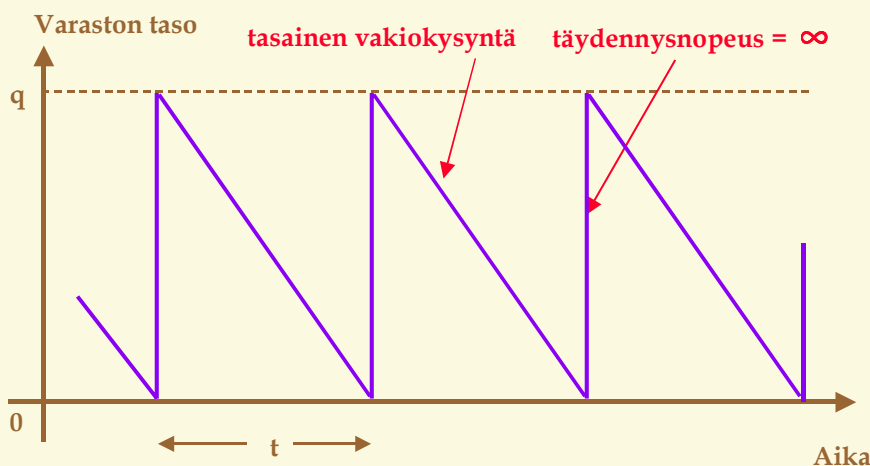
- tilauserän koko q on vakio, $[q] = \text{kpl}$
- tilausväli t , määräytyy kysynnän ja eräkoon perusteella (ts. vaihtoehtoinen riippumaton päätösmuuttuja q :lle), $[t] = \text{v}$

✓ Mallin tavoitefunktio

- etsittävä sellainen tilauserän koko q (tilausväli t), jolla suunnittelukauden (tai aikayksikössä syntyvät) varastoinnin kokonaiskustannukset (tilauskust. + varaston ylläpitokust.) minimoituvat

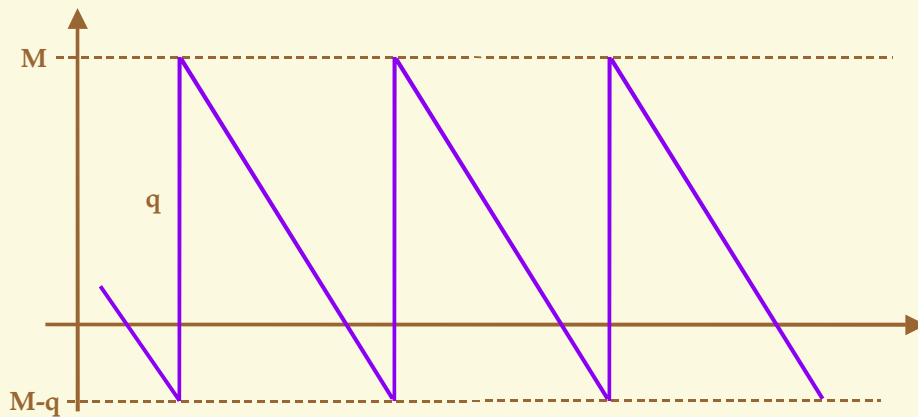
EOQ - malli, graafinen esitys

Olettamukset johtavat malliin, jossa varaston taso kehittyy ajan funktiona seuraavasti:



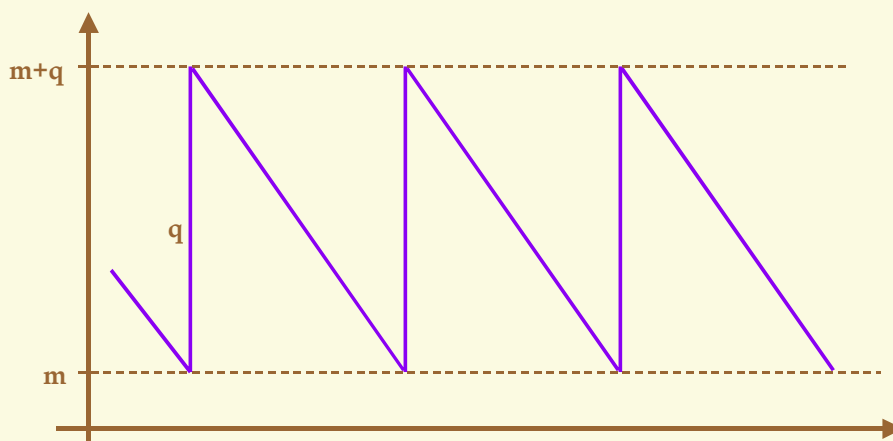
Miksi seuraavat vaihtoehdot eivät tule kysymykseen ?

Vaihtoehto 1:



Miksi seuraavat vaihtoehdot eivät tule kysymykseen ?

Vaihtoehto 2:



EOQ - mallin formulointi

Määritetään kustannukset per aikayks. (mk/v):

Tilauuskustannukset

- tilauksia per aikayksikkö: D/q

$$[D/q] = (\text{kpl}/v) / (\text{kpl}/\text{erä}) = \text{erää}/v$$

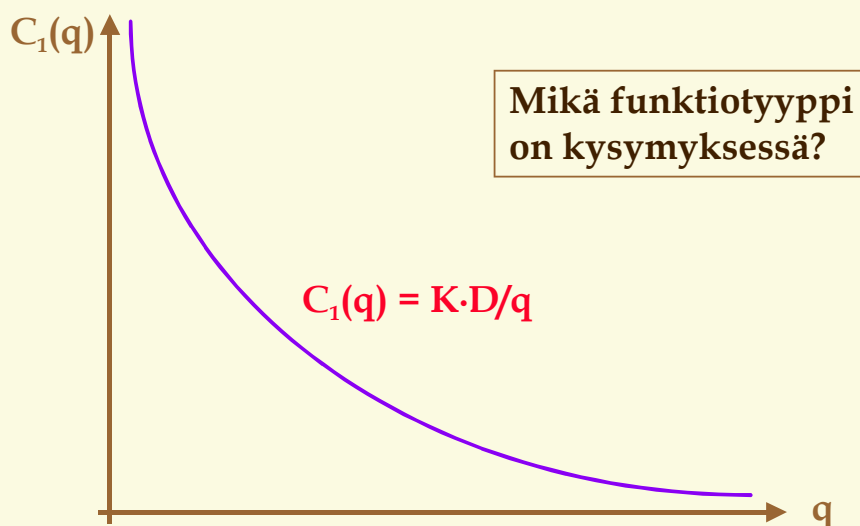
- tilauuskustannukset aikayksikössä

$$C_1(q) = K \cdot (D/q)$$

$$[K \cdot (D/q)] = (\text{mk}/\text{erä})(\text{erää}/v) = \text{mk}/v$$

EOQ - mallin formulointi

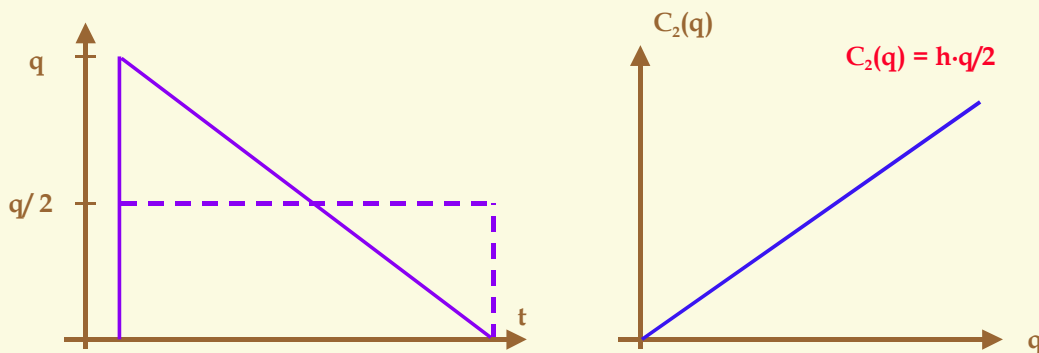
Tilauuskustannusten riippuvuus eräkoosta graafisesti:



EOQ - mallin formulointi

Varaston ylläpitokustannukset

- keskimääräinen varasto = $q/2$
- kustannukset aikayksikössä = yksikkö-
kustannukset · keskimääräinen varastotaso



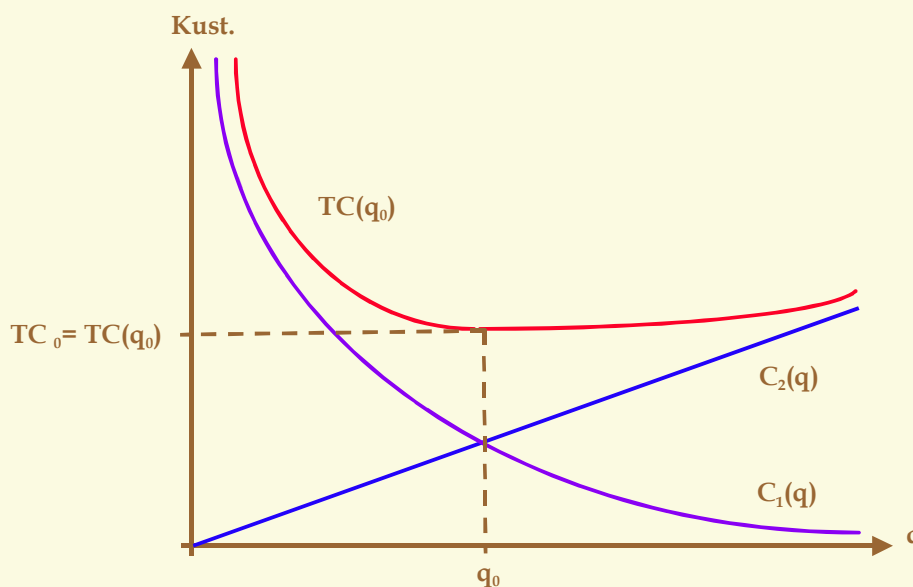
10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

19

Kokonaiskustanusfunktio

$$TC(q) = C_1(q) + C_2(q) = K \cdot D \cdot (1/q) + (h/2) \cdot q$$



10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

20

EOQ - mallin ratkaisu

Kokonaiskustannukset:

$$TC(q) = K \cdot D \cdot (1/q) + (h/2) \cdot q$$

Välttämätön ehto minimille:

$$d[TC(q)]/dq = -K \cdot D \cdot (1/q^2) + h/2 = 0$$

Tästä ratkaisemalla optimaalinen eräkkö:

EOQ:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

(Ehdot optimille, mitkähän ne olivatkaan?)

EOQ - mallin ratkaisun tarkastelua

Optimieräkkö:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Optimaalinen tilausväli:

$$t_0 = \frac{q_0}{D} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \cdot \frac{1}{D} = \sqrt{\frac{2K}{hD}}$$

EOQ - mallin ratkaisun tarkastelua

Optimikustannukset (= minimikustannukset):

$$\begin{aligned} TC_0 &= TC(q_0) = C_1(q_0) + C_2(q_0) = KD \cdot \frac{1}{q_0} + \frac{h}{2} \cdot q_0 \\ &= KD \sqrt{\frac{h}{2KD}} + \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2KD}{h}} \\ &= \sqrt{\frac{KDh}{2}} + \sqrt{\frac{KDh}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{KDh}{2}} = \sqrt{2KDh} \end{aligned}$$

Huom.: $C_1(q_0) = C_2(q_0)$ (vrt. myös aiempi kuva!)

Lopputulos: $TC_0 = \sqrt{2KDh}$

Optimierä koko ja -kustannukset

Optimierä koko: $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

Optimikustannukset:

$$TC_0 = \sqrt{2KDh}$$

$$TC_0 = \sqrt{2KDh} = h \sqrt{\frac{2KD}{h}} = h \cdot q_0;$$

$$TC_0 = \sqrt{2KDh} = \frac{2KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \frac{2KD}{q_0} = 2KD \cdot \frac{1}{q_0}$$

Esimerkki 1.

Tarkastellaan varastonpitoa, jossa

- ◆ kysyntä $D = 18\,000 \text{ kpl/v}$
- ◆ tilauskustannukset $K = 2000 \text{ mk/erä}$
- ◆ varaston ylläpitokustannukset $h = 6 \text{ mk/kpl} \cdot v$

Saadaan seuraavat varastojärjestelmään liittyvät tunnusluvut:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \text{ mk} \cdot 18000 \text{ kpl/v}}{6 \text{ mk/kpl} \cdot v}} = \sqrt{12 \cdot 10^6 (\text{kpl})^2} = 3464 \text{ kpl}$$

$$TC_0 = hq_0 = 6 (\text{mk/kpl} \cdot v) 3464 \text{ kpl} = 20784 \text{ mk/v}$$

Esimerkki 1.

Tilauksia (ja varaston täydennyksiä):

$$N_0 = \frac{D}{q_0} = \frac{18000 \text{ kpl/v}}{3464 \text{ kpl}} = 5.2 / v$$

Tilausväli:

$$t_0 = \frac{q_0}{D} = \frac{1}{N_0} = (5.2 / v)^{-1} = 0.192 v \approx 69 \text{ päivää}$$

Varastonpidon kustannukset myytyä tuoteyksikköä kohti:

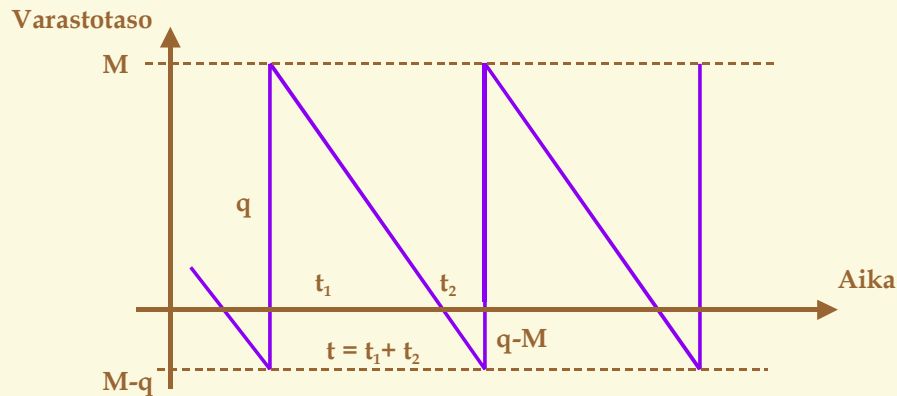
$$UC_0 = \frac{TC_0}{D} = \frac{20784 \text{ mk/v}}{18000 \text{ mk/kpl}} = 1.15 \text{ mk/kpl}$$

EOQ-malli puutekustannuksin

Olettamukset kuten perusmallissa paitsi että puute sallitaan.

s = puutekustannus, $[s] = \text{mk/kpl} \cdot v$

M = varaston maksimitaso, jolloin $q-M$ = maksimipuute



$$t = q/D, \quad t_1 = M/D, \quad t_2 = (q-M)/D$$

EOQ-malli puutekustannuksin

Varaston keskikoko :

$$\frac{M}{2} \cdot \frac{t_1}{t} + 0 \cdot \frac{t_2}{t} = \frac{M}{2} \cdot \frac{t_1}{t} = \frac{M}{2} \frac{M/D}{q/D} = \frac{M^2}{2q}$$

Keskimääräinen puute:

$$0 \cdot \frac{t_1}{t} + \frac{(q-M)}{2} \cdot \frac{t_2}{t} = \frac{q-M}{2} \cdot \frac{t_2}{t} = \frac{q-M}{2} \frac{(q-M)/D}{q/D} = \frac{(q-M)^2}{2q}$$

Kokonaiskustannukset aikayksikössä:

$$TC(q, M) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

tilaus varasto puute

EOQ-malli puutekustannuksin

Päätösmuuttujia tarvitaan tässä uudessa, puutteen sallivassa mallissa kaksi. Edellä näiksi muuttujiksi on valittu tilausmäärä q ja taso, jolle varasto täydennyksen jälkeen nousee (M). Nämä yhdessä määräävät mm. maksimipuutteen $q-M$ ja tilausvälin t (sekä tämän osat t_1 ja t_2). Muitakin valintoja päätösmuuttujiksi olisi voitu tehdä (esimerkiksi minkälaisia?).

Puutteen ja puutekustannusten tuominen malliin muuttavat mallia tarvittavan matematiikan osalta ratkaisevasti. Yhden muuttujan (päätös)funktioista on siirrytty usean muuttujan funktioon. Esimerkiksi minimikustannukset antavan ääriarvokohdan löytämiseksi on turvauduttava päätösmuuttujien suhteen laskettuihin osittaisderivaattoihin.

Puutemallin ratkaisu

Ehto optimiratkaisulle (ääriarvokohdassa osittaisderivaatat = 0):

$$\begin{cases} \frac{\partial TC}{\partial q} = \frac{-2KD + sq^2 - (s+h)M^2}{2q^2} = 0 \\ \frac{\partial TC}{\partial M} = \frac{(h+s)M - qs}{q} = 0 \end{cases}$$

Puutemallin ratkaisu

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan (totea itse laskemalla):

$$q_1 = \sqrt{\frac{2KD(h+s)}{hs}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \sqrt{\frac{h+s}{s}} = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}},$$

missä q_0 on perusmallin optimierä koko. **Tilauserän koko siis kasvaa perusmalliin verrattuna.**

$$M_1 = \sqrt{\frac{2KDs}{h(h+s)}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \sqrt{\frac{s}{h+s}} = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}.$$

Maksimivarasto taas pienenee perusmalliin verrattuna (q_0 on paitsi erä koko myös maksimivarasto EOQ:ssa).

Puutemallin ratkaisu

Puutemallin tarkastelu, kun $s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} q_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{h+s}{s}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = q_0,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{s}{h+s}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = q_0.$$

Malli antaa siis erikoistapauksena EOQ-mallin, kun asetetaan $s = \infty$. Yleisestikin: mikäli mallin yleistys on tapahtunut oikein, pelkistetty malli saadaan yleisen erikoistapauksena.

Esimerkki 2.

Tarkastellaan varastonpitoa, jossa

- ◆ kysyntä $D = 18\,000 \text{ kpl/v}$
- ◆ tilauskustannukset $K = 2000 \text{ mk/erä}$
- ◆ varaston ylläpitokustannukset $h = 6 \text{ mk/kpl} \cdot v$
- ◆ puutekustannukset $s = 25 \text{ mk/kpl} \cdot v$

Saadaan mm. seuraavat varastojärjestelmään liittyvät tunnusluvut:

$$q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}} = 3464 \sqrt{\frac{6+25}{25}} \text{ kpl} = 3857 \text{ kpl}$$

Esimerkki 2.

$$M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}} = 3464 \sqrt{\frac{25}{6+25}} \text{ kpl} = 3110 \text{ kpl}$$

$$TC_1 = \frac{2000 \cdot 18000}{3857} + \frac{3110^2 \cdot 6}{2 \cdot 3857} + \frac{747^2 \cdot 25}{2 \cdot 3857} = 18665 \text{ mk / v}$$

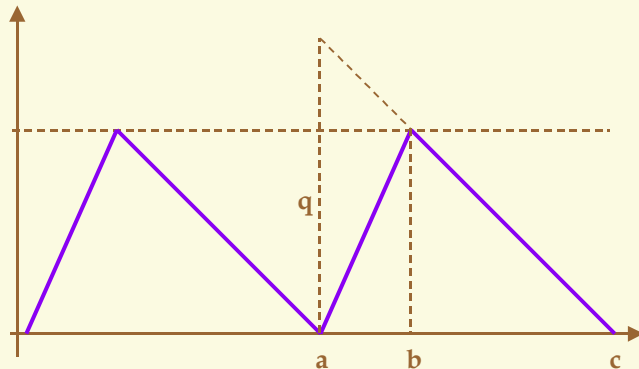
Esimerkissä puutekustannukset ovat suuremmat kuin varaston ylläpitokustannukset ($25 \text{ mk/kpl} \cdot v$ vs. $6 \text{ mk/kpl} \cdot v$). Kuitenkin varastonpidon kokonaiskustannukset alenevat (18665 mk/v vs. 20784 mk/v).

Miksiköhän näin?

Tuotantomalli

(EOQ-malli & äärellinen täydennysnopeus)

Muut oletukset kuten EOQ-mallissa paitsi lisäksi äärellinen täydennysnopeus r , $[r] = kpl/v$.



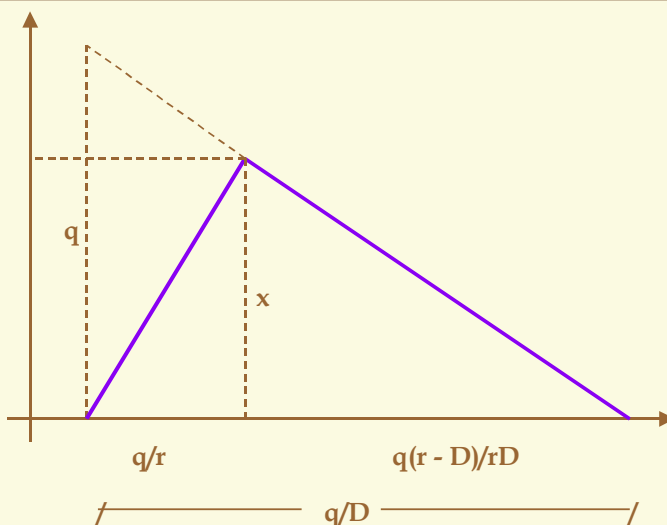
Varasto täyttyy aikana (a,b) vauhdilla $r - D$, ($r > D$)

Aikana (b,c) varasto tyhjenee vauhdilla D

Tuotanto kestää ajan $b - a = q/r$

Tilausväli on q/D , joten tyhjenemisvaiheen pituus on $c - b = q/D - q/r = q(r - D)/Dr$

Tuotantomallin johtaminen



$$\frac{q}{x} = \frac{q/D}{\frac{q(r - D)}{rD}}$$

Varaston maksimikoko on $(q/r) \cdot (r - D) = q(r - D)/r$ ja varaston keskikoko siten $q(r - D)/2r$. Varaston vuotuinen ylläpitokustannus on näin $hq(r - D)/2r$

Tuotantomallin ratkaisu

Varastonpidon kokonaiskustannukset tuotantomallissa ovat siten:

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}.$$

Kustannukset saavuttavat minimiarvonsa (totea laskemalla!), kun

$$q_2 = \sqrt{\frac{2KDr}{h(r-D)}} = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}} > q_0$$

$$M_2 = \frac{q_2}{r}(r-D) = \sqrt{\frac{2KD(r-D)}{hr}} = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}} < q_0.$$

Tuotantomallin ratkaisu

Analyysiä:

- 1) Eräkkö kasvaa (ts. $q_2 > q_0$), sillä q_2 :n neliöjuurilauseke > 1
- 2) Varaston tilatarve (varastotason maksimiarvo) pienenee, sillä neliöjuurilauseke M_2 :ssa < 1
- 3) Minimikustannuksiksi saadaan (totea itse laskemalla, so. sijoittamalla q_2 :n lauseke $TC(q)$:n lausekkeeseen):

$$TC_2 = TC(q_2) = \sqrt{\frac{2KDh(r-D)}{r}} = TC_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}} < TC_0$$

- 4) EOQ-malli on tuotantomallin erikoistapaus (tuotantovauhti $r = \infty$):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q_2 = q_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{r}{r-D}} = q_0.$$

Esimerkki 3

Olkoon

- ◆ Kysyntä 18000 kpl/v
- ◆ Tuotantonopeus 36000 kpl/v
- ◆ Tilauskustannukset 2000 mk/erä
- ◆ Varaston ylläpitokustannukset 6 mk/kpl·v

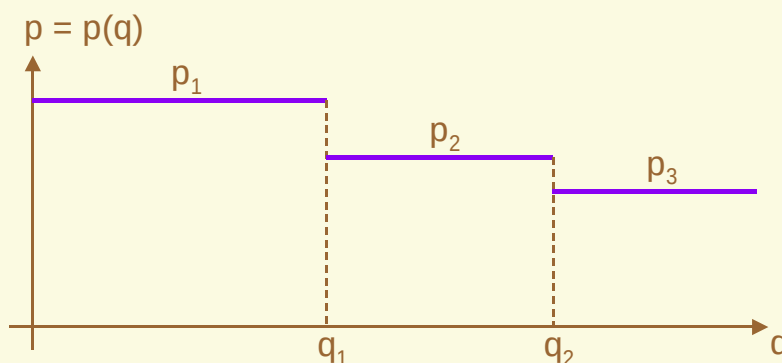
$$q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 18000 \cdot 36000}{6 \cdot 18000}} \text{ kpl} = 4900 \text{ kpl} \quad (q_0 = 3464 \text{ kpl})$$

$$M_2 = \frac{q_2(r - D)}{r} = 2450 \text{ kpl} \quad (M_0 = 3464 \text{ kpl})$$

$$TC_2 = 14697 \text{ mk / v} \quad (TC_0 = 20784 \text{ mk/v})$$

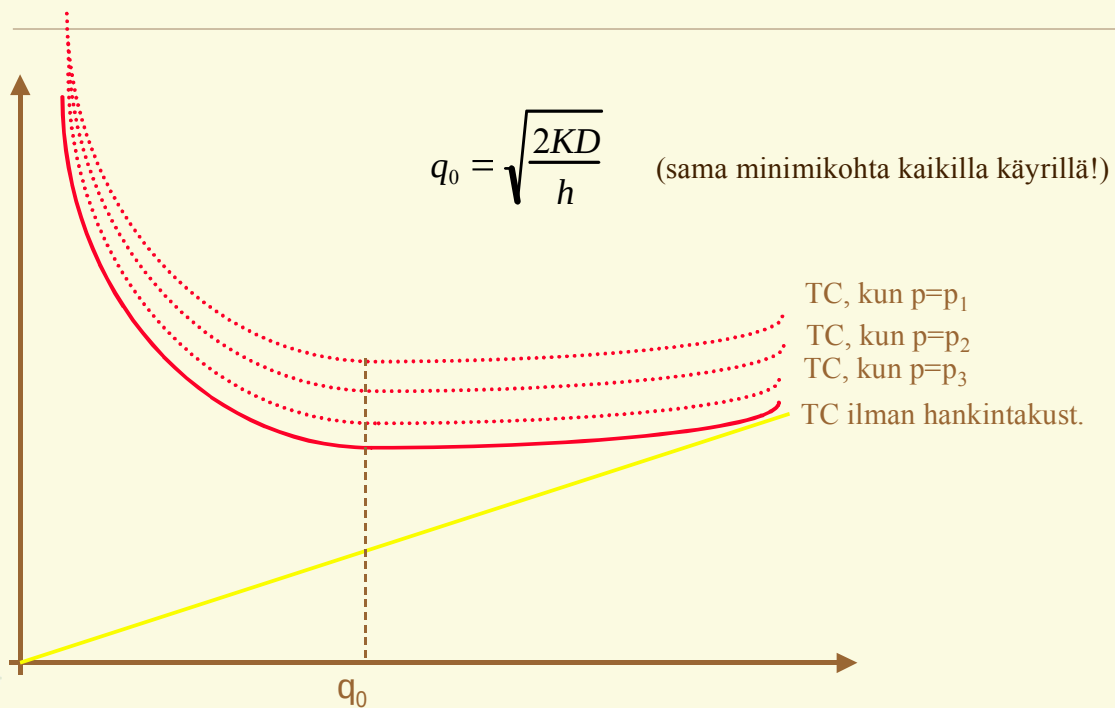
EOQ-malli paljousalennuksin

Oletukset kuten perusmallissa, mutta ostohinta varastoon on eräkoosta riippuva, ts. $p = p(q)$. Oletetaan porrashintafunktio:



$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq}{2} + p(q) \cdot D \quad (\text{tilaus- + varastointi- + hankintakust.})$$

EOQ-malli paljousalennuksin



10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

41

Alennusrajojen q_1 ja q_2 sekä minimikohdan q_0 keskinäisestä sijainnista riippuen saadaan kokonaiskustannusten minimille erilaisia ratkaisuja:

- q_0 on optimi ja $q_0 > q_2$; optimaalinen varastointipolitiikka ja alennukset hyödynnetty täysimääräisesti ($p = p_3$)
- q_0 on optimi ja $q_2 > q_0 > q_1$; optimaalinen varastointipolitiikka ja alennukset hyödynnetty osittain ($p = p_2$)
- q_0 on optimi ja $q_0 < q_1$; optimaalinen varastointipolitiikka ja alennuksia ei voida hyödyntää (alennukset eivät riittävät suhteessa varastointikustannusten nousuun; $p = p_1$)
- q_1 on optimi ja $q_0 < q_1$; alennus $p_1 \rightarrow p_2$ kompensoi kohonneet varastointikustannukset (mutta alennus $p_2 \rightarrow p_3$ ei enää kompensoi)
- q_2 on optimi ja $q_2 > q_0$; alennusten täysimääräinen hyödyntäminen kompensoi kohonneet varastointikustannukset

Esitä kuhunkin tapaukseen liittyvä tilanne graafisesti!

10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

42

Optimaalisen eräkoon määrittämiseksi saadaan näin algoritmi (yleisesti n :lle eri hinnalle $p_1, \dots, p_n$):

1. Määritetään $q_0 = (2KD/h)^{1/2}$

2. Lasketaan

$$TC_0 = TC(q_0) = (2KD/h)^{1/2} + p(q_0) \cdot D$$

$$TC_i = TC(q_i) = KD/q_i + hq_i/2 + p_{i+1} D \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

3. Optimaalinen q on se, jolla TC kohdassa 2 on pienin.

Algoritmiseen (so. numeeriseen) ratkaisuun joudutaan analyyttisen ratkaisun sijasta, koska minimoitava funktio on epäjatkuva.

Kaksi tuotetta, rajoitettu varastotila (Lagrangen kertoja -menetelmä)

EOQ-mallin oletukset muuten, paitsi

- ◆ varastoitavia tuotteita oletetaan olevan kaksi
- ◆ varastotila voi osoittautua optimipolitiikkaa rajoittavaksi tekijäksi

D_1, D_2 kysynnät, toisistaan riippumattomat

K_1, K_2 tilauskustannukset

h_1, h_2 ylläpitokustannukset

b_1, b_2 tilantarve tuoteyksikköä kohti

B käytettävissä oleva varastotila

q_1, q_2 eräkoot (päättösmuuttujat)

Lagrangen kertoja -menetelmä

Malli kokonaiskustannuksille:

$$TC(q_1, q_2) = K_1 D_1 / q_1 + K_2 D_2 / q_2 + \frac{1}{2} h_1 q_1 + \frac{1}{2} h_2 q_2$$

$$\text{lisäehdolla} \quad b_1 q_1 + b_2 q_2 \leq B \quad (\text{tilarajoitus})$$

Periaatteet ratkaisulle:

1^o Etsitään $TC(q_1, q_2)$:n tavallinen (vapaa) kahden muuttujan funktion ääriarvokohta. Jos ratkaisu toteuttaa tilarajoitusehdon, on optimiratkaisu löytynyt (varastotila riittää kaikissa olosuhteissa, koska se riittää suurimmalle mahdolliselle varastollekin). Ellei tilarajoitusehto toteudu, joudutaan etsimään ns. sidottu ääriarvo Lagrangen kertoja -menetelmällä (kohta 2^o).

Lagrangen kertoja -menetelmä

2^o Muodostetaan ns. Lagrangen funktio, jonka tavallinen ääriarvokohta antaa alkuperäiselle kokonaiskustannusfunktiolle etsityn sidotun ääriarvokohdan. Lisäksi saadaan tärkeitä informaatiota rajoitusehdon tiukkuudesta.

Vapaan ääriarvon määrittäminen (kohta 1^o):

$$\begin{cases} \frac{\partial TC}{\partial q_1} = -\frac{K_1 D_1}{q_1^2} + \frac{1}{2} h_1 = 0 \\ \frac{\partial TC}{\partial q_2} = -\frac{K_2 D_2}{q_2^2} + \frac{1}{2} h_2 = 0 \end{cases}$$

Lagrangen kertoja -menetelmä

Yhtälöistä saadaan ratkaisemalla helposti ääriarvokohtaehdoks:

$$\begin{cases} q_1^* = \sqrt{\frac{2K_1 D_1}{h_1}} \\ q_2^* = \sqrt{\frac{2K_2 D_2}{h_2}} \end{cases}$$

Lagrangen funktion muodostaminen alkuperäisen tavoitefunktion, tilarajoituksen ja Lagrangen kertojan λ avulla (kohta 2^o):

$$L(q_1, q_2, \lambda) = TC(q_1, q_2) + \lambda(b_1 q_1 + b_2 q_2 - B)$$

Lagrangen kertoja -menetelmä

L:llä on sama ääriarvokohta muuttujien q_1 ja q_2 suhteen kuin TC:lläkin edellyttäen, että λ :n kerrottavana oleva sulklauseke = 0, ts. että tilarajoitusehto toteutuu! Ääriarvokohdalle saadaan ehdot:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{K_1 D_1}{q_1^2} + \frac{1}{2}h_1 + \lambda b_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{K_2 D_2}{q_2^2} + \frac{1}{2}h_2 + \lambda b_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 q_1 + b_2 q_2 - B = 0 \end{cases}$$

Lagrangen kertoja -menetelmä

Yhtälöryhmästä voidaan ratkaista (laskutoimitukset yleensä verraten monimutkaisia) lausekkeet q_1 :lle ($= q_1^{\text{opt}}$) ja q_2 :lle ($= q_2^{\text{opt}}$) sekä λ :lle. Yhtälöryhmän viimeinen yhtälö takaa, että ratkaisu toteuttaa tilarajoituksen.

Ratkaisuna saadaan myös arvo λ :lle, Lagrangen kertojalle. Kertoimella λ on tärkeä taloudellinen tulkinta. Se ilmoittaa tilarajoitteen **varjohinnan**, ts. kuinka paljon (marginaalisesti optimissa) kustannukset lisääntyvät sen johdosta, että tila on pullonkaulatekijä. Jos varastotilaa olisi käytettävissä yksi tilayksikkö enemmän, varastoinnin kokonaiskustannukset alenisivat λ :n verran.

Lagrangen kertoja -menetelmä

Varjohinnoilla on erittäin keskeinen merkitys mm. lineaarisen optimointitehtävän (LP-mallin) ratkaisemisessa, sekä ratkaisuteknisesti että ratkaisun taloudellisen tulkinnan kannalta. LP-mallin herkkyyssanalyysi mm. perustuu pääosin ratkaisuun liittyviin varjohintoihin.

Seuraavassa tarkastellaan mallien yleistä herkkyyssanalyysia varastomallia esimerkkinä käyttäen.

Herkkyysanalyysi, yleistä

- ◆ Luonteeltaan mallin optiminjälkeistä tarkastelua, jonka sekä looginen että ajallinen paikka on mallityöskentelyn loppuvaiheessa
- ◆ Lähtökohtana valmiiksi formuloitu ja ratkaistu malli
- ◆ Tavoitteena tuottaa lisäinformaatiota mallin ja ratkaisun luonteesta tarkastelemalla mallin käyttäytymistä ja ominaisuuksia optimiratkaisun läheisyydessä
- ◆ Tunnetuinta herkkyysanalyysi on lineaarisen optimointitehtävän (LP-mallin) yhteydessä. Herkkyysanalyysi on itse asiassa osa LP-mallin ratkaisua (duaalimuuttujien varjohintatulkinnot)

Herkkyysanalyysi, yleistä

- 1 Mikä on **optimituloksen herkkyys** optimiratkaisun suhteen: paljonko tavoitefunktion arvo huononee suhteessa optimitulokseen, jos optimiratkaisun sijasta otetaan käyttöön jokin muu ratkaisu?
 - hinta optimiratkaisusta poikkeamiselle
- 2 Mikä on **optimin p%:n läheisyysalue**: mitkä ratkaisut johtavat enintään p% huonompaan tulokseen kuin optimiratkaisu?
 - “riittävän hyvien” ratkaisujen kartoitus
- 3 Miten **optimiratkaisu ja -tulos muuttuvat** mallin lähtöolettamusten (vakioiden ja parametrien) muuttuessa?
 - yksittäisen parametrin muutos (yhteys joustoihin)
 - lähtötietojen epätarkkuuden vaikutus (virheanalyysi)
 - lähtötietojen muuttamisen vaikutus (vaihtoehtolaskelmat)

Esimerkkejä herkkyyssanalyyseistä EOQ-mallin yhteydessä

- 1 Paljonko varastoinnin kokonaiskustannukset kohoavat, jos tilauserän kooksi q_0 :n sijasta valitaankin $q' = \alpha q_0$?
- 2 Missä rajoissa tilauserän koko voi vaihdella ilman että kokonaiskustannukset kohoavat enemmän kuin $p\%$?
- 3 a) Paljonko eräkkö ja kokonaiskustannukset muuttuvat, jos kysyntä D (tai tilauskustannukset K tai ylläpitokustannukset h) muuttuvat (ceteris paribus) $p\%$?
b) Mitkä ovat eräkoon ja kokonaiskustannusten optimiarvojen virhearviot, kun parametrien D , K ja h arvoja ei tunneta tarkasti vaan tietyllä suhteellisella tarkkuudella (epätarkkuus esim. max 10%)?
c) Paljonko kannattaa investoida uuteen varastojärjestelmään, kun sen yksikkökustannus h on $100f\%$ (esim. 20%) pienempi kuin nykyisen, pitoaika on N (esim. 20 v) ja laskentakorkokanta i (10%)

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi

Malli ja sen ratkaisu:

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{1}{2}hq$$

$$\begin{cases} q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \\ TC_0 = TC(q_0) = \sqrt{2KDh} = hq_0 \end{cases}$$

1. Tuloksen (kokonaiskustannusten TC) herkkyyss ratkaisun (eräkoon q) suhteen optimissa?

Annettu: $q_0 \rightarrow q' = \alpha q_0$ ts. $q'/q_0 = \alpha$

Ratkaistava: $TC_0 \rightarrow TC' = \beta TC_0$; $\beta = TC'/TC_0 = ?$

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{TC'}{TC_0} = \frac{\frac{KD}{q'} + \frac{1}{2}hq'}{hq_0} = \frac{KD}{hq'q_0} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} = \frac{KD}{hq'\sqrt{\frac{2KD}{h}}} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2KD}{h}}}{2q'} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{q'} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{q'} + \frac{q'}{q_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Saadaan siis yhteys ratkaisun (q_0) suhteelliselle muutokselle α ja tuloksen (TC_0) suhteelliselle muutokselle β :

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{ts.} \quad TC' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)TC_0.$$

Esimerkki 4

Paljonko kokonaiskustannukset lisääntyvät, jos erä koko a) kasvaa 50%, b) pienenee 50%?

- a) $q' = 1.5 q_0$ ($\alpha = 1.5$)
 $TC' = 0.5 (1.5 + 1/1.5) TC_0 \approx 1.08 TC_0$ (8%:n kust. nousu)
- b) $q'' = 0.5 q_0$ ($\alpha = 0.5$)
 $TC'' = 0.5 (0.5 + 1/0.5) TC_0 \approx 1.25 TC_0$ (25%:n kust. nousu!)

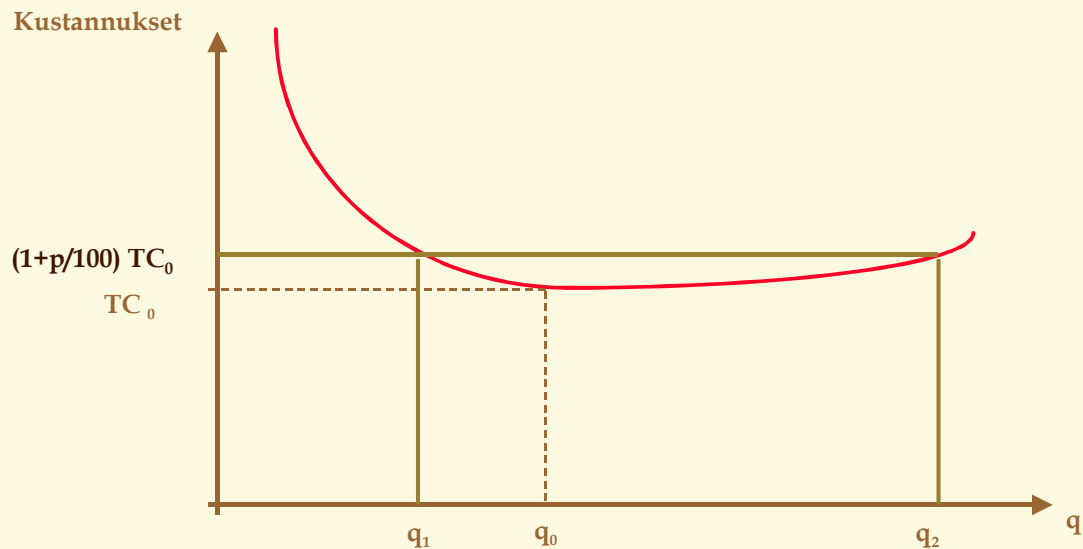
Malli on siis paljon herkempi poikkeamille optimiratkaisusta alas- kuin ylöspäin. Johtuu tavoitefunktion laakeudesta optimiratkaisun oikealla puolella. (Piirrä kuvio ja tarkastele asiaa siinä!)

Herkkyysanalyysi pätee vain optimin välittömässä läheisyydessä.

Tulokset ovat yleispäteviä EOQ-mallille, ne eivät riipu lainkaan parametrien K , D ja h arvoista (herkkyys = jousto = funktion ominaisuus).

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi, jatkoa

2. Optimiratkaisun p-prosentin läheisyysalue: Miten q_1 ja q_2 on valittava, jotta olisi voimassa: aina kun $q \in [q_1, q_2]$, niin
 $TC(q) \leq (1 + p/100) TC_0$, missä p on annettu?



10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

57

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi, jatkoa

Kohdasta 1:
$$\frac{TC}{TC_0} = \frac{1}{2}(\alpha + 1/\alpha)$$

Vaatus:
$$\frac{TC}{TC_0} \leq (1 + \frac{p}{100}) = P$$

Saadaan rajaluku P:lle:

$$\frac{1}{2}(\alpha + 1/\alpha) = P \quad | \cdot 2\alpha$$

$$\alpha^2 - 2P\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = P \pm \sqrt{P^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{q_0} = P \pm \sqrt{P^2 - 1}$$

$$\begin{cases} q_1 = (P - \sqrt{P^2 - 1}) q_0 \\ q_2 = (P + \sqrt{P^2 - 1}) q_0 \end{cases}$$

10.4.2001

Professori Ilkka Virtanen: Talousmatematiikan perusteet, mallintaminen

126

58

Esimerkki 5

$$p = 10\% \quad \Rightarrow \quad P = 1.10$$

$$\begin{cases} q_1 = (1.10 - \sqrt{1.10^2 - 1}) q_0 = 0.64q_0 \\ q_2 = (1.10 + \sqrt{1.10^2 - 1}) q_0 = 1.54q_0 \end{cases}$$

Eräkoko saa kasvaa optimista korkeintaan 56% ja pienentyä korkeintaan 36%, jotta kokonaiskustannusten nousu olisi korkeintaan 10%.

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi, jatkoa

3a. Jos kysyntä D muuttuu $p\%$, paljonko muuttuu optimaalinen eräkoko, paljonko muuttuvat (kasvavat) optimaaliset kustannukset?

D : suhteellinen muutos on annettu: $\Delta D/D$

Suuretko ovat $\Delta q_0/q_0$ ja $\Delta TC_0/TC_0$?

Pienille (infinitesimaalisille) muutoksille pätee: $\Delta D/D \approx dD/D$

$$\text{Saadaan: } \frac{\Delta q_0/q_0}{\Delta D/D} = \frac{\Delta q_0}{\Delta D} \cdot \frac{D}{q_0} \approx \frac{dq_0}{dD} \cdot \frac{D}{q_0}$$

Viimeksi mainittu lauseke (merk. $E_D(q_0)$) on q_0 :n jousto D :n suhteen eli eräkoon kysyntäjousto.

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi, jatkoa

EOQ-mallille saadaan näin eräkoon kysyntäjoustoksi:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}; \quad \frac{dq_0}{dD} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2KD}{h}}} \cdot \frac{2K}{h}$$

$$E_D(q_0) = \frac{dq_0}{dD} \cdot \frac{D}{q_0} = \frac{2K}{2h\sqrt{\frac{2KD}{h}}} \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \frac{1}{2} \frac{h}{\frac{2KD}{h}} = \frac{1}{2} = \text{vakio!}$$

Tulos: q_0 :n suhteellinen muutos on puolet D :n suhteellisesta muutoksesta (likiarvo, pitää paikkansa sitä paremmin, mitä pienempi ΔD on). Jos esim. D kasvaa (vähenee) 10%, niin q_0 kasvaa (vähenee) 5%.

Samoin on (totea itse laskemalla): $E_D(TC_0) = 1/2$;

$E_K(q_0) = E_K(TC_0) = 1/2$; $E_h(q_0) = -1/2$ (!), $E_h(TC_0) = 1/2$.

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi, jatkoa

3b. Parametrien arvojen muuttamisen kannattavuus?

Investoinnilla I saadaan aikaan varastojärjestelmä, jonka ylläpito-kustannus on $100f$ % pienempi kuin olemassa olevan järjestelmän (muut ominaisuudet ennallaan). Kuinka suuri saa I korkeintaan olla, jotta investointi olisi kannattava? Investoinnin pitoaika on N ja laskentakorkokanta i .

$$TC_0 = \sqrt{2KDh}$$

$$\frac{dTC_0}{TC_0} = d \ln TC_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dK}{K} + \frac{dD}{D} + \frac{dh}{h} \right) = \frac{1}{2} (0 + 0 - f) = -\frac{1}{2} f$$

$$\Delta TC_0 \approx dTC_0 = -\frac{1}{2} f \cdot TC_0 = -\frac{1}{2} f \sqrt{2KDh}$$

Säästö vuodessa:

$$|\Delta TC_0| \approx \frac{1}{2} f \sqrt{2KDh}$$

EOQ-mallin herkkyyssanalyysi, jatkoa

Säästö investoinnin pitoaikana (nykyarvomenetelmä):

$$NPV\left(\sum |\Delta TC_0|\right) \approx a_{(N,i)} \cdot \frac{1}{2} f \sqrt{2KDh},$$

missä $a_{(N,i)}$ on jaksollisten maksujen diskonttaustekijä.

Saadaan kannattavuusehto investoinnille:

$$I \leq \frac{1}{2} f \cdot a_{(N,i)} \cdot \sqrt{2KDh}$$

Esimerkki 6

Olkoot EOQ-mallin parametrit:

$$D = 18000 \text{ kpl/v}$$

$$K = 2000 \text{ mk}$$

$$h = 6 \text{ mk/kpl v}$$

ja investointiin liittyvät parametrit:

$$f = 0.20 \text{ (h: } 6 \text{ mk/kpl} \cdot \text{v} \rightarrow 4.80 \text{ mk/kpl} \cdot \text{v)}$$

$$N = 20 \text{ v}$$

$$i = 0.10 \Rightarrow a_{(N,i)} = 8.51356$$

Varastoinvestointi saa maksaa enintään:

$$I \leq 0.5 \cdot f \cdot a_{(N,i)} \cdot (2KDh)^{0.5} = 0.5 \cdot 0.20 \cdot 8.51356 \cdot 20784 \approx 17700 \text{ mk}$$

(investoinnin takaisinmaksuajan on oltava alle 9 vuotta).

10 Finanssimatematiikkaa

Tämän luvun keskeisiä asioita ovat yksittäisen maksun nykyarvo, jaksollisten maksujen nykyarvo

ja annuiteetti. Ennen kuin pääsemme keskeiseen ainekseen kannattaa kuitenkin kerrata vanhastaan tuttuja asioita.

10.1 Prosentti

Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa (latinaksi 'pro centum', englanniksi 'per cent', espanjaksi 'por ciento'). p prosenttia, $p\%$, on p sadasosaa. Seuraavat lauseet sanovat siis saman asian.

"Maksu on 5 prosenttia 600 markasta."

$\Leftrightarrow$ "Maksu on 5 sadasosaa 600 markasta."

$\Leftrightarrow$ "Maksu on $5 \cdot \frac{600 \text{ mk}}{100}$ "

$\Leftrightarrow$ "Maksu on $\frac{5}{100} \cdot 600 \text{ mk}$ "

Jos b on $p\%$ luvusta a , eli

$$b = \frac{p}{100} \cdot a,$$

niin a = perusarvo (mihin verrataan?)(minkä sadasosista on kysymys?)

p = prosenttiluku (miten monta sadasosaa?)

b = prosenttiarvo (mitä verrataan?)

Kahden luvun vertailu:

Jos y on $p\%$ suurempi kuin x , niin

perusarvo = x (kuin-sanan perässä)

prosenttiarvo = ero = $y - x$

$$y - x = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$$

Jos y on $p\%$ pienempi kuin x , niin

perusarvo = x (kuin-sanan perässä)

prosenttiarvo = ero = $x - y$

$$x - y = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$$

Muuttunut arvo:

Olkoon alkuperäinen arvo x ja muuttunut arvo X .

Jos x kasvaa $p\%$, niin

perusarvo = x

prosenttiarvo = kasvu = $X - x$

$$X - x = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad X = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$$

Jos x pienenee $p\%$, niin

perusarvo = x

prosenttiarvo = vähennys = $x - X$

$$x - X = \frac{p}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad X = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$$

Jos x on $p\%$ y :stä ja x kasvaa d prosenttivsikköä, niin

X on $(p + d)\%$ y :stä

$$\Leftrightarrow X = \frac{p + d}{100} \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{p + d}{p} \cdot x$$

Jos x on $p\%$ y :stä ja x pienenee d prosenttivsikköä, niin

X on $(p - d)\%$ y :stä

$$\Leftrightarrow X = \frac{p - d}{100} \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{p - d}{p} \cdot x$$

10.2 Aritmeettinen ja geometrinen sarja

Sarja on äärellisen monen termin merkitty summa

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^5 10k = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$

$$\sum_{k=1}^5 (2k+1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$$

Sarja on aritmeettinen sarja, jos peräkkäisten termien erotus on vakio. Esimerkkejä aritmeettisista sarjoista ovat

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^6 (2 + (k-1)5) &= 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 \\ \text{b) } \sum_{k=1}^6 (2 + 5k) &= 7 + 12 + 17 + 22 + 27 + 32 \\ \text{c) } \sum_{k=1}^6 (5k - 3) &= 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 \\ \text{d) } \sum_{k=0}^5 (2 + 5k) &= 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + 27 \end{aligned}$$

Aritmeettinen sarja on helpointa määritellä ilmoittamalla termien määrä n , ensimmäinen termi u_1 ja viimeinen termi u_n . Toinen tapa on ilmoittaa termien määrä n , ensimmäinen termi u_1 ja peräkkäisten termien erotus d (, jolloin $u_n = u_1 + (n-1)d$).

Aritmeettisen sarjan summa on

$$\sum_{k=1}^n u_k = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} \quad ("n \text{ kertaa ensimmäisen ja viimeisen keskiarvo"})$$

Todistus: Lasketaan ensin $S = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

$$\begin{array}{rcccccc} S & = & 1 & +2 & +3 & \dots & +n \\ S & = & n & +(n-1) & +(n-2) & \dots & +1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & +(n+1) & +(n+1) & \dots & +(n+1) \end{array}$$

Siis $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum (u_1 + (k-1)d) = \sum u_1 + d \sum (k-1) = n \cdot u_1 + (d \sum k) - nd \\ &= n \cdot \left(u_1 + \frac{(n+1)d}{2} - d \right) = n \cdot \frac{u_1 + (u_1 + (n-1)d)}{2} = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} \quad \square\end{aligned}$$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^7 (3k-1) = 7 \cdot \frac{2+20}{2} = 77$

Sarja on geometrisen sarja, jos peräkkäisten termien suhde on vakio. Esimerkkejä geometrisista sarjoista ovat

a) $\sum_{k=1}^6 2^k = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

b) $\sum_{k=1}^3 2 \cdot 3^k = 6 + 18 + 54$

Geometrisen sarja on helpointa määritellä ilmoittamalla termien määrä n , ensimmäinen termi u_1 ja peräkkäisten termien suhde q , jolloin sarja on

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_1 q^{(k-1)} = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{(n-1)}$$

Geometrisen sarjan summa on

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{(n-1)} = \frac{u_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

Todistus:

$$\begin{aligned}S &= u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots + u_1 q^{(n-1)} \\ -Sq &= -u_1 q - u_1 q^2 - u_1 q^3 - u_1 q^4 - \dots - u_1 q^n\end{aligned}$$

$$S(1 - q) = u_1(1 - q^n) \quad \square$$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^4 3 \cdot 2^k = 6 \cdot \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 80.$

$$\sum_{k=1}^{100} 5 \left(\frac{1}{10} \right)^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^{100}}{1 - \frac{1}{10}} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{5}{9}$$

Jos $|q| < 1$, niin ärettömän geometrisen sarjan summa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

Todistus: Jos $|q| < 1$, niin $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q}$ $\square$

Esimerkki: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

10.3 Yksinkertainen korkolasku

Tarkastellaan tilannetta, jossa pääomalle maksetaan korkoa. Käytetään merkintöjä:

K_0	= alkupääoma
p	= korkoprosentti
$i = \frac{p}{100}$	= korkokanta
t	= aika korkojaksoina
p.a.	= korkojaksona vuosi (per annum)
p.s.	= korkojaksona puoli vuotta (per semester)
p.q.	= korkojaksona neljännesvuosi (per quartal)
$\Delta K = itK_0$	= pääoman lisäys eli korko
$K_t = K_0(1 + it)$	= kasvanut pääoma

Esimerkki 10.3.1: Tarkastellaan esimerkkinä tilannetta, jossa 1000 markan alkupääomalle maksetaan 12% (p.a.) korko ajalta 13.3. - 4.7.

Saksalainen korkolasku. Saksalaisessa käytännössä katsotaan, että vuodessa on 360 päivää ja kuukaudessa 30 päivää. Korkoaika on siis

maaliskuussa	17 pv	
huhti - kesäkuu	3 · 30 pv = 90 pv	
heinäkuu	4 pv	
		yhteensä 111 pv
$t = \frac{111}{360}$	Siis korko on $\Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{111}{360} \cdot 1000 \text{ mk} = 37 \text{ mk}$	

Englantilainen korkolasku. Lasketaan todelliset kalenteripäivät ja katsotaan vuoden pituudeksi 365 päivää. Silloin

maaliskuussa	18 pv	
huhti-kesäkuussa	30 + 31 + 30 pv	
heinäkuussa	4 pv	
		yhteensä 113 pv
$t = \frac{113}{365}$	Siis korko on $\Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{113}{365} \cdot 1000 \text{ mk} = 37,15 \text{ mk}$	

Ranskalainen korkolasku. (Ranska, Espanja, Italia, Belgia, Hollanti, Itävalta, USA)

Lasketaan todelliset kalenteripäivät ja katsotaan vuoden pituudeksi 360 päivää. Silloin

$$t = \frac{113}{360} \quad \text{Siis korko on } \Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{113}{360} \cdot 1000 \text{ mk} = 37,67 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.3.2: Lasketaan 5200 mk:n alkupääomalle 12% (p.a.) korko 5 kuukauden ajalta. Nyt $t = \frac{5}{12}$ ja $\Delta K = itK_0 = 0.12 \cdot \frac{5}{12} \cdot 5200 \text{ mk} = 260 \text{ mk}$

Esimerkki 10.3.3: Henkilö säästää kalenterivuoden jokaisen kuukauden alussa 100 mk.

Mikä on pääoman arvo vuoden lopussa? ($p = 5\%$ (p.a.))

Merkitään $a = 100 \text{ mk}$. Ensimmäiselle säästetylle erälle korkoaika on 12/12, toiselle 11/12 jne.

Siis pääoman arvo on

$$\begin{aligned} & a(1 + i \frac{12}{12}) + a(1 + i \frac{11}{12}) + a(1 + i \frac{10}{12}) + \dots + a(1 + i \frac{1}{12}) \\ &= 12a + \frac{ai}{12}(12 + 11 + 10 + \dots + 1) = 12a + \frac{ai}{12} \cdot 12 \cdot \frac{1+12}{2} = 12a + a \cdot i \cdot \frac{13}{2} \\ & 12 \cdot 100 \text{ mk} + 100 \text{ mk} \cdot 0.05 \cdot \frac{13}{2} = 1232,50 \text{ mk}. \end{aligned}$$

10.4 Koronkorkolasku, prolongointi ja diskonttaus

Kun yksinkertaista korkoa on laskettu sovitun ajanjakson loppuun, korko lisätään pääomaan. Uuden jakson alkaessa korkoa aletaan laskea kasvaneelle pääomalle.

pääoma alussa	K_0
pääoma 1. jakson kuluttua	$K_1 = (1+i) K_0$
pääoma 2. jakson kuluttua	$K_2 = (1+i) K_1 = (1+i)^2 K_0$
pääoma 3. jakson kuluttua	$K_3 = (1+i) K_2 = (1+i)^3 K_0$
$\vdots$	$\vdots$
pääoma n . jakson kuluttua	$K_n = (1+i) K_{n-1} = (1+i)^n K_0$

Merkitään

$r = 1 + i$ = korkotekijä

$r^n = (1+i)^n$ = prolongointitekijä

$$K_n = r^n K_0$$

$v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$ = diskonttaustekijä

$$K_0 = v^n K_n$$

Esimerkki 10.4.1: Yrittäjä tietää joutuvansa 5 vuoden kuluttua suorittamaan 25 000 markan maksun. Koska yrittäjällä juuri nyt sattuu olemaan rahaa, hän sijoittaa 5 vuoden määräaikaistilille ($p = 10\%$) alkupääoman siten, että viiden vuoden kuluttu hän kasvaneella pääomalla saa maksun suoritettua. Tarvittava alkupääoma on

$$K_0 = v^5 K_5 = \frac{1}{1,10^5} \cdot 25\,000 \text{ mk} = 15\,523 \text{ mk}$$

Sanomme, että tarvittava alkupääoma on maksun nykyarvo ja että nykyarvo saadaan diskonttaamalla maksu nykyhetkeen. Nykyarvo riippuu korkokannasta i .

Esimerkki 10.4.2: Määritä 1000 mk:n loppupääoma 5 vuoden kuluttua, jos korko on a) 8 % p.a. b) 4 % p.s. c) 2 % p.q.

$$\text{a) } K_5 = r^5 K_0 = 1,08^5 \cdot 1\,000 \text{ mk} = 1\,469 \text{ mk}$$

$$b) K_{10} = r^{10} K_0 = 1,04^{10} \cdot 1000 \text{ mk} = 1480 \text{ mk}$$

$$c) K_{20} = r^{20} K_0 = 1,02^{20} \cdot 1000 \text{ mk} = 1486 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.4.3: Mikä on ollut alkupääoma, kun loppupääoma on 10 000 mk, korkokanta

12 % p.a. ja korkoaika 10 vuotta?

$$\begin{aligned} K_0 &= v^{10} K_{10} = \frac{1}{(1+i)^{10}} K_{10} \\ &= \frac{1}{1,12^{10}} \cdot 10\,000 \text{ mk} = 3219,73 \text{ mk} \end{aligned}$$

Seuraavaksi laskemme korkokannan, kun alkupääoma ja kasvanut pääoma tunnetaan.

$$\begin{aligned} K_n &= (1+i)^n K_0 \Leftrightarrow (1+i)^n = K_n/K_0 \\ &\Leftrightarrow \text{korkotekijä} = 1+i = \sqrt[n]{K_n/K_0} \\ &\Leftrightarrow \text{korkokanta} = i = \sqrt[n]{K_n/K_0} - 1 \end{aligned}$$

Jos n :nnen juuren laskeminen laskimella tuottaa vaikeuksia, niin silloin kannattaa soveltaa seuraavaa yleistä periaatetta:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\ln(a^{\frac{1}{n}})} = e^{\frac{1}{n} \ln(a)} = e^{\frac{\ln(a)}{n}} = \exp\left(\frac{\ln(a)}{n}\right)$$

eli tässä tapauksessa: $\text{korkokanta} = i = \exp\left(\frac{\ln(K_n/K_0)}{n}\right) - 1$

Esimerkki 10.4.4: Mikä on vuotuinen korkokanta, kun 10 000 mk alkupääoma kasvaa 6 vuodessa arvoon 18 958,30 mk?

$$i = \sqrt[6]{18958,3/10\,000} - 1 = 0,1125$$

Korkokanta on siis $i = 0,1125$ ja korkoprosentti siis $p = 11,25 \%$.

Seuraava esimerkki motivoi sitä seuraavat määritelmät:

Esimerkki 10.4.5: Tarkastellaan tilannetta, jossa alkupääomalle maksetaan korkoa 6 % p.a. Nyt kuitenkin sovitaan, että korko maksetaan kuukausittain. Yksinkertaisen korkolaskun kaavojen mukaan kuukauden lopussa maksetaan pääomalle K korko

$$\Delta K = itK = 0,06 \cdot \frac{1}{12} \cdot K = 0,005 \cdot K$$

Kuukausittain maksetaan siis 0,5 %:n korko. ($0,5 \% = 6 \% / 12$) Jos tilillä on vuoden alussa alkupääoma K_0 , niin vuoden lopussa kasvanut pääoma on

$$K_{12} = 1,005^{12} \cdot K_0 = 1,06168 \cdot K_0$$

Kasvanut pääoma vastaa siis tilannetta, jossa korko laskettaisiin kerran vuodessa korkoprosentin 6,168 mukaisesti. Sanomme, että edellä kuvatussa tilanteessa vuotuinen nimelliskorko on 6 % ja vuotuinen efektiivinen korko on 6,168 %.

Jos pääomalle maksetaan n kertaa vuodessa p % korkoa, niin vuotuinen efektiivinen korko on se kerran vuodessa maksettava korko, joka johtaa yhtä suureen pääoman kasvuun. Efektiivinen korko saadaan seuraavasti:

$$\text{efektiivinen korkotekijä} = 1 + i_e = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\text{efektiivinen korkokanta} = i_e = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1$$

$$\text{efektiivinen korkoprosentti} = p_e = 100 \cdot i_e$$

Jos sovitaan vuotuinen nimellinen korkokanta i , mutta korko maksetaankin n kertaa vuodessa, niin vuotuinen efektiivinen korkokanta saadaan seuraavasti

$$\text{efektiivinen korkokanta} = i_e = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

Esimerkki 10.4.6: Lainasta maksetaan viikottain 1 %:n korko. Kun katsomme, että vuodessa on 52 viikkoa, niin tehty sopimus vastaa vuotuista nimelliskorkoa 52 %. Toisaalta vuotuinen efektiivinen korkokanta on $i_e = 1,01^{52} - 1 = 1,678$, joten efektiivinen korko on siis 167,8 %.

10.5 Jaksolliset suoritukset

Tarkastellaan tilannetta, jossa asiakas tallettaa pankkitilille toistuvasti yhtäsuuren rahasumman k aina korkojakson lopussa. Asiakas suorittaa talletuksen n kertaa. Lasketaan tilillä oleva pääoma n :nnen jakson lopussa. Olkoon korkotekijä $r = 1 + i$, silloin kasvanut pääoma on

$$\begin{aligned} 1. \text{ jakson lopussa } K_1 &= k \\ 2. \text{ jakson lopussa } K_2 &= k + rK_1 = k + rk \\ 3. \text{ jakson lopussa } K_3 &= k + rK_2 = k + rk + r^2k \\ &\vdots \\ n. \text{ jakson lopussa } K_n &= k + rK_{n-1} = k + rk + r^2k + \dots + r^{n-1}k \quad (\text{geom. sarja!}) \end{aligned}$$

Kasvanut pääoma n . jakson lopussa saadaan siis geometrisen sarjan summana

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{k(1-r^n)}{1-r} = \frac{k(r^n-1)}{r-1} \\ &= k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \end{aligned}$$

Seuraavaksi laskemme, miten suuri alkupääoma K_0 pitää tilille tallettaa 1. jakson alussa, jotta pääoma (ilman muita talletuksia) olisi n . jakson lopussa K_n eli sama kuin jaksollisten talletusten tapauksessa. Tarvittava alkupääoma saadaan diskonttaamalla loppupääoma K_n

1. jakson alkuun eli

$$\begin{aligned} K_0 &= v^n K_n = \frac{1}{(1+i)^n} K_n \\ &= k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \end{aligned}$$

Sanomme, että K_n on jaksollisen maksusarjan arvo n . jakson lopussa eli n . jakson loppuun prolongoitu arvo. Vastaavasti K_0 on jaksollisen maksusarjan arvo 1. jakson alussa eli 1. jakson alkuun diskontattu arvo.

Merkitään

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \text{jakson lopussa suorittettujen yhtäsuurten maksujen}$$

prolongointitekijä

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \text{jakson lopussa suorittettujen yhtäsuurten maksujen}$$

diskonttaustekijä

jolloin

$$\text{pääoma } n. \text{ jakson lopussa} = K_n = k \cdot s_{\overline{n}|i}$$

$$\text{maksusarjan nykyarvo} = K_0 = k \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Esimerkki 10.5.1: Asiakas aikoo säästää 10 vuoden ajan siten, että jokaisen vuoden lopussa hän tallettaa säästötilille saman suuruisen rahamäärän k . Asiakkaan tavoite on, että 10. vuoden lopussa tilillä on 100 000 mk. Miten suuri tulee kertatalletuksen k olla, kun tilille maksettava korko on 10 % p.a.?

Nyt siis $n = 10$, $K_n = K_{10} = 100\,000$ mk ja $i = 0,10$.

$$\begin{aligned} K_n &= k \cdot s_{\overline{n}|i} \Leftrightarrow k = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \cdot K_n \\ &\Leftrightarrow k = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot K_n \\ &\Leftrightarrow k = \frac{0,10}{1,10^{10} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 6\,274,55 \text{ mk} \end{aligned}$$

Annuiteettilaina.

Asiakas lainaa pankista summan K_0 ja kuolettaa lainan maksamalla n kertaa samansuuruisen kuoletuserän, annuiteetin k . Annuiteetit maksetaan aina korkojakson lopussa ja se osa annuiteetista, joka ylittää koron, lyhentää lainaa. Sitä mukaa kun korko vähenee kasvaa lyhennyksen osuus kuoletuserästä. Seuraava taulukko kuvaa annuiteettilainan hoitoa, kun korkokanta on i ja korkotekijä $r = 1 + i$

korko- jakso	lainan määrä jakson alussa	korko	lyhennys	lainan määrä jakson lopussa
1	K_0	iK_0	$k - iK_0$	$K_0 - (k - iK_0) = rK_0 - k$
2	$K_1 = rK_0 - k$	iK_1	$k - iK_1$	$K_1 - (k - iK_1) = rK_1 - k$
3	$K_2 = rK_1 - k$	iK_2	$k - iK_2$	$K_2 - (k - iK_2) = rK_2 - k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

eli

korko- jakso	lainan määrä jakson lopussa
1	$rK_0 - k$
2	$rK_1 - k = r^2K_0 - rk - k$
3	$rK_2 - k = r^3K_0 - r^2k - rk - k$
$\vdots$	$\vdots$
n	$rK_{n-1} - k = r^nK_0 - r^{n-1}k - r^{n-2}k - \dots - rk - k$ $= r^nK_0 - \left(k \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \right) = 0$

Laina tulee kuolettua n jakson kuluessa, jos

$$\begin{aligned}
 r^n K_0 - \left(k \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \right) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{(1-r)r^n}{1-r^n} K_0 \\
 &\Leftrightarrow \quad k = \frac{(r-1)r^n}{r^n-1} K_0 \\
 &\Leftrightarrow \quad k = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} K_0
 \end{aligned}$$

Saamme seuraavan tuloksen

Jos annuiteetilainan määrä on K_0 , korkojaksojen lukumäärä n ja korkokanta i , niin

$$\text{kuoletuserä} = k = c_{\overline{n}|i} \cdot K_0,$$

missä

$$\text{kuoletuskerroin } c_{\overline{n}|i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Esimerkki 10.5.2: Asiakas ottaa 100 000 mk:n annuiteetilainan. Laina-aika on 10 vuotta ja korko 10 %. Mikä on kuoletuserä, kun lainaa lyhennetään kerran vuodessa?

$$k = c_{\overline{n}|i} \cdot K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 = \frac{0,10 \cdot (1,10)^{10}}{(1,10)^{10} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 16\,274,55 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.5.3: Lyhennetään edellisen esimerkin lainaa kuukausittain. Silloin korkojaksoja on $n = 120$ ja korkokanta on $\frac{0,10}{12}$. Siis

$$k = c_{\overline{n}|i} \cdot K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 = \frac{\frac{0,10}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120}}{\left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 1321,51 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.5.4: Asiakas lainaa pankista 100 000 mk ja sopii maksavansa lainan korkoineen 10 vuoden kuluttua (korko 10 %). Selviytyäkseen lainan maksusta hän alkaa välittömästi säästää. Hän avaa tilin (jonka korko on 10 %) ja alkaa tallettaa kuukausittain tilille tasaerän k siten, että 10 vuoden kuluttua hän kasvaneella pääomalla maksaa lainan pois. Määritä k .

Merkitään lainan määrää K_0 :lla. Korkojaksojen määrä on $12 \cdot 10 = 120$ ja kuukausittainen korkokanta on $i = 0,10/12$. Esimerkin 10.5.1 mukaisesti

$$\begin{aligned} k \cdot s_{\overline{n}|i} &= K_n = r^n K_0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{r^n}{s_{\overline{n}|i}} K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} K_0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\frac{0,10}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120}}{\left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{120} - 1} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 1321,51 \text{ mk} \end{aligned}$$

Osamaksukauppa.

Tarkastellaan kauppaa, jossa asiakas ostaa tavarat, jonka käteishinta on H . Kauppias ja asiakas sopii, että kaupantekohetkellä suoritetaan käsiraha h ja sen jälkeen n kertaa kuukauden välein osamaksuerä k . Vuotuinen nimelliskorko on $p\%$.

Periaatteessa eräs tapa hoitaa käytännön järjestelyt on seuraava. Kauppias ottaa pankista osamaksuvelkaa $K_0 = H - h$ vastaavan annuiteettilainan, ja asiakas kuolettaa lainan osamaksuilla. Siis

$$k = c_{\overline{n}|i} K_0 = c_{\overline{n}|i} (H - h), \quad \text{missä } i = \frac{p}{12 \cdot 100}$$

Käytännössä lainan järjestävä rahoitusyhtiö perii osamaksulisän m , joka sisältää korvauksen vakuusprovisiosta (n. 3 - 5 % osamaksuvelasta), luottoriskistä (n. 1 - 2 % osamaksuvelasta), luottotieto-, lomake-, ym. kustannukset sekä liikevaihtovero. Siis

$$k = c_{\overline{n}|i} (K_0 + m) = c_{\overline{n}|i} (H - h + m)$$

Esimerkki 10.5.5: Asiakas ostaa auton, jonka käteishinta olisi 40 000 mk, osamaksulla siten, että käsiraha on 20%, laina-aika 18 kk ja osamaksulisä 2 000 mk. Vuotuinen nimelliskorko on 16 % ja osamaksut ja korko suoritetaan kuukausittain.

Käsiraha on siis $h = 0,20 \cdot 40\,000 \text{ mk} = 8\,000 \text{ mk}$. Osamaksuilla kuolettavan lainan määrä on $H - h + m = 40\,000 \text{ mk} - 8\,000 \text{ mk} + 2\,000 \text{ mk} = 34\,000 \text{ mk}$. Osamaksuerä (korkojaksoja) on 18 kappaletta ja korkokanta on $i = 0,16/12$.

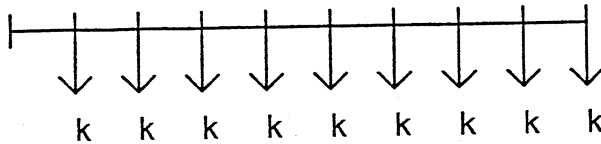
$$k = c_{\overline{n}|i} (H - h + m) = c_{\overline{18}|\frac{0,16}{12}} \cdot 34\,000 \text{ mk} = \frac{\frac{0,16}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{18}}{\left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{18} - 1} \cdot 34\,000 \text{ mk} = 2137,15 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.5.6: Asiakas ostaa veneen maksaen käsirahan 4 000 mk ja kuukausittain osamaksuerän 1 400 mk vuoden ajan. Osamaksulisä on 1 200 mk ja vuotuinen nimelliskorko on 15 %. Laske käteishinta.

$$k = c_{\overline{n}|i} (H - h + m) \Leftrightarrow H = \frac{1}{c_{\overline{n}|i}} \cdot k + h - m$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} - 1}{\frac{0,15}{12} \cdot \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12}} \cdot 1400 \text{ mk} + 4000 \text{ mk} - 1200 \text{ mk} = 18\,310,66 \text{ mk}$$

Yhteenveto:



$K_n = s_{\overline{n} i} \cdot k$	$s_{\overline{n} i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	prolongointitekijä
$K_0 = a_{\overline{n} i} \cdot k$	$a_{\overline{n} i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$	diskonttaustekijä
$k = c_{\overline{n} i} \cdot K_0$	$c_{\overline{n} i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{a_{\overline{n} i}}$	kuoletustekijä

10.6 Nykyarvo

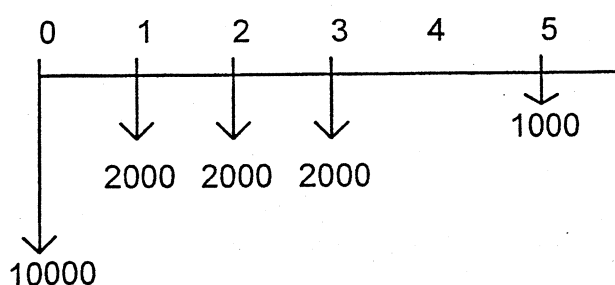
Maksuvirran nykyarvo

Yritys joutuu maksamaan seuraavan n vuoden aikana kunkin vuoden lopussa maksun $k_t, t = 1, 2, \dots, n$ (maksut voivat nyt olla eri suuruksia eri vuosina). Yritys siirtää maksuvirran nykyhetkeen tallettamalla kerralla pankkitilille sellaisen rahasumman K_0 , että sen kasvaneella pääomalla voidaan kukin maksu aikanaan hoitaa. Jos pankkitilille talletetulle pääomalle maksettava korko on p %, jolloin $i = p/100$, niin

$$K_0 = \frac{k_1}{1+i} + \frac{k_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{k_n}{(1+i)^n}$$

Summan ensimmäinen termi vastaa rahaerää, jonka kasvanut pääoma vuoden kuluttua on k_1 . Summan toinen termi vastaa rahaerää, jonka kasvanut pääoma kahden vuoden kuluttua on k_2 . Summa kokonaisuudessaan vastaa siis sitä alkupääomaa, jonka kasvaneella arvolla voidaan koko maksuvirta hoitaa. Summa on maksuvirran nykyarvo ja se saadaan diskonttaamalla maksut nykyhetkeen.

Esimerkki 10.6.1: Yritys joutuu maksamaan heti 10 000 mk, seuraavan kolmen vuoden lopussa 2 000 mk ja vielä viidennen vuoden lopussa 1 000 mk. Laske maksuvirran nykyarvo, kun laskentakorko on 16%.



$$\begin{aligned} K_0 &= 10\,000 \text{ mk} + \frac{2000 \text{ mk}}{1,16} + \frac{2000 \text{ mk}}{1,16^2} + \frac{2000 \text{ mk}}{1,16^3} + \frac{1000 \text{ mk}}{1,16^5} \\ &= 10\,000 \text{ mk} + 1\,724,14 \text{ mk} + 1\,486,33 \text{ mk} + 1\,281,32 \text{ mk} + 476,11 \text{ mk} \\ &= 14\,967,89 \text{ mk} \end{aligned}$$

Tulovirran nykyarvo

Yritys tulee saamaan seuraavan n vuoden aikana kunkin vuoden lopussa tulon $k_t, t = 1, 2, \dots, n$ (tulot voivat nyt olla eri suuruisia eri vuosina). Yritys siirtää tulovirran nykyhetkeen ottamalla pankista lainan K_0 siten, että luvassa olevan tulovirran avulla laina saadaan kuoletettua. Jos lainan korko on p %, jolloin $i = p/100$, niin

$$K_0 = \frac{k_1}{1+i} + \frac{k_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{k_n}{(1+i)^n}$$

Summan ensimmäinen termi vastaa lainaerää, jonka kasvanut pääoma (laina + korko) vuoden kuluttua on k_1 . Summan toinen termi vastaa lainaerää, jonka kasvanut pääoma (laina + korko) kahden vuoden kuluttua on k_2 . Summa kokonaisuudessaan vastaa siis sitä lainaa, joka voidaan kuolettaa tulossa olevalla tulovirralla. Summa on tulovirran nykyarvo ja se saadaan diskonttaamalla tulot nykyhetkeen.

Esimerkki 10.6.2: Yrityksellä on kaksi toimintavaihtoehtoa. Vaihtoehto A antaa seuraavan kolmen vuoden lopussa tulot 2 000 mk, 1 500 mk ja 4 000 mk. Vaihtoehto B antaa vuoden lopussa tulon 4 000 mk ja viiden vuoden kuluttua vielä 4 000 mk. Laske tulovirtojen nykyarvot, kun laskentakorko on 10 %.

$$\text{A: } PV_A = \frac{2\,000 \text{ mk}}{1,10} + \frac{1\,500 \text{ mk}}{1,10^2} + \frac{4\,000 \text{ mk}}{1,10^3} = 6\,063,11 \text{ mk}$$

$$\text{B: } PV_B = \frac{4\,000 \text{ mk}}{1,10} + \frac{4\,000 \text{ mk}}{1,10^5} = 6\,120,05 \text{ mk}$$

Esimerkki 10.6.3: Toistetaan äskeinen lasku, kun laskentakorko on 20 %.

$$\text{A: } PV_A = \frac{2\,000 \text{ mk}}{1,20} + \frac{1\,500 \text{ mk}}{1,20^2} + \frac{4\,000 \text{ mk}}{1,20^3} = 5\,023,15 \text{ mk}$$

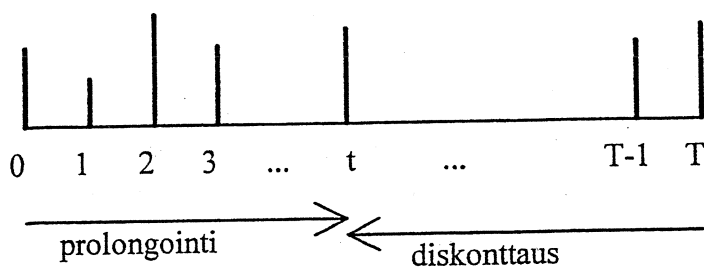
$$\text{B: } PV_B = \frac{4\,000 \text{ mk}}{1,20} + \frac{4\,000 \text{ mk}}{1,20^5} = 4\,940,84 \text{ mk}$$

Laskentakoron kasvu vaikuttaa siis eri tulovirtojen nykyarvojen paremmuusjärjestykseen!

Kassavirran nettonykyarvo NA (NPV = Net Present Value)

Tarkastellaan kassavirtoja olettaen, että kassaan tulee rahaa (tulo) tai sieltä menee rahaa (meno) ajankohtina $j = 0, 1, 2, \dots, T$. Kassan nettomuutoksia merkitään $k_0, k_1, \dots, k_T$. Tulo on positiivinen muutos ja meno on negatiivinen muutos. Olkoon peräkkäisten ajankohtien väliseen jaksoon liittyvä korkotekijä r ja vastaava korkokanta i .

Kassavirran nykyarvo hetkellä t saadaan prolongoimalla aiemmat kassatapahtumat hetkeen t ja diskonttaamalla myöhemmät kassatapahtumat hetkeen t



$$\begin{aligned}
 NA_t &= k_0 r^t + k_1 r^{t-1} + \dots + k_{t-1} r + k_t + \frac{k_{t+1}}{r} + \frac{k_{t+2}}{r^2} + \dots + \frac{k_T}{r^{T-t}} \\
 &= \sum_{j=0}^T k_j r^{t-j}
 \end{aligned}$$

Alkuarvo on

$$NA_0 = \sum_{j=0}^T k_j r^{-j} = \sum_{j=0}^T \frac{k_j}{r^j} = \sum_{j=0}^T \frac{k_j}{(1+i)^j}$$

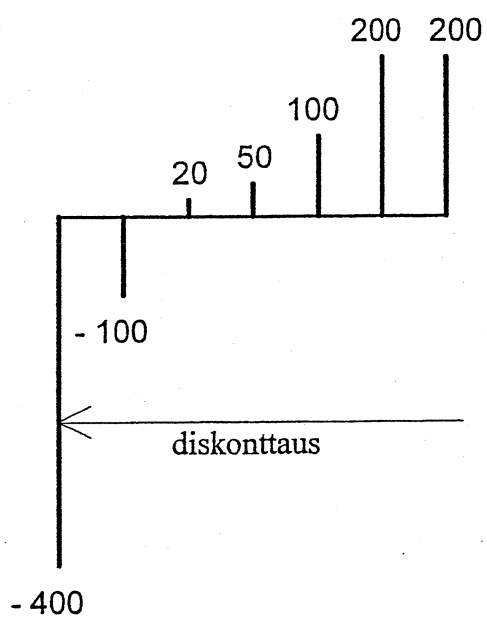
Loppuarvo on

$$NA_T = \sum_{j=0}^T k_j r^{T-j} = r^T \sum_{j=0}^T k_j r^{-j} = r^T \cdot NA_0$$

Esimerkki 10.6.4: Tarkastellaan taulukon mukaista kassavirtaa, kun jaksoihin liittyvä korkotekijä on $r = 1,02$. Laske a) NA_0 b) NA_3

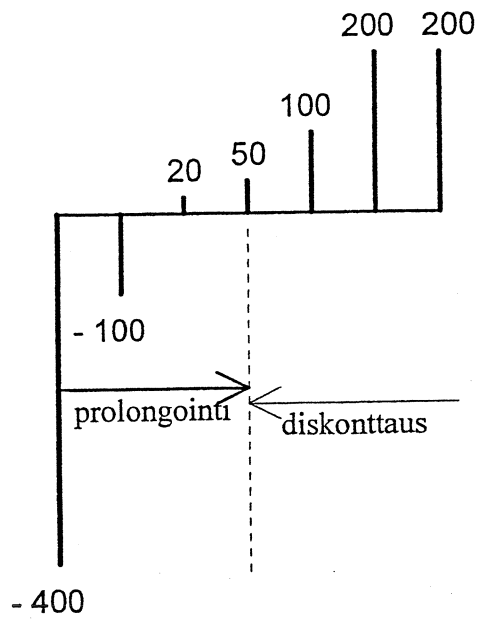
i	k_j
0	- 400 (meno)
1	- 100 (meno)
2	+ 20 (tulo)
3	+ 50 (tulo)
4	+ 100 (tulo)
5	+ 200 (tulo)
6	+ 200 (tulo)

a)



$$NA_0 = -400 - \frac{100}{1,02} + \frac{20}{1,02^2} + \frac{50}{1,02^3} + \frac{100}{1,02^4} + \frac{200}{1,02^5} + \frac{200}{1,02^6} = 19,43$$

b)



$$NA_3 = -1,02^3 \cdot 400 - 1,02^2 \cdot 100 + 1,02 \cdot 20 + 50 + \frac{100}{1,02} + \frac{200}{1,02^2} + \frac{200}{1,02^3} = 20,61$$

Saman asian voi laskea myös seuraavasti:

$$NA_3 = r^3 NA_0 = (1,02)^3 \cdot 19,426 = 20,61$$

Siis nykyarvo hetkellä 3 saadaan prolongoimalla alkuarvo kolmen jakson yli.

10.7 Investoinnin nykyarvo

Tyypillinen teollinen investointiprojekti aiheuttaa kassavirtoja, jotka alussa ovat negatiivisia (menoja) ja lopussa positiivisia (tuloja). Jos yritys esimerkiksi hankkii uuden koneen, muodostaa koneen ostohinta perusinvestoinnin. Perusinvestointi saattaa joskus sisältää myös suunnittelu- ja koulutuskuluja. Koneen saaminen tuottavaan työhön kestää normaalisti jonkin aikaa. Siten ensimmäiset jaksot perusinvestoinnin jälkeen saattavat aiheuttaa negatiivisia kassavirtoja. Kun kone on saatu täysin tuottavaksi, se alkaa tuottaa tuloa. Kun kone lopulta poistetaan käytöstä, se joko myydään käytettynä tai romutetaan. Tästä saatua tuloa sanotaan jäännösarvoksi pitoajan lopussa. Investoinnista syntyneiden kassavirtojen nettonykyarvoa sanotaan investoinnin nykyarvoksi.

Olkoon

- H = perusinvestointi
- n = investoinnin pitoaika (vuosia)
- JA_n = investoinnin jäännösarvo pitoajan lopussa
- k_t = investoinnin synnyttämä nettotulo vuonna t
- i = laskentakorko(kanta)

Silloin investoinnin nykyarvo (alussa) on

$$NA_0 = \sum_{t=1}^n \frac{k_t}{(1+i)^t} + \frac{JA_n}{(1+i)^n} - H$$

$$NA = \text{nettotulovirran nykyarvo} + \text{jäännösarvon nykyarvo} - \text{perusinvestointi.}$$

Karkea yleissääntö on, että investointi on kannattava, jos sen nykyarvo on positiivinen. Jos yrityksellä on useita investointivaihtoehtoja, niin eräs karkea yleissääntö on, että ensin kannattaa käynnistää se investointi, jonka nykyarvo on suurin.

Laskelmassa käytetty korkokanta ei yleensä ole diskonttokorko, joka kuvaa sitä, miten asiallisesti sijoitetulle pääomalle keskimäärin kertyy korkoa. Korkoa sanotaan laskentakoroksi ja siihen vaikuttavia seikkoja ovat

- 1) lainakorko (se korko, jolla yritys saa lainaa)
- 2) oman ja vieraan pääoman kustannukset
- 3) toiminnalle asetettu tuottovaatimus.

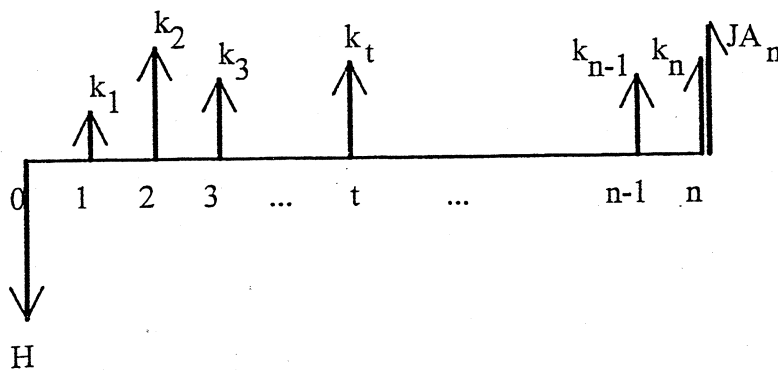
Jos yritys käyttää laskentakorkona yleistä lainakorkoa lisättynä sopivalla varmuuslisällä, niin se takaa sen, että kaikki käynnistyvät investoinnit ovat aloitushetken laskelmien perusteella hyvin kannattavia. Osa investoinneista aina epäonnistuu, mutta jos ne keskimäärin ovat kannattavia, niin yritys kestää muutaman epäonnistuneenkin.

10.8 Investoinnin sisäinen korkokanta

Investoinnin sisäinen korkokanta on se laskentakorko, jolla investoinnin nettonykyarvo on nolla. Investointi on tuottava (kannattava), jos sen sisäinen korkokanta on suuri. Yritys yleensä asettaa itselleen kriteerin, jonka mukaan investointiprojekteilta vaaditaan tietyn arvon ylittävä sisäinen korkokanta.

Sisäinen korkokanta ei ole ongelmaton käsite. Seuraavissa esimerkeissä tuodaan esiin selkeitä, mutta myös ongelmallisia esimerkkejä sisäisestä korkokannasta. Sisäinen korkokanta on erittäin yleisesti käytetty menetelmä investointien suunnittelussa, ja siksi menetelmä tulee osata.

Tarkastellaan pinvestointiprojektia, jonka perusinvestointi on H , pitoaika n , nettotulo kunkin jakson lopussa k_t , ja jännösarvo n :nnen jakson lopussa JA_n .

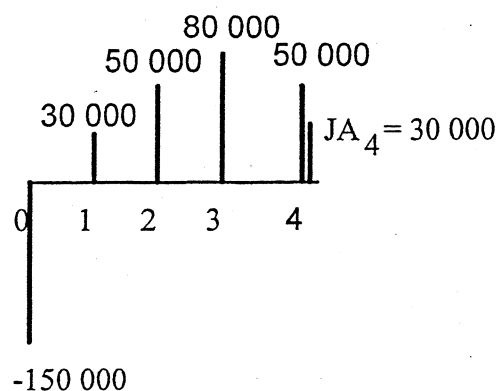


Sisäinen korkokanta on korkokanta i , jolle

$$NA_0 = -H + \sum_{t=1}^n \frac{k_t}{(1+i)^t} + \frac{JA_n}{(1+i)^n} = 0.$$

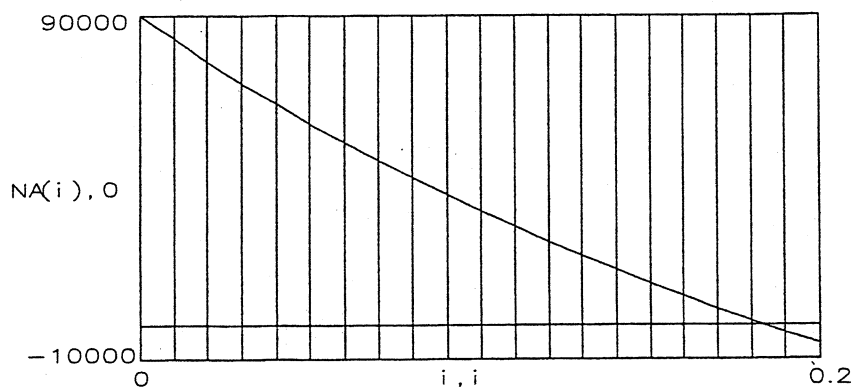
Sisäinen korkokanta saadaan helpoimmin selville piirtämällä nykyarvo laskentakoron funktiona. Sisäinen korkokanta saadaan kuvaajan nollakohtana. Jos tarkastelujaksoja on kaksi, niin sisäinen korkokanta saadaan ratkaistua toisen asteen yhtälöstä - tämä on kuitenkin melko harvinaista.

Esimerkki 10.8.1: Lasketaan sisäinen korkokanta investointiprojektille, jonka perusinvestointi on 150 000 mk, nettotulot neljän seuraavan vuoden lopussa ovat 30 000 mk, 50 000 mk, 80 000 mk ja 50 000 mk ja jäännösarvo neljännen vuoden lopussa on 30 000 mk.



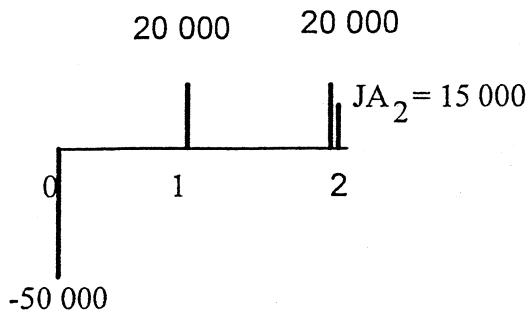
$$k := \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 50000 \\ 80000 \\ 50000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H := 150000 \quad JA := 30000 \quad n := 4$$

$$NA(i) := -H + \sum_t \left[\frac{k_t}{(1+i)^t} \right] + \frac{JA}{(1+i)^n}$$



Nykyarvon kuvaajasta nähdään, että sisäinen korkokanta on $i \approx 0,185$ (18,5 %).

Esimerkki 10.8.2: Tutkitaan investointia, jonka perusinvestointi on 50 000 mk ja kahden seuraavan vuoden lopussa tulevat tulot ovat 20 000 mk ja 20 000 mk ja jäännösarvo toisen vuoden lopussa on 25 000 mk.



Merkitään sisäiseen korkokantaan liittyvää korkotekijää r :llä. Sisäisen korkokannan määritelmä saa nyt muodon

$$-50\,000 + \frac{20\,000}{r} + \frac{20\,000}{r^2} + \frac{15\,000}{r^2} = 0 \quad \left| \cdot \frac{r^2}{5000} \right.$$

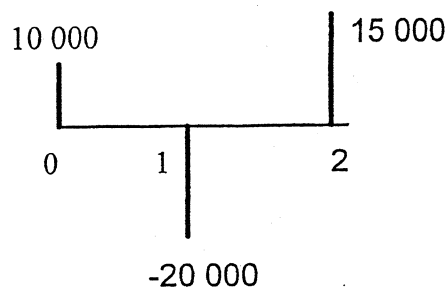
$$\Leftrightarrow -10r^2 + 4r + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-10) \cdot 7}}{2 \cdot (-10)} = \frac{-4 \pm \sqrt{296}}{-20}$$

$$\Leftrightarrow r = -0.660 \text{ tai } r = 1.060$$

Negatiivinen korkotekijä hylätään mielettömänä. Sisäinen korkokanta on siis $i = 0,060$ (6,0 %).

Esimerkki 10.8.3: Seuraavaksi tarkastelemme erikoista, mutta täysin mahdollista erikoistapausta. Toimittaja tekee lehtitalon kanssa sopimuksen olympialaisia käsittelevän kirjan tekemisestä. Sopimus solmitaan vuosi ennen kisoja ja toimittaja saa tällöin ensimmäisen osan palkkiostaan, 10 000 mk. Kisojen aikana toimittajalle koituu kisojen seuraamisesta 20 000 mk:n meno ja kun kirja valmistuu vuosi kisojen jälkeen, saa toimittaja loppuosan palkkiostaan, 15 000 mk.



$$10000 + \frac{-20000}{r} + \frac{15000}{r^2} = 0 \quad \left| \cdot \frac{r^2}{5000} \right.$$

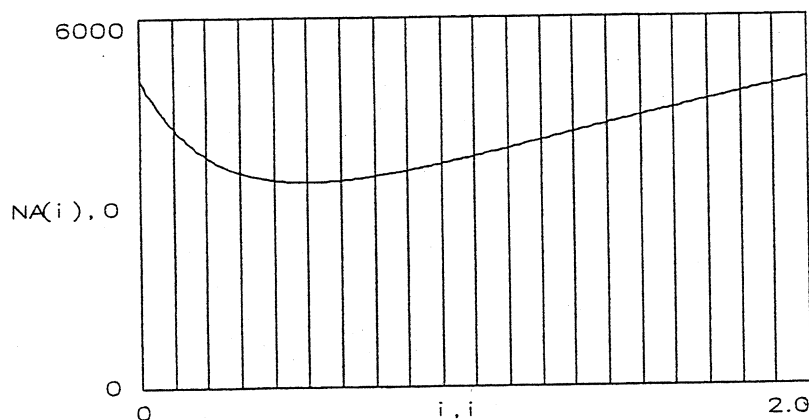
$$\Leftrightarrow 2r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{4}$$

Yhtälöllä ei siis ole reaalista juurta. Saman näkee piirtämällä nykyarvon laskentakoron funktiona.

$t := 0 \dots 5$ $i := 0, 0.01 \dots 2.0$

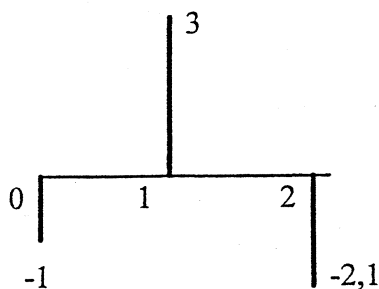
$$k := \begin{bmatrix} 10000 \\ -20000 \\ 15000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad NA(i) := \sum_t \left[\frac{k_t}{(1+i)^t} \right]$$



Projektin nykyarvo on siis positiivinen millä tahansa laskentakorolla. Tällöin sisäisen korkokannan määritelmältä putoaa pohja pois.

Esimerkki 10.8.4: Seuraavaksi tarkastellaan kemianteollisuuden investointia, jonka perusinvestointi on melko pieni ja ensimmäisen jakson lopussa saadaan suuri tulo. Toisen

jakson lopussa tuotantoprosessi puretaan, mikä aiheuttaa suuren menon. Kuvattu tilanne syntyy esimerkiksi myrkyllisten kemikaalien tuotantoprosessin siivoamisesta. Siivoamisesta aiheutuva suuri kertameno voidaan tulkita negatiivisena jäännösarvona tai perusinvestoinnin osana, joka lankeaa maksettavaksi vasta projektin lopussa.



$$\begin{aligned}
 -1 + \frac{3}{r} - \frac{2.1}{r^2} &= 0 \quad | \cdot r^2 \\
 \Leftrightarrow -r^2 + 3r - 2.1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2.1)}}{2 \cdot (-1)} &= \frac{-3 \pm \sqrt{0.6}}{-2} \\
 \Leftrightarrow r = 1.113 \text{ tai } r = 1.887
 \end{aligned}$$

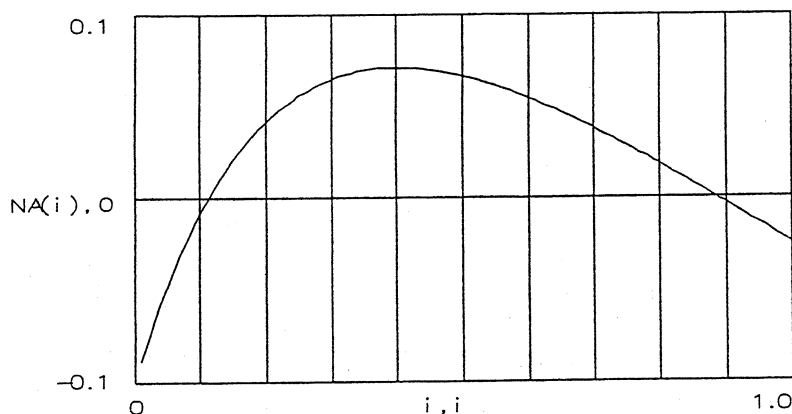
Juuri ei siis ole yksikäsitteinen. Saman havaitsee piirtämällä nykyarvon laskentakoron funktiona. (Ks. kuvaa seuraavan sivun alussa.)

Kaksi edellistä esimerkkiä ovat varoittavia. Sisäisen korkokannan laskemisessa tulee ongelmia, kun kassavirta vaihtaa merkkiä kaksi kertaa. Sisäinen korkokanta on yritysmaailmassa erittäin suosittu kannattavuuden mittari ja sen käyttö on turvallista, jos investointi täyttää seuraavat ehdot:

- (a) Investointi on "normaali investointi", jossa alkuvuosien menoja seuraa loppuvuosien tulot.
- (b) Laskentakorkokanta, joka heijastaa rahoituksen kustannuksia ja sijoitusmahdollisuuksia, pysyy koko tarkasteluajan vakiona.

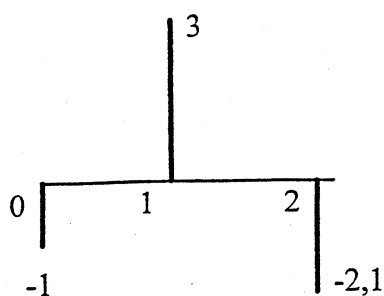
$t := 0 \dots 5$ $i := 0, 0.01 \dots 1.0$

$$k := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad NA(i) := \sum_t \left[\frac{k_t}{(1+i)^t} \right]$$

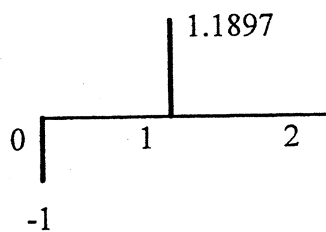


Eräs tapa korjata loppuvuosien menojen aiheuttama ongelma on diskontata kassavirtajonon loppupäästä kaikki negatiiviset kassavirrat ensimmäiseen sellaiseen vuoteen, jonka positiivisesta kassavirrasta ne voidaan vähentää siten, että erotus jää positiiviseksi. Näin saadaan kassavirran loppupään kassavirrat positiivisiksi, ja ongelmat poistuvat. Diskonttaus tapahtuu yrityksen käyttämän laskentakoron avulla, joten kyse ei ole puhtaasta sisäisen korkokannan menetelmästä. Menetelmää kutsutaan tarkistetun sisäisen korkokannan menetelmäksi.

Esimerkki 10.8.5: Lasketaan esimerkin 10.8.4 investoinnin sisäinen korkokanta tarkistetusti. Olkoon laskentakorko 16 %.



tarkistamaton kassavirta



tarkistettu kassavirta

Diskontataan toisen vuoden lopun meno -2,1 vuoden 1 loppuun ja vähennetään vuoden 1 lopun tulosta. Tarkistettu kassavirta on:

$$\begin{array}{ll} \text{heti} & -1 \\ \text{1. vuoden lopussa} & 3 - \frac{2.1}{1.16} = +1.189655 \end{array}$$

Tarkistettu sisäinen korkokanta saadaan yhtälöstä

$$-1 + \frac{1.1897}{1+i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i \approx 19$$

Vakio tulovirta, jäännösarvo = 0.

Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa $JA \approx 0$ ja $k_t \approx k = \text{vakio}$, $t = 1, \dots, n$. Sisäinen korkokanta saadaan nyt yhtälöstä

$$\begin{aligned} -H + \sum_{t=1}^n \frac{k}{(1+i)^t} &= 0 \\ \Leftrightarrow -H + a_{n|i} \cdot k &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n|i} &= \frac{H}{k} \quad \left(\Leftrightarrow c_{n|i} = \frac{k}{H} \right) \end{aligned}$$

Esimerkki 10.8.6: Olkoon perusinvestointi 100 000 mk, investoinnin pitoaika 20 vuotta ja koko pitoajan vakiona pysyvä tulovirta 15 000 mk (jokaisen vuoden lopussa). Määritä sisäinen korkokanta

Sisäinen korkokanta i määräytyy nyt yhtälöstä

$$a_{20|i} = \frac{H}{k} = \frac{100\,000}{15\,000} = 6,67$$

Tutkimalla "jakson lopussa suoritettujen yhtäsuurten maksujen diskonttaustekijän $a_{20|i}$ " taulukkoarvoja (seuraavalla sivulla), havaitaan, että tekijä saa lähinnä oikean arvon, kun korkokanta on $i = 0.14$ (14%).

10.9 Muita investoinnin kannattavuuden mittareita

Suhteellinen nykyarvo

Suhteellinen nykyarvo lasketaan toisella seuraavista kaavoista

$$SNA = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{k_t}{(1+i)^t} + \frac{JA_n}{(1+i)^n}}{H} \quad \text{tai}$$

$$SNA = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{k_t}{(1+i)^t}}{H - \frac{JA_n}{(1+i)^n}}$$

Kummassakin kaavassa lasketaan tulovirran nykyarvon suhde perusinvestointiin. Kaavojen ero syntyy siitä, että ensimmäisessä kaavassa jäännösarvo lasketaan tuloksi ja toisessa se lasketaan osaksi perusinvestoinnin kassavirtaa. Investointi on kannattava, jos $SNA > 1$. (Huomaa, että i on nyt laskentakorko.)

Annuiteettimenetelmä

Olkoon investoinnin synnyttämä tulovirta likimain vakio k (joka vuoden lopussa). Jos pitoaika on n ja perusinvestointi H , niin ajatellaan rahoittavamme investoinnin pitoajan mittaisella annuiteettilainalla. Silloin annuiteetti on

$$AN = c_{n|i} \left(H - \frac{JA_n}{(1+i)^n} \right).$$

Investointi on kannattava, jos $AN < k$. (Silloin tulovirralla voidaan hoitaa perusinvestoinnin rahoitus.)

ROI

ROI (Return On Investment) eli pääoman tuottoaste on tuloksen ja sidotun pääoman suhde.

$$ROI^I = \frac{\text{Nettotulos}}{\text{Keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

$$ROI^{II} = \frac{\text{Nettotulos}}{\text{Alussa sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

Investointi on kannattava, jos $ROI \geq i$, eli pääoman tuottoaste on vähintään kriteerinä olevan laskentakoron suuruinen.

Takaisinmaksuaika

Takaisinmaksuaika on se aika, jonka kuluessa saadun tulovirran nykyarvo on yhtä suuri kuin perusinvestointi.

Tarkastellaan vakiotulovirtaa k (jokaisen vuoden lopussa). Takaisinmaksuaika n^* toteuttaa yhtälön

$$\begin{aligned} a_{\overline{n^*}|i} \cdot k &= H \\ \Leftrightarrow \frac{(1+i)^{n^*} - 1}{i(1+i)^{n^*}} \cdot k &= H \\ \Leftrightarrow \frac{1 - (1+i)^{-n^*}}{i} \cdot k &= H \end{aligned}$$

Tästä yhtälöstä n^* voidaan ratkaista.

Investoinnin kannattavuutta selvittäessään yritykset käyttävät ensisijaisina menetelminä sisäistä korkokantaa, ROI:ta ja takaisinmaksuaikaa. Yleisesti käytettyinä, mutta yleensä toissijaisina menetelminä ovat nykyarvomenetelmä ja annuiteettimenetelmä.

10.10 Jatkuva korkolasku

Edellä on toistuvasti oletettu, että investointi tuottaa tuloa aina vuoden lopussa. Tämä on tietenkin epärealistista. Jos halutaan tarkempi tulos siirrytään laskelmassa kuukauden, viikon tai päivän mittaisiin jaksoihin.

Tarkastellaan tilannetta, jossa alkupääomalle K_0 maksetaan korkoa korolle. Olkoon nimellinen korkokanta ρ p.a., ja jaettakoon vuosi m korkojaksoon. Silloin pääoma kasvaa n korkojaksossa arvoon

$$K_n = \left(1 + \frac{\rho}{m}\right)^n K_0$$

n korkojaksoa vastaa vuosina mitattuna aikaa $t = n/m$. Siis

$$K_t = \left(1 + \frac{\rho}{m}\right)^{mt} K_0 = \left[\left(1 + \frac{\rho}{m}\right)^m\right]^t K_0$$

Merkitsemällä $\frac{m}{\rho} = z$ saadaan

$$K_t = \left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right]^{\rho t} K_0$$

Kun korkojaksojen lukumäärää m kasvatetaan rajatta, kasvaa myös z rajatta ja edellisen lausekkeen hakasulkeiden sisällä oleva osa lähestyy Neperin lukua $e \approx 2.71828\dots$

Siis

$$K_t = e^{\rho t} K_0. \quad (*)$$

Lukua ρ sanotaan korkointensiteetiksi ja se on eri asia, kuin korkokanta. Efektiivinen vuosikorkokanta i ja korkointensiteetti ρ liittyvät toisiinsa seuraavasti:

$$\begin{cases} K_1 = (1+i)K_0 \\ K_1 = e^{\rho} K_0 \end{cases} \Leftrightarrow (1+i) = e^{\rho} \Leftrightarrow i = e^{\rho} - 1 \Leftrightarrow \rho = \ln(1+i)$$

Kaava (*) voidaan siis myös kirjoittaa muotoon

$$K_t = (1+i)^t K_0$$

Seuraava taulukko kuvaa näiden kahden korkoluvun välistä eroa.

efektiivinen korkokanta i	korko- intensiteetti ρ	ρ	i
0.01	0.00995	0.01	0.01005
0.02	0.01980	0.02	0.02020
0.05	0.04879	0.05	0.05127
0.10	0.09531	0.10	0.10517
0.15	0.13976	0.15	0.16183
0.20	0.18232	0.20	0.22140
0.30	0.26236	0.30	0.34986

Jos korko on pieni, niin ero ei ole merkittävä. Koron kasvaessa erokin kasvaa.

Esimerkki 10.10.1: Olkoon efektiivinen vuosikorko 16 %. Laske kasvanut pääoma, kun korkoaika on 500 päivää ja alkupääoma 100 000 mk.

Vuodessa on 365 päivää, joten $t = \frac{500}{365}$.

Korkointensiteetti on $\rho = \ln(1 + i) = \ln(1.16) = 0.14842$.

Siis kasvanut pääoma voidaan laskea kaavoilla

$$K = e^{\rho t} \cdot K_0 = \exp\left(0.14842 \cdot \frac{500}{365}\right) \cdot 100\,000 \text{ mk} = 122\,546 \text{ mk}$$

tai

$$K = (1 + i)^t K_0 = (1.16)^{500/365} \cdot 100\,000 \text{ mk} = 122\,546 \text{ mk}$$

Integraalifunktio

Jos $F'(x) = f(x)$, niin sanomme, että $F(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio ja merkitsemme

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

Derivointikaavaa vastaa aina integrointikaava

$$F(x) = ax^n \rightarrow f(x) = anx^{n-1}$$
$$F(x) = \frac{a}{m+1} x^{m+1} \leftarrow f(x) = ax^m$$

7.10.2003

TMA.003 / L7

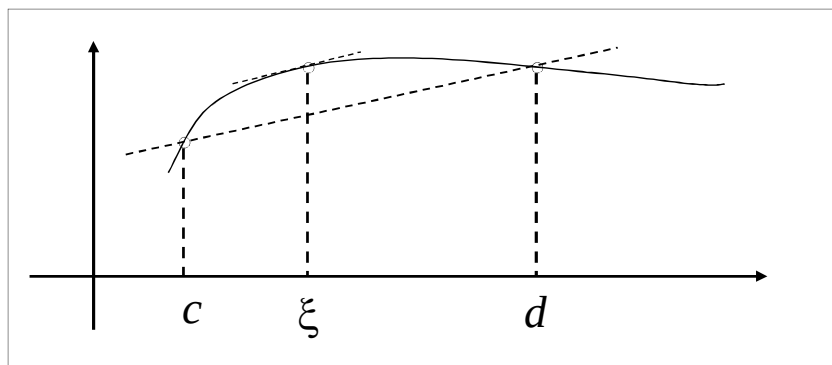
1

Lause 11.1.2: Jos jatkuvan funktion $f(x)$ derivaatta on nolla välillä $[a,b]$, niin funktio saa välillä vakioarvon ($f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv C$).

Todistus: Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa luvut $c, d \in [a,b]$ siten, että $f(c) \neq f(d)$. Koska f on jatkuva välillä $[c,d]$, on väliarvolauseen mukaan olemassa $\xi \in [c,d]$ siten, että

$$f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0.$$

Vastaoletus johti siis ristiriitaan lauseen oletusten kanssa. $\square$



7.10.2003

TMA.003 / L7
164

2

Lause 11.1.3: Jos $F(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio, niin kaikki $f(x)$:n integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + C$, missä C on vakio, ns. integroimisvakio.

Todistus: Olkoon $G(x)$ mielivaltainen $f(x)$:n integraalifunktio. Silloin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) &= G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \\ \Rightarrow G(x) - F(x) &= C \quad \Leftrightarrow \quad G(x) = F(x) + C \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 11.1.4:

- a) $\int 2x dx = x^2 + C$, sillä $D(x^2 + C) = 2x$
- b) $\int (x^2 + x + a) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + C$, sillä $D\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + C\right) = x^2 + x + a$
- c) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, sillä $D(-\cos x + C) = \sin x$

7.10.2003

TMA.003 / L7

3

Esimerkki 11.1.5: Määritä se funktion $f(x) = \cos x$ integraalifunktio, joka saa arvon 1, kun $x = 0$.

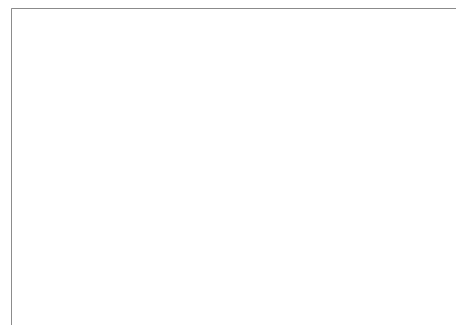
$$F(x) = \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \text{sillä } D(\sin x + C) = \cos x.$$

Integroimisvakion C pitää saada sellainen arvo, että tehtävän reunaehto $F(0) = 1$ toteutuu. Siis

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin 0 + C &= 1 \\ \Leftrightarrow 0 + C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= 1 \end{aligned}$$

ja

$$F(x) = \sin x + 1$$



7.10.2003

TMA.003 / L7
165

4

Integroimissääntöjä

$$(1) \quad \int a \, dx = ax + C, \text{ missä } a \text{ on vakio,}$$

$$\text{erityisesti} \quad \int dx = \int 1 \, dx = x + C$$

$$\int 0 \, dx = C$$

$$(2) \quad \int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \text{ kun } r \in \mathbb{R}, r \neq -1$$

$$(3) \quad \int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$(4) \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\left(\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \right)$$

$$(5) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(6) \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(7) \quad \int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

$$(8) \quad \int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

5

$$(9) \quad \int g(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = G(f(x)) + C$$

$$(9a) \quad \int [f(x)]^r \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{r+1} [f(x)]^{r+1} + C$$

$$(9b) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$(9c) \quad \int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$$

$$(10) \quad D\left(\int f(x) \, dx\right) = f(x) \quad (\text{määritelmä !!})$$

$$(11) \quad \int f'(x) \, dx = f(x) + C$$

Eräitä ohjeita: * Polynomi integroidaan termeittäin.

* Kerro turhat sulut pois ennen integrointia.

* Älä unohda integroimisvakiota.

Esimerkki 11.1.6:

a) Seuraava integrointi tehdään termeittäin

$$\int (7x^3 - 5x + 8) dx = \frac{7}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 8x + C$$

b) Poistetaan ensin turhat sulut

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x + 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

c) neliöjuuri = juurettava potenssiin puoli

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \cdot (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + 1/2} (x^3 + 1)^{1 + 1/2} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{3/2} + C$$

Esimerkki 11.1.7: Jos yrityksen rakustannusfunktio on $MC(q) = 5 + 0.1 \cdot q$, niin silloin kustannusfunktio on

$$C(q) = \int (5 + 0.1 \cdot q) dq = 5q + \frac{0.1}{2} \cdot q^2 + A = 5q + 0.05q^2 + A$$

Integroimisvakio C on nyt väärinkäsitysten välttämiseksi korvattu vakiolla A . Tarkkaan ottaen A on kiinteät kustannukset eli $A = FC$. (Huomaa, että "integrointi suoritetaan q :n suhteen".)

Esimerkki 11.1.8: Määritä kustannusfunktio, kun rajakustannus on $MC(q) = 6 + 0.02 \cdot q$ ja $C(100) = 1200$.

Vaihe I (kustannusfunktion määrittäminen integroimalla; yleinen muoto, jossa integroimisvakio)

$$\frac{d}{dq}(C(q)) = MC(q)$$

$$\Leftrightarrow C(q) = \int MC(q) dq$$

$$\Leftrightarrow C(q) = \int (6 + 0.02q) dq = 6q + 0.01q^2 + FC$$

Vaihe II (integroimisvakion määrittäminen, lisäehdon käyttö)

$$C(100) = 1200$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 100 + 0.01 \cdot 100^2 + FC = 1200$$

$$\Leftrightarrow 600 + 100 + FC = 1200$$

$$\Leftrightarrow FC = 500$$

Vaihe III (ratkaisu, lisäehdon toteuttava integraalifunktio)

$$C(q) = 6q + 0.01q^2 + 500$$

Vaihe IV (tarkastus)

$$\frac{d}{dq}(C(q)) = \frac{d}{dq}(6q + 0.01q^2 + 500) = 6 + 0.02q \quad \text{OK!}$$

$$C(100) = 6 \cdot 100 + 0.01 \cdot 100^2 + 500 = 1200 \quad \text{OK!}$$

7.10.2003

TMA.003 / L7

9

11.2 Integroimiskeinoja

Osittaisintegrointi

Lause 11.2.1: Jos f ja g ovat derivoituvia (ja siis jatkuvia), niin

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Todistus: Jätetään funktion argumentit pois. Tulon derivoitukaava saa muodon $D(fg) = f' \cdot g + f \cdot g'$. Lauseen yhtälö perustellaan derivoimalla yhtälön RHS.

$$D\left(fg - \int f'g dx\right) = D(fg) - f'g = fg' \quad \square$$

Muistisääntö:

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

7.10.2003

TMA.003 / L7
168

10

Esimerkki 11.2.2: Laske $\int x e^x dx$. Valitaan

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x \end{cases} \quad , \text{jolloin}$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

Esimerkki 11.2.3: Laske $\int \ln x \, dx$. Valitaan

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1/x \\ g(x) = x \end{cases}, \text{ jolloin}$$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \quad \boxed{}$$

7.10.2003

TMA.003 / L7

11

Integroiminen muuttujan vaihdon avulla

Integroimiskaava (9) sivu 169 voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon.

Jos $t = f(x)$, niin $\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int g(t) dt$

Muistisääntö:

$$\begin{array}{ll} g(f(x)) = g(t) & \text{sillä } t = f(x) \\ f'(x)dx = dt & \text{sillä } \frac{dt}{dx} = f'(x) \end{array}$$

7.10.2003

TMA.003 / L7
169

12

Esimerkki 11.2.5: Laske $\int x(3x^2 - 1)^5 dx$. Sijoitetaan uusi muuttuja

$$t = f(x) = 3x^2 - 1$$

$$dt = f'(x)dx = 6x dx \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot dx = \frac{1}{6} dt$$

$$\begin{aligned} \int x(3x^2 - 1)^5 dx &= \int t^5 \cdot \frac{1}{6} dt \\ &= \frac{1}{6} \int t^5 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{36} (3x^2 - 1)^6 + C \end{aligned}$$

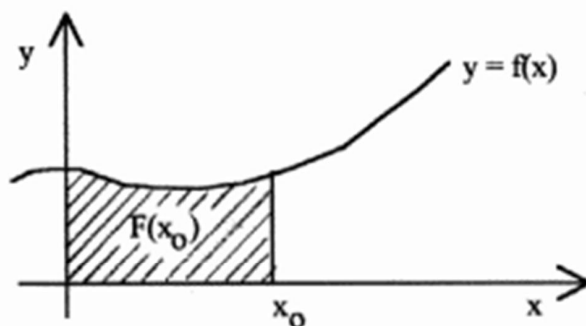
7.10.2003

TMA.003 / L7

13

11.2 Määrätty integraali

Oletamme, että $f(x) > 0$. Merkitsemme $F(x_0)$:lla sitä pinta-alaa, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x -akseli, y -akseli ja suora $x = x_0$.



Kun $x > 0$, niin F määrittelee pinta-alafunktion $F: x \mapsto F(x)$.

7.10.2003

TMA.003 / L7
170

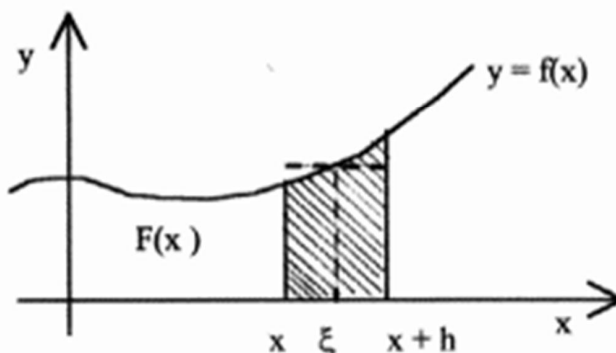
14

Lause 11.2.1: Olkoon f jatkuva funktio. Silloin $F'(x) = f(x)$ eli pinta-alafunktio on eräs f :n integraalifunktio.

Todistus: Tarkastellaan F :n erotusosamäärää

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Osoittajassa oleva pinta-alafunktioiden erotus on sama, kuin kuvassa kohtien x ja $x+h$ väliin jäävän alueen pinta-



ala. On ilmeistä, että on olemassa $\xi \in]x, x+h[$ siten, että tämä pinta-ala on $f(\xi) \cdot h$. Siis

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(\xi) \cdot h}{h} = f(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

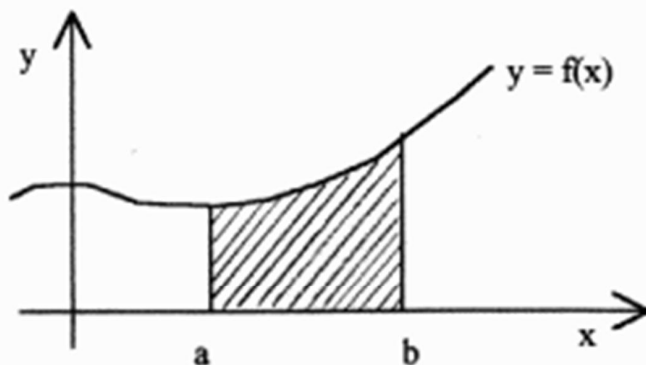
Siis derivaatan määritelmän mukaan $F'(x) = f(x)$. $\square$

7.10.2003

TMA.003 / L7

15

Lause 11.2.2: Olkoon f jatkuva funktio ja Φ mikä tahansa f :n integraalifunktio. Silloin käyrän $y = f(x)$, x -akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$, $a < b$, rajoittaman pinnan ala on $\Phi(b) - \Phi(a)$.



Todistus: Jos F on edellisen lauseen pinta-alafunktio, niin on selvää, että ala on $F(b) - F(a)$. Koska toisaalta Φ ja F ovat kumpikin f :n integraalifunktioita, on $F(x) = \Phi(x) + C$, joten

$$\text{Ala} = F(b) - F(a) = [\Phi(b) + C] - [\Phi(a) + C] = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \square$$

7.10.2003

TMA.003 / L7
171

16

Tämä lause antaa aiheen seuraavaan **merkintäsopimukseen**.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx & \quad \text{"määrätty integraali } a\text{:sta } b\text{:hen } f(x) \, dx"} \\ &= \int_a^b F(x) \quad \quad \quad \text{" = sijoitus } a\text{:sta } b\text{:hen } F(x)"} \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Määrätyn integraalin laskemisessa voidaan käyttää mitä tahansa integraalifunktiota, ja siksi integroimisvakiota ei nyt laskuissa esiinny. Määrätty integraali on määritelty myös funktioille, jotka saavat negatiivisia arvoja.

Tämä lause antaa aiheen seuraavaan **merkintäsopimukseen**.

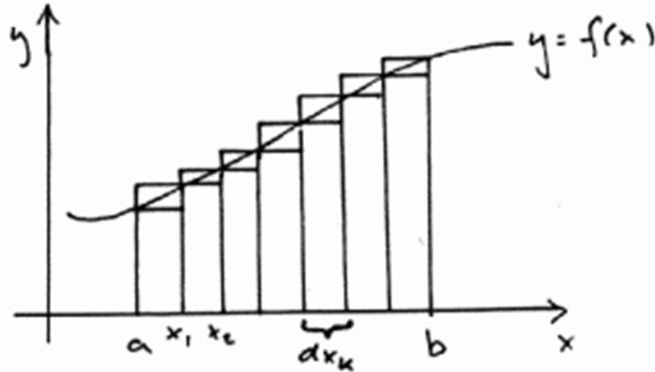
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx & \quad \text{"määrätty integraali } a\text{:sta } b\text{:hen } f(x) \, dx"} \\ &= \int_a^b F(x) \quad \quad \quad \text{" = sijoitus } a\text{:sta } b\text{:hen } F(x)"} \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Määrätyn integraalin laskemisessa voidaan käyttää mitä tahansa integraalifunktiota, ja siksi integroimisvakiota ei nyt laskuissa esiinny. Määrätty integraali on määritelty myös funktioille, jotka saavat negatiivisia arvoja.

11.3 Määrätty integraali summana

Oletetaan, että funktio f on määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$. Jaetaan väli n osaväliin jakopisteillä $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Osavälin $[x_{k-1}, x_k]$ leveys on $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Valitaan joka väliltä luku $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$ ja tarkastellaan summaa

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$



Kuvion perusteella on selvää, että jakoa tihennettäessä, summa lähestyy arvoa

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Kassavirta ja kassan muutos

Kuvatkoon funktio $f(t)$ nettokassavirtaa (mk / aikayksikkö) ajan funktiona. Tarkastellaan aikaväliä $[t_0, t_1]$. Jaetaan aikaväli osaväleihin $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1$.

Osavälin $d\tau_k$ kuluessa kassaan virtaa rahamäärä $\approx f(\tau_k) d\tau_k$. Kun jakoa tihennetään lähestyy summa arvoa

$$\sum_{k=1}^n f(\tau_k) d\tau_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$$

Yleisemminkin:

Olkoon

$F(t)$ = varanto hetkellä t

- * veden määrä tankissa
- * rahamäärä kassassa
- * ihmisten määrä valtakunnassa

$f(t)$ = vastaava virtaama hetkellä t (muutos / aikayksikkö)

- * veden virtaus
- * kassavirta
- * syntyvyys

Virtaus = Varannon muutosnopeus

Varannon muutos t_0 :sta t_1 :een
= virtauksen integraali
 t_0 :sta t_1 :een

Silloin

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$$

7.10.2003

TMA.003 / L7

21

Esimerkki 11.3.1 Vakiotulovirran nykyarvo: Tarkastellaan aikaväliä $0 \leq t \leq T$, jonka aikana saadaan vakiotulovirta $f(t) = a$ (mk / aikayksikkö). Tulovirran nykyarvo on

$$NA = \int_0^T e^{-\rho t} a dt = \left[-\frac{a}{\rho} e^{-\rho t} \right]_0^T = \frac{a}{\rho} (1 - e^{-\rho T})$$

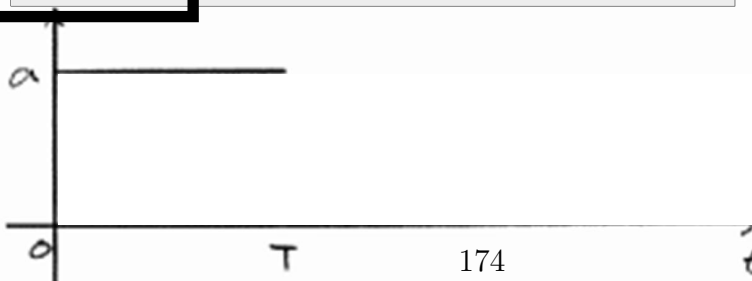
a) Olkoon nyt $a = 10\,000$ mk/vuosi, korkointensiteetti $\rho = 0,16$ /vuosi ja $T = 10$ vuotta.

Silloin

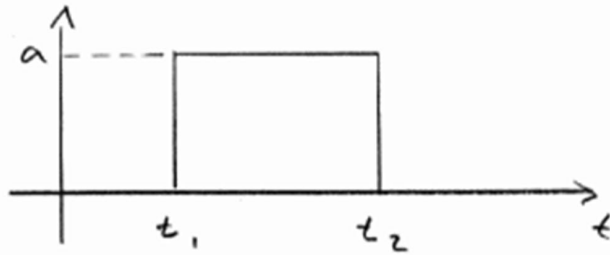
$$NA = \frac{10\,000 \text{ mk/vuosi}}{0,16 / \text{vuosi}} (1 - e^{-0,16 \cdot 10}) = 49\,881,47 \text{ mk}$$

b) Jos a ja ρ ovat kuten edellä, mutta T on hyvin suuri, niin $e^{-\rho T} \approx 0$ ja

$$NA \approx \frac{a}{\rho} = \frac{10\,000 \text{ mk/vuosi}}{0,16 / \text{vuosi}} = 62\,500 \text{ mk}$$



ESIMERKKI 11.3.2. Tulorista a alkaa hetkellä t_1 ja päättyy hetkellä t_2



Nykyarvo hetkellä t_1 on $NA_{t_1} = \frac{a}{s}(1 - e^{-s(t_2 - t_1)})$

Nykyarvo hetkellä 0 on

$$\begin{aligned} NA_0 &= e^{-st_1} NA_{t_1} = e^{-st_1} \cdot \frac{a}{s}(1 - e^{-s(t_2 - t_1)}) \\ &= \frac{a}{s}(e^{-st_1} - e^{-st_2}) \end{aligned}$$

Investoinnin kannattavuuden mittareita

Opetusmonisteessa on kaksi sivua, joilla on hyvin lyhyesti kuvattu joukko mittareita. Seuraavassa on muutama lisäkommentti ja kaavan-johto.

Tarkastelemme projektia, jonka perusinvestointi on H (€), kesto on n (jaksoa) tai T (vuotta), nettotulovirta on k_t (€/jakso jakson lopussa) tai $k(t)$ (€/vuosi jatkuvana) ja jäännösarvo on JA (€).

Kuukausijaksoon liittyvä korkokanta i , vastaava todellinen vuosikorkokanta i_a ja korkointensiteetti ρ liittyvät toisiinsa vuosikorkotekijän kautta:

$$r_a = (1 + i)^{12} = 1 + i_a = e^\rho.$$

Nettonykyarvo

Nettonykyarvo on sellaisenaan kannattavuuden mittari. Nettonykyarvo on tulovirran nykyarvon ja menovirran nykyarvon erotus.

$$NPV = PV(\text{tulovirta}) - PV(\text{menovirta}) \quad (1)$$

Kun nettonykyarvo on käytetyllä laskentakorolla positiivinen, niin tulovirta on korotkin huomioiden arvokkaampi kuin menovirta! Projekti on käytetyllä laskentakorolla kannattava, jos $NPV > 0$.

$$NPV = -H + \sum_{t=1}^n \frac{k_t}{(1+i)^t} + \frac{JA}{(1+i)^n} \quad (2)$$

Jos jaksotettu tulovirta on vakio ($k_t = k$ kaikilla t), niin

$$\begin{aligned} NPV &= -H + \sum_{t=1}^n \frac{k}{(1+i)^t} + \frac{JA}{(1+i)^n} \\ &= -H + \frac{k}{(1+i)} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} + \frac{JA}{(1+i)^n} \\ &= -H + \frac{k}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) + \frac{JA}{(1+i)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

$$= -H + k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + \frac{JA}{(1+i)^n} \quad (4)$$

$$= -H + a_{n,i} \cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n} \quad (5)$$

Kun vakiotulovirta on pitkä ($n \rightarrow \infty$), niin kaavasta (3) nähdään helposti, että pitkälle vakiotulovirralla $NPV \approx -H + k/i$.

Projektille, jonka tulovirta on jatkuva lasketaan nettonykyarvo integroimalla

$$NPV = -H + \int_0^T e^{-\rho t} k(t) dt + e^{-\rho T} JA. \quad (6)$$

Jos tulovirta on vakio ($k(t) = k$), niin

$$\begin{aligned} NPV &= -H + \int_0^T k e^{-\rho t} dt + e^{-\rho T} JA \\ &= -H + \frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + e^{-\rho T} JA \end{aligned} \quad (7)$$

Kun jatkuva vakiotulovirta on pitkä ($n \rightarrow \infty$), niin kaavasta (7) nähdään, että pitkälle jatkuvalle vakiotulovirralla $NPV \approx -H + k/\rho$.

Sisäinen korkokanta

Sisäinen korkokanta on se laskentakorko, jolla nettonykyarvo on nolla. Yleisessä tapauksessa sisäisen korkokannan laskeminen tapahtuu laskemalla toistuvasti NPV:n arvoja eri laskentakoroilla. Koska normaalin investoinnin NPV-funktio on vähenevä, ei ole vaikeata etsiä nollakohta, jos on käytettävissä laskin tai tietokoneohjelma, jolla NPV:n laskeminen on helppoa.

Jaksollisen vakiotulovirran tapauksessa

$$\begin{aligned} NPV(i_{\text{sis}}) = 0 &\Leftrightarrow -H + \frac{k}{i_{\text{sis}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + i_{\text{sis}})^n}\right) + \frac{JA}{(1 + i_{\text{sis}})^n} = 0 \\ &\Leftrightarrow i_{\text{sis}} = \frac{k - k/(1 + i_{\text{sis}})^n}{H - JA/(1 + i_{\text{sis}})^n} \end{aligned} \quad (8)$$

Kaavasta (8) ei sisäistä korkokantaa voi suoraan laskea, mutta kun vakiotulovirta on pitkä ($n \rightarrow \infty$), niin kaavasta (8) seuraa, että pitkälle jatkuvalle vakiotulovirralla

$$i_{\text{sis}} \approx k/H. \quad (9)$$

(Sopivalla alkuarvolla $i_{\text{sis},0} = k/H$ kaava (8) antaa toimivan rekursiokaavan, jolla sisäinen korkokanta saadaan laskettua toistojen avulla. Nyt emme kuitenkaan pohdi asiaa enempää.)

Jatkuvan vakiotulovirran tapauksessa

$$\begin{aligned} NPV(i_{\text{sis}}) = 0 &\Leftrightarrow -H + \frac{k}{\rho_{\text{sis}}} (1 - e^{-\rho_{\text{sis}} T}) + e^{-\rho_{\text{sis}} T} JA = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho_{\text{sis}} = \frac{k - k/e^{\rho_{\text{sis}} T}}{H - JA/e^{\rho_{\text{sis}} T}} \end{aligned} \quad (10)$$

Kaavasta (10) ei sisäistä korkointensiteettiä voi suoraan laskea, mutta kun vakiotulovirta on pitkä ($T \rightarrow \infty$), niin kaavasta (10) seuraa, että pitkälle jatkuvalle vakiotulovirralla $\rho_{\text{sis}} \approx k/H$. Siis

$$i_{\text{sis}} \approx (e^{k/H} - 1) \quad (11)$$

(Sopivalla alkuarvolla $\rho_{\text{sis},0} = k/H$ kaava (10) antaa toimivan rekursiokaavan, jolla sisäinen korkokanta saadaan laskettua toistojen avulla. Nyt emme kuitenkaan pohdi asiaa enempää.)

Takaisinmaksuaika

Jos jäännösarvo on merkittävä ja se tunnetaan tarkasti projektin suunnitteluvaiheessa, niin se voidaan huomioida projektin rahoituksessa. Silloin projektin nettotulovirralla tulee voida hoitaa laina, jonka pääoma on

$$B = H - \frac{JA}{(1+i)^n}$$

Jaksollinen tulovirta.

Takaisinmaksuaika n^* kertoo miten monta jaksoa projektin alusta tulee kerätä nettotuloa, jotta kerätyn nettokassavirran nykyarvo on B . Jos nettotulovirta on jaksollinen vakiotulovirta eli $k_t = k$ (€ /jakso), niin takaisinmaksuaika voidaan laskea **nimellisesti** (nollakorolla $i = 0$) tai **korot huomioiden**. Lyhyen projektin tapauksessa nimellinen laskutapa on riittävä ja helppo. Pitkän projektin tapauksessa korot tulee huomioida.

Nimellisesti

$$n^*k = B \quad \Leftrightarrow \quad n^* = \frac{B}{k}$$

Korot huomioiden

$$\sum_{t=1}^{n^*} \frac{k}{(1+i)^t} = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{n^*,i}k = B \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{k}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^{n^*}}\right) = B \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(1+i)^{n^*}} = \frac{iB}{k} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{iB}{k} = \frac{1}{(1+i)^{n^*}} \\ &\Leftrightarrow (1+i)^{n^*} = \frac{k}{k-iB} \\ &\Leftrightarrow n^* = \frac{\ln(k/(k-iB))}{\ln(1+i)}, \end{aligned} \quad (13)$$

Jatkuva tulovirta.

Takaisinmaksuaika T^* kertoo miten pitkä aika (vuotta) projektin alusta tulee kerätä nettotuloa, jotta kerätyn nettokassavirran nykyarvo on B . Jos nettotulovirta on jatkuva vakiotulovirta eli $k(t) = k$ (€ /vuosi), niin takaisinmaksuaika voidaan jälleen laskea **nimellisesti** (nollakorolla $i = 0$) tai **korot huomioiden**. Lyhyen projektin tapauksessa nimellinen laskutapa on riittävä ja helppo. Pitkän projektin tapauksessa korot tulee huomioida.

Nimellisesti

$$T^*k = B \quad \Leftrightarrow \quad T^* = \frac{B}{k}$$

Korot huomioiden

$$\int_0^{T^*} k e^{-\rho t} dt = B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{\rho} (1 - e^{-\rho T^*}) = B \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^{-\rho T^*}) = \frac{\rho B}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\rho T^*} = \frac{k - \rho B}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{\rho T^*} = \frac{k}{k - \rho B}$$

$$\Leftrightarrow T^* = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{k}{k - \rho B} \right) \quad (15)$$

Takaisinmaksuaika jaksotetulle vakiotulovirrälle

$$n^* = \frac{\ln \left(\frac{k}{k - iB} \right)}{\ln(1 + i)}, \quad \text{missä } B = H - \frac{JA}{(1 + i)^n}$$

Takaisinmaksuaika jatkuvalle vakiotulovirrälle

$$T^* = \frac{\ln \left(\frac{k}{k - \rho B} \right)}{\rho}, \quad \text{missä } B = H - e^{-\rho T} JA$$

Pääoman tuottoaste (ROI)

Pääoman tuottosuhteelle annetaan kaksi kaavaa:

$$ROI^I = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

$$ROI^{II} = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{alussa sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

Jos projektin alussa tehty perusinvestointi jää pysyväksi osaksi yrityksen tuotantopääomaa, ja investoinnin synnyttämä nettotulovirta on pitkä, niin ROI^{II} on lähellä sisäistä korkokantaa

$$ROI^{II} = \frac{k_a}{H} \cdot 100\% \approx i_{\text{sis}}. \quad (16)$$

Jos toisaalta projekti on lyhyt ja projektin kuluessa joudutaan luopumaan sidotusta pääomasta, niin karkeasti voimme arvioida

$$\text{kesto } n \text{ vuotta: } ROI^I = \frac{k_a - H/n}{H/2} \cdot 100\% \quad (17)$$

$$\text{kesto } n \text{ kuukautta: } ROI^I = \frac{12(k_{kk} - H/n)}{H/2} \cdot 100\% \quad (18)$$

Esimerkki: Olkoon perusinvestointi $H = 27\,000$ (€), nettotulovirta $k = 2\,000$ (€/kk) ja projektin kesto $n = 15$ (kk).

Exel-ohjelman IRR-funktio antaa näillä lähtötiedoilla sisäiseksi korkokannaksi 0.01346872.

Tämä on tietenkin kuukausijaksoon liittyvä korkokanta, ja sitä vastaava vuosijakson korkokanta on

$$(1 + 0.01346872)^{12} - 1 = 0.17415$$

Projektin sisäinen korkokanta on siis 17.4%.

Pääoman tuottoaste projektille on

$$\begin{aligned} ROI^I &= \frac{12 \cdot (k_{kk} - H/n)}{H/2} \cdot 100\% \\ &= \frac{12 \cdot (2000 \text{ €} - 27000 \text{ €}/15)}{27000 \text{ €}/2} \cdot 100\% = 17.8\% \end{aligned}$$

Karkeasti voidaan sanoa, että:

1. Kaavan (16) mukainen ROI^I kuvaa hyvin tuotantopääomaan tehtävän pysyvän lisäyksen kannattavuutta, kun sen tuottama tulovirran lisäys kestää pitkään.
2. Kaavaa (16) ei saa soveltaa lyhyeen projektiin.
3. Kaavojen (17) ja (18) mukainen ROI^I kuvaa hyvin lyhyen lainarahalla toteutettavan projektin kannattavuutta.
4. Kaavoja (17) ja (18) ei saa soveltaa pitkään projektiin.

1. Lineaarinen optimointi

1.1 Johdatteleva esimerkki

Esimerkki 1.1.1 Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa kahdenlaisia puuleluja: sotilaita ja juna. Sotilaan myyntihinta on 27 €, ja siihen kuluu materiaalia 10 € edestä. Jokainen valmistettu sotilas aiheuttaa lisäksi muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksia keskimäärin 14 € edestä. Junan myyntihinta on 21 €, ja siihen kuluu 9 € edestä materiaalia. Muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksia jokainen juna aiheuttaa keskimäärin 10 €.

Sotilaiden ja junien valmistus tapahtuu kahdella osastolla: puutyöosastolla ja viimeistelyosastolla. Yksi sotilas vaatii 1 tunnin puutyötä ja 2 tuntia viimeistelyä. Vastaavasti yksi juna vaatii 1 tunnin puutyötä ja 1 tunnin viimeistelyä.

Yritys pystyy hankkimaan kaiken tarvitsemansa materiaalin, mutta puutyö- ja viimeistelyosastojen kapasiteetti on rajallinen. Käytettävissä on 80 tuntia puutyötä per viikko, ja 100 tuntia viimeistelytyötä per viikko. Lelujen kysynnästä tiedetään, että junien kysyntä on käytännössä rajoittamaton, mutta sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 per viikko. Miten yritys voi maksimoida katetuottonsa? Muodostetaan ongelmasta LP-malli.

Päätösmuuttujat

Valitaan päätösmuuttujiksi muuttujat, jotka vaikuttavat katetuoton muodostumiseen ja joiden arvoon yritys kykenee vaikuttamaan. Yritys voi itse määrätä miten paljon

sotilaita ja junia valmistetaan.

x_1 : kpl sotilaita / viikko

x_2 : kpl junia / viikko

Tavoitefunktio

Määritetään optimointitehtävässä tarvittava maksimoitava tai minimoitava tavoitefunktio. Yritys maksimoi katetuottoaan. Viikottainen katetuotto tulee esittää päätösmuuttujien x_1 ja x_2 funktiona.

myyntituotot / viikko	$27x_1 + 21x_2$
materiaalikust. / viikko	$-10x_1 - 9x_2$
palkka- ja yleiskust./viikko	$-14x_1 - 10x_2$
katetuotto / viikko	$3x_1 + 2x_2$

Yritys pyrkii maksimoimaan (lineaarista) funktiota:

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

Tavoitefunktion kertoimet kuvaavat ko. muuttujien kontribuutiota yrityksen katetuottoon.

Rajoitteet

Viimeistelytyöihin on käytettävissä 100 h/vko. Puutöihin on käytettävissä 80 h/vko

Sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 kpl/vko. Siis

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 100 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 80 \\ 1x_1 &\leq 40 \end{aligned}$$

Merkkirajoite

Sotilaita tai junia ei voida valmistaa negatiivisia määriä, joten

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

LP-malli

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ratkaisemme mallin pian, mutta ensin toteamme joukon yleisiä asioita.

1.2 LP-mallin oletukset

LP-mallia rakennettaessa tehdään seuraavat oletukset. Oletukset tehdään, jotta malli olisi yksinkertainen. Jos oletukset johtavat liian paljon todellisuudesta poikkeavaan malliin, ei ongelmaa voida lähestyä LP-mallilla. Pieni ero todellisuuden ja mallin välillä ei yleensä haittaa.

1. **Suhteellisuusoletus:** jokaisen muuttujan x_i vaikutus tavoitefunktion arvoon ja rajoitettujen resurssien kulutukseen on suoraan verrannollinen ko. muuttujan arvoon.
2. **Additiivisuusoletus:** jokaisen muuttujan x_i vaikutus tavoitefunktion arvoon ja rajoitettujen resurssien kulutukseen on riippumaton muiden muuttujien x_j ($j \neq i$) saamista arvoista.
3. **Jaollisuusoletus:** Muuttujat x_i voivat saada kokonaisluvuista poikkeavia arvoja.
4. **Varmuusoletus:** kaikki mallin parametrit tunnetaan varmuudella.

Oletukset 1 ja 2 johtavat siihen, että tavoitefunktio on lineaarinen ts.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

ja rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j, j = 1, \dots, m$$

Sanomme, että malli on Lp-malli, jos

- a) tavoitefunktio on lineaarinen
- b) rajoitteet ovat lineaarisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä
- c) $x_i \geq 0$ (kaikki muuttujat saavat vain ei-negatiivisia arvoja)

Muuttujien arvot muodostavat vektorin $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Usein (varsinkin kun $n = 2$) vektoria sanotaan pisteeksi. Vektori on ratkaisu (solution), jos se toteuttaa rajoitteet. Ratkaisu on käypä (kelpaava, feasible), jos se lisäksi toteuttaa ehdon $x_i \geq 0$ kaikilla i . Maksimointitehtävän (minimointitehtävän) optimiratkaisu on se käypä ratkaisu, jolla tavoitefunktio saa suurimman (pienimmän) arvonsa.

Esimerkiksi lelumallissa piste $(x_1, x_2) = (40, 20)$ on käypä ratkaisu koska se toteuttaa kaikki rajoitteet.

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + x_2 & \leq & 100 & \text{sillä } 2 \cdot 40 + 20 = 100 \leq 100 \\ x_1 + x_2 & \leq & 80 & \text{sillä } 40 + 20 = 60 \leq 80 \\ x_1 & \leq & 40 & \\ x_i & \geq & 0 & \end{array}$$

Piste $(40, 20)$ ei kuitenkaan ole optimiratkaisu.

1.3 LP-mallin graafinen ratkaiseminen

Kun muuttujia on kaksi, saadaan ongelmasta havainnollinen esitys piirtämällä.

1. Piirretään koordinaatisto. Vaaka-akseli on x_1 -akseli ja pystyakseli on x_2 -akseli (katso kuvaa).
2. Piirretään rajoitteiden yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon.
3. Määritetään käypien ratkaisujen alue (feasible region).
4. Etsitään optimiratkaisu tutkimalla tavoitefunktion tasa-arvosuoria käypien ratkaisujen alueella.

Esimerkki 1.3.1 Tutkimme seuraavaksi puuleluesimerkkiä 1.1.1 graafisesti. Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa puusotilaita (x_1 kpl/viikko) ja puujunia (x_2 kpl/viikko). Katteen optimointi rajoitteet huomioiden johtaa seuraavaan LP-malliin:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ennen koordinaatiston piirtämistä laskemme, missä rajoitteita vastaavat suorat leikkaavat koordinaattiakselit. Tämä auttaa meitä valitsemaan akselien mittakaavat järkevästi.

1. rajoite: $2x_1 + x_2 \leq 100$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{llll} \text{suoran yhtälö:} & 2x_1 + x_2 & = & 100 \\ & \Leftrightarrow x_2 & = & -2x_1 + 100 \end{array} \quad (\text{jyrkästi}) \text{ laskeva suora}$$

$$\begin{array}{llll} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & 2x_1 + 0 & = & 100 \\ & \Leftrightarrow x_1 & = & 50 \end{array} \quad \longrightarrow A = (50, 0)$$

$$\begin{array}{llll} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + x_2 & = & 100 \\ & \Leftrightarrow x_2 & = & 100 \end{array} \quad \longrightarrow B = (0, 100)$$

2. rajoite: $x_1 + x_2 \leq 80$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{llll} \text{suoran yhtälö:} & x_1 + x_2 & = & 80 \\ & \Leftrightarrow x_2 & = & -x_1 + 80 \end{array} \quad (\text{loivasti}) \text{ laskeva suora}$$

$$\begin{array}{llll} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} & x_1 + 0 & = & 80 \\ & \Leftrightarrow x_1 & = & 80 \end{array} \quad \longrightarrow C = (80, 0)$$

$$\begin{array}{llll} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} & 0 + x_2 & = & 80 \\ & \Leftrightarrow x_2 & = & 80 \end{array} \quad \longrightarrow D = (0, 80)$$

3. rajoite: $x_1 \leq 40$ käypä alue vasemmalla puolella

$$\begin{array}{llll} \text{suoran yhtälö:} & x_1 & = & 40 \\ & & & \text{pystysuora!} \\ & & & \longrightarrow E = (40, 0) \end{array}$$

Seuraavaksi piirretään koordinaatisto ja rajoitesuorat.

$$\begin{array}{llll} \text{Tavoitefunktio:} & 3x_1 + 2x_2 & = & z \\ & 2x_2 & = & -3x_1 + z \\ & x_2 & = & -1.5x_1 + 0.5z \end{array} \quad \text{laskeva suora}$$

Siis ne ratkaisut joilla tavoitefunktio saa saman arvon (z) muodostavat laskevan suoran, jonka kulmakerroin on $-3/2$. Mitä suurempi on z , sitä ylempänä suora on.

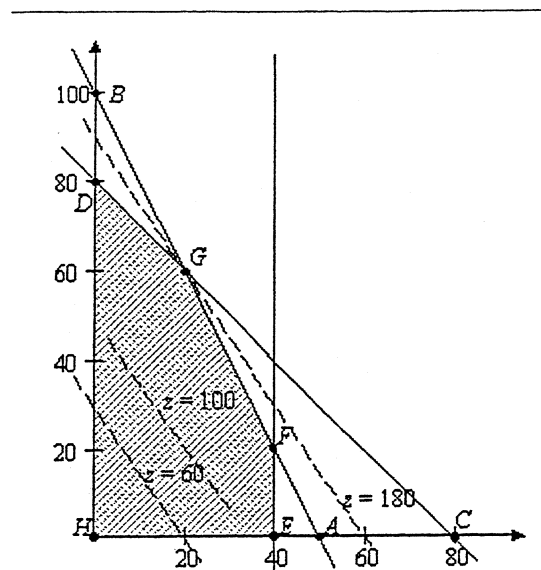


Figure 1.1: Leluesimerkin graafinen ratkaisu.

Kuvaan on piirretty z :n arvoja 60, 100 ja 180 vastaavat tasa-arvosuorat. Kuvasta näkee helposti, että ylin käypää aluetta koskettava tasa-arvosuora pisteessä G .

Optimi (G): 1. ja 2. rajoitesuoran leikkauspiste

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + x_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 60 \\ z = 180 \end{cases}$$

1.3.1 Optimiratkaisun olemassaolo, esimerkkejä

Tarkastellaan puuleluesimerkin käyvän alueen sisäpistettä ($x_1 = 20, x_2 = 20$). Mikään rajallisista resursseista (1. rajoite: "viimeistelytyöhön käytetty aika", 2. rajoite: "puutöihin käytetty aika" ja 3. rajoite: "markkinoiden ostovoima") ei ole loppuunkäytetty. Kumpaakin muuttujaa (x_1 ja x_2) voidaan siis kasvattaa tai pienentää. Tavoitefunktion muodosta

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

näemme, että kasvattamalla hiukan muuttujan x_1 ja/tai muuttujan x_2 arvoa tavoitefunktio saa suuremman arvon. Piste $(20, 20)$ ei siis ole optimiratkaisu. Sama päättely

voidaan toistaa mille tahansa käyvän alueen sisäpisteelle. Voimme siis päätellä seuraavasti.

Jos optimiratkaisu on olemassa, niin se on käyvän alueen reunapiste.

Edellisen puuleluesimerkkiin löytyi yksikäsitteinen optimiratkaisu käyvän alueen nurkkapisteestä. Tämä on hyvin yleinen, mutta ei ainoa mahdollinen, lopputulos.

Seuraavissa kolmessa esimerkissä käydään läpi muut mahdolliset tulokset. Esimerkeissä ei ole mitään taustakertomusta, vaan lähdemme suoraan valmiina annetuista lp-malleista.

Esimerkki 1.3.2 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{array}{ll} \min & z = -6x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ratkaisu: Huomaa, että kyseessä on minimointitehtävä. (Vertaa laskuja kuvaan .)

1. rajoite: $2x_1 + 4x_2 \leq 9$ käypä alue suoran alapuolella

$$\begin{array}{ll} \text{suoran yhtälö:} & 2x_1 + 4x_2 = 9 \\ & 4x_2 = -2x_1 + 9 \\ & x_2 = -0.5x_1 + 2.25 \end{array} \quad (\text{loivasti}) \text{ laskeva suora}$$

$$\begin{array}{ll} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & 2x_1 + 0 = 9 \\ & \Leftrightarrow x_1 = 4.5 \end{array} \quad \longrightarrow A = (4.5, 0)$$

$$\begin{array}{ll} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + 4x_2 = 9 \\ & \Leftrightarrow x_2 = 2.25 \end{array} \quad \longrightarrow B = (0, 2.25)$$

2. rajoite: $3x_1 + x_2 \leq 6$ käypä alue suoran alapuolella

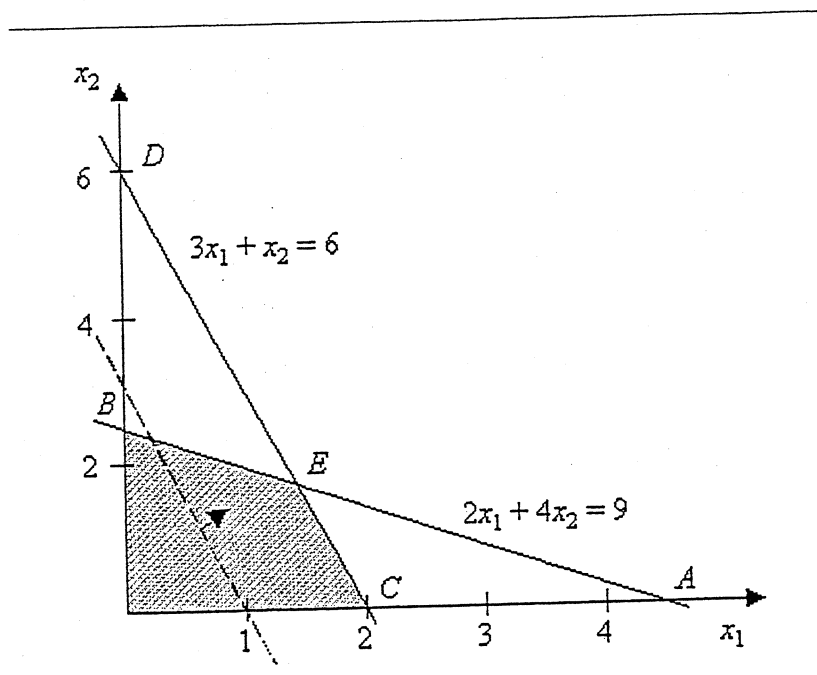


Figure 1.2: Esimerkin 1.3.2 graafinen ratkaisu.

suoran yhtälö: $3x_1 + x_2 = 6$
 $x_2 = -3x_1 + 6$ (jyrkästi) laskeva suora

jos $x_2 = 0$ (piste C) $3x_1 + 0 = 6$
 $\Leftrightarrow x_1 = 2 \rightarrow C = (2, 0)$

jos $x_1 = 0$ (piste D) $0 + x_2 = 6$
 $\Leftrightarrow x_2 = 6 \rightarrow D = (0, 6)$

Tavoitefunktio: $z = -6x_1 - 2x_2$
 $\Leftrightarrow 2x_2 = -6x_1 - z$
 $\Leftrightarrow x_2 = -3x_1 - 0.5z$ laskeva suora

z pienenee, eli tavoitefunktion arvo paranee, kun x_1 tai x_2 kasvavat. z siis pienenee, kun tasa-arvosuora siirtyy oikealle ja ylöspäin. Koska tasa-arvosuora ja 2. rajoitesuora ovat yhdensuuntaiset (samat kulmakertoimet), ovat kaikki janan CE pisteet optimi-ratkaisuja (katso kuva). Tavoitefunktion optimiarvo on kaikissa näissä pisteissä sama

$$z(C) = -6x_1(C) - 2x_2(C) = -6 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = -12$$

Pisteen E koordinaatit saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1.5 \\ x_2 = 1.5 \end{cases}$$

Optimiratkaisu saadaan siis, kun $1.5 \leq x_1 \leq 2$ ja $x_2 = 6 - 3x_1$. Optimiratkaisuja on siis useita, mutta tavoitefunktion optimiarvo on yksikäsitteinen, $z_{\min} = -12$.

Esimerkki 1.3.3 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Ratkaisu: Huomaa, että kyseessä on maksimointitehtävä. (Vertaa laskuja kuvaan .)

1. rajoite: $x_1 - x_2 \geq 1$ käypä alue on suoran alapuolella

$$\begin{array}{lll} \text{suoran yhtälö:} & x_1 - x_2 = 1 \\ & -x_2 = -x_1 + 1 \\ & x_2 = x_1 - 1 \end{array} \quad \text{nouseva suora}$$

$$\begin{array}{lll} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & x_1 + 0 = 1 \\ & \Leftrightarrow x_1 = 1 \end{array} \quad \longrightarrow A = (1, 0)$$

$$\begin{array}{lll} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 - x_2 = 1 \\ & \Leftrightarrow x_2 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow B = (0, -1) \\ B \text{ ei siis ole käypä!!} \end{array}$$

2. rajoite: $x_2 \leq 2$ käypä alue vaakasuoran alapuolella

$$\text{suoran yhtälö:} \quad x_2 = 2 \quad \text{vaakasuora}$$

$$\begin{array}{lll} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste C)} & 0 + x_2 = 2 \\ & \Leftrightarrow x_2 = 2 \end{array} \quad \longrightarrow C = (0, 2)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Tavoitefunktio:} & z = x_1 + x_2 \\ & \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + z \end{array} \quad \text{laskeva suora}$$

Optimiratkaisu: Tavoitefunktion arvo paranee (z kasvaa), kun x_1 tai x_2 kasvavat, eli tasa-arvosuora siirtyy oikealle ja ylöspäin. Koska muuttujaa x_1 voidaan kasvattaa rajatta, voidaan myös tavoitefunktion arvoa kasvattaa rajatta, eikä optimiratkaisua siis ole olemassa. Se, että mikään rajallinen resurssi ei rajoita muuttujan x_1 arvoa, on poikkeuksellista. Mahdollisesti lp-malli on väärin muodostettu.

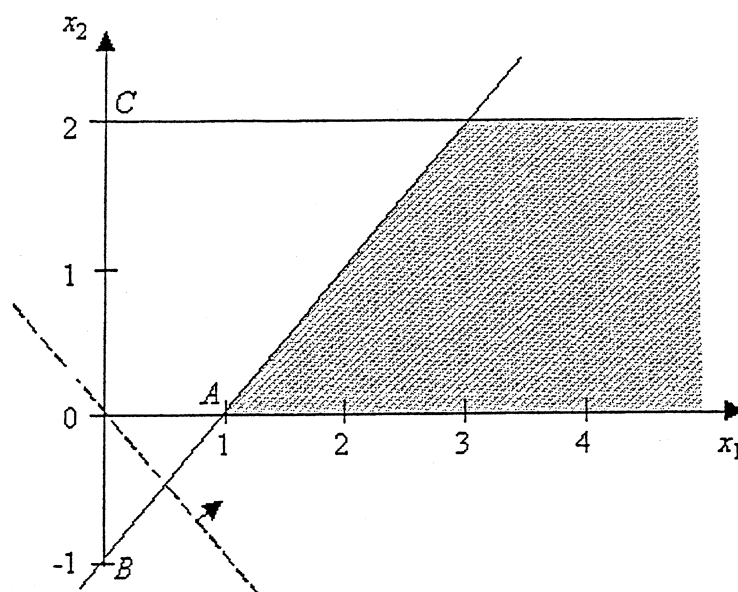


Figure 1.3: Esimerkin graafinen ratkaisu.

Esimerkki 1.3.4 Etsi graafisesti optimiratkaisu LP-mallille

$$\begin{array}{ll}
 \min & z = 2x_1 + 3x_2 \\
 \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 10 \\
 & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Ratkaisu: (Vertaa laskuja kuvaan.)

1. rajoite: $x_1 + x_2 \geq 10$ käypä alue on suoran yläpuolella

$$\begin{array}{lll}
 \text{suoran yhtälö:} & x_1 + x_2 = 10 \\
 & x_2 = -x_1 + 10 & \text{laskeva suora}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste A)} & x_1 + 0 = 10 \\
 & \Leftrightarrow x_1 = 10 & \longrightarrow A = (10, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste B)} & 0 + x_2 = 10 \\
 & \Leftrightarrow x_2 = 10 & \longrightarrow B = (0, 10)
 \end{array}$$

2. rajoite: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ käypä alue suoran alapuolella

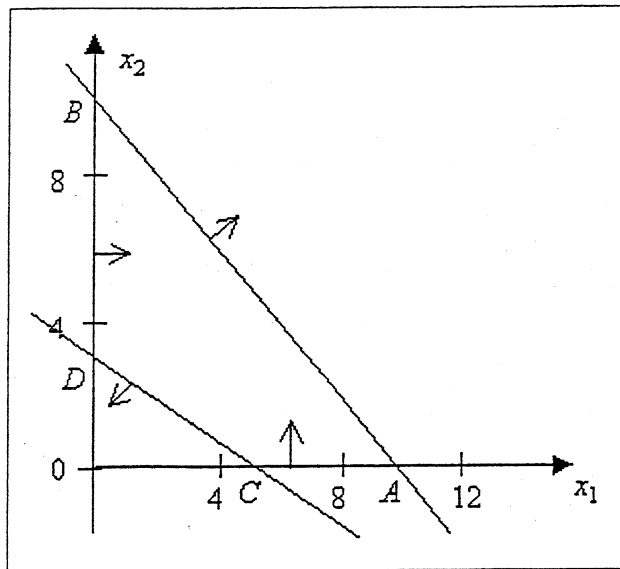


Figure 1.4: Esimerkin graafinen ratkaisu.

$$\begin{aligned} \text{suoran yhtälö:} \quad 3x_1 + 5x_2 &= 15 \\ 5x_2 &= -3x_1 + 15 \\ x_2 &= -0.6x_1 + 3 \end{aligned}$$

laskeva suora

$$\begin{aligned} \text{jos } x_2 = 0 \text{ (piste C)} \quad 3x_1 + 0 &= 15 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 5 & \longrightarrow C = (5, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{jos } x_1 = 0 \text{ (piste D)} \quad 0 + 5x_2 &= 15 \\ \Leftrightarrow x_2 &= 3 & \longrightarrow D = (0, 3) \end{aligned}$$

Kun rajoitesuorat piirretään koordinaatistoon nähdään, että käypä alue on tyhjä. Rajoitteet ovat ristiriitaiset, eikä ongelmalle ole olemassa ratkaisua.

Edellisten esimerkkien perusteella voimme yleistää, että on neljä perustapausta:

1. LP-mallilla on yksikäsitteinen optimiratkaisu.

★ Optimiratkaisu on käyvän alueen nurkkapiste.

2. LP-mallilla on useita optimiratkaisuja.

★ Optimiratkaisu on käyvän alueen reunan osa.

★ Tavoitefunktio saa kaikissa optimipisteissä saman arvon. Tavoitefunktion optimiarvo on siis yksikäsitteinen.

3. LP-mallilla on rajoittamaton optimi.

- ★ Tavoitefunktion arvo saadaan miten hyväksi tahansa.
- ★ Mallilla on ratkaisuja, mutta ei optimiratkaisua.

4. LP-mallilla ei ole ratkaisuja.

- ★ Käypä alue on tyhjä. (Eli ratkaisujoukko on tyhjä.)
- ★ Rajoitteet ovat ristiriitaiset.

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat



Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

1

Lukujoukon $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ aritmeettinen keskiarvo lasketaan kaavalla

$$a_{aka} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j.$$

Lukujoukon $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ geometrinen keskiarvo, eli keskiverto, lasketaan kaavalla

$$a_{gka} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} = \left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{1/n}.$$

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat



Olkoon p_t tuotteen hinta vuonna t .

Perusvuonna $t = t_0$ indeksi saa arvon $X_{t_0} = 100$.

Vertailuvuonna $t \neq t_0$ indeksi saa arvon

$$X_t = \frac{p_t}{p_{t_0}} \cdot 100.$$

Jos $X_t > 100$, niin vertailuvuoden hinta on korkeampi kuin perusvuonna.

Jos $X_t < 100$, niin vertailuvuoden hinta on alempi kuin perusvuonna.

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Seuraavassa taulukossa on tuotteen hintoja usean vuoden ajalta.

vuosi t	hinta p_t	indeksi $X_t = \frac{p_t}{p_{t_0}} \cdot 100$	vuosi- kasvu $g_t \cdot 100\%$	kasvu- tekijä $r_t = 1 + g_t$
2000	16,00	100,0		
2001	20,00	125,0	25,00%	1,2500
2002	26,00	162,5	30,00%	1,3000
2003	30,00	187,5	15,38%	1,1538
2004	36,00	225,0	20,00%	1,2000
2005	41,00	256,3	13,89%	1,1389
2006	45,00	281,3	9,76%	1,0976
2007	50,00	312,5	11,11%	1,1111
2008	52,00	325,0	4,00%	1,0400
2009	52,50	328,1	0,96%	1,0096
2010	54,00	337,5	2,86%	1,0286

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

vuosi t	hinta p_t	indeksi X_t	vuosi- kasvu $g_t \cdot 100\%$	kasvu- tekijä $r_t = 1 + g_t$
2003	30,00	187,5		
2004	36,00	225,0	20,00%	1,2000

$$r_{2004} = \frac{p_{2004}}{p_{2003}} = \frac{36,00}{30,00} = 1,20$$

$$g_{2004} = \frac{p_{2004}}{p_{2003}} - 1 = 0,20$$

Kasvutekijä voidaan yhtä hyvin laskea indeksin perusteella

$$r_{2004} = \frac{X_{2004}}{X_{2003}} = \frac{225,0}{187,5} = 1,20$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ 🔍 ↺

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Keskimääräinen kasvu.

5

Useamman vuoden aikana toteutunutta hinnan keskimääräistä kasvuvauhtia eli inflaatiota voidaan kuvata vuosikasvu-prosenttien keskiarvolla (arithmetic mean)

$$g_{aka} \cdot 100\% = \frac{1}{10} \sum_{t=2001}^{2010} g_t \cdot 100\% = 13,3\%,$$

tai kasvutekijöiden keskiarvolla (arithmetic mean)

$$r_{aka} = \frac{1}{10} \sum_{t=2001}^{2010} r_t = 1,133,$$

tai kasvutekijöiden keskiverrolla (geometric mean)

$$r_{gka} = \left(r_{2001} \cdot r_{2002} \cdots r_{2010} \right)^{1/10} = 1,129.$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ 🔍 ↺

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Kasvutekijöiden keskiverto on käsitteenä yksinkertaisempi koska se voidaan laskea kahdesta hinnasta, perusvuoden ja vertailuvuoden hinnoista (tai indekseistä).

$$\begin{aligned}
 r_{gka} &= (r_{2001} \cdot r_{2002} \cdots r_{2009} \cdot r_{2010})^{1/10} \\
 &= \left(\frac{p_{2001}}{p_{2000}} \cdot \frac{p_{2002}}{p_{2001}} \cdots \frac{p_{2009}}{p_{2008}} \cdot \frac{p_{2010}}{p_{2009}} \right)^{1/10} = \left(\frac{p_{2010}}{p_{2000}} \right)^{1/10} \\
 &= \left(\frac{X_{2010}}{X_{2000}} \right)^{1/10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{aka} &= \frac{1}{10}(\rho_{2001} + \rho_{2002} + \cdots + \rho_{2010}) \\
 &= \frac{1}{10}(\ln(r_{2001}) + \ln(r_{2002}) + \cdots + \ln(r_{2010})) \\
 &= \ln\{(r_{2001} \cdot r_{2002} \cdots r_{2010})^{1/10}\} = \ln r_{gka}
 \end{aligned}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Jos yrityksen (tai kansalaisen) käytössään oleva varallisuus kasvaa keskimääräisellä kasvutekijällä

$$r_{gka} = r = 1 + i,$$

niin sanomme että r ja i kuvaavat nimelliskorkoa. Varallisuus (pääoma) vuonna t saadaan kaavasta

$$\begin{aligned}
 K_t &= K_{t_0}(1 + i)^{t-t_0} \\
 i &= \text{nimelliskorkokanta}
 \end{aligned}$$

Hintatason keskimääräistä kasvuvauhtia kuvaa inflaatiokorkokanta g . Hintataso p_t vuonna t on

$$p_t = p_{t_0}(1 + g)^{t-t_0}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Pääoman ostovoima vuonna t on

$$Q_t = \frac{K_t}{p_t} = \frac{K_0(1+i)^{t-t_0}}{p_0(1+g)^{t-t_0}} = Q_0 \cdot \left(\frac{1+i}{1+g} \right)^{t-t_0}$$

Pääoman ostovoiman kasvua kuvaa reaalikorko.

Reaalikorkotekijä r^* ja reaalikorkokanta i^* ovat edellisen perusteella

$$r^* = \frac{1+i}{1+g}$$

$$i^* = \frac{1+i}{1+g} - 1 = \frac{1+i}{1+g} - \frac{1+g}{1+g} = \frac{i-g}{1+g}$$

Jos inflaatio ei ole korkea (eli on g pieni), niin

$$i^* \approx i - g$$

$\Leftrightarrow$ reaalikorko $\approx$ nimelliskorko – inflaatiokorko.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Pääoman deflatoitu arvo.

9

Pääoman K_t vuoteen t_1 deflatoitu arvo

= se rahamäärä, jolla vuonna t_1 sai ostettu yhtä monta tuotetta kuin rahamäärällä K_t saa ostettua vuonna t

$$= K_t \cdot \frac{p_{t_1}}{p_t} = K_t \cdot \frac{X_{t_1}}{X_t}.$$

Erityisesti pääoman K_t perusvuoteen t_0 deflatoitu arvo on

$$K_t \cdot \frac{p_{t_0}}{p_t} = K_t \cdot \frac{100}{X_t}$$

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Tarkastellaan seuraavien kolmen tuotteen hintoja perusvuonna $t_0 = 2000$ ja vertailuvuonna $t = 2010$.

tuote	2000		2010		paino
k	p_{t_0}	q_{t_0}	p_t	q_t	
1	2,00	10	5,00	100	w_1
2	5,00	20	6,00	18	w_2
3	20,00	50	15,00	50	w_3

Kun laskemme tuoteryhmän hintaindeksin, niin annamme yleensä joillekin tuotteille muita suuremman painon.

$$P_{t_0 t} = \frac{\left(\frac{w_1 p_{1t} + w_2 p_{2t} + w_3 p_{3t}}{w_1 + w_2 + w_3} \right)}{\left(\frac{w_1 p_{1t_0} + w_2 p_{2t_0} + w_3 p_{3t_0}}{w_1 + w_2 + w_3} \right)} \cdot 100 = \frac{\sum_{k=1}^3 w_k p_{kt}}{\sum_{k=1}^3 w_k p_{kt_0}} \cdot 100$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Jos annamme ensimmäiselle tuotteelle kaksinkertaisen painon muihin nähden, niin indeksi on

$$P_{t_0 t} = \frac{2 \cdot 5,00 + 1 \cdot 6,00 + 1 \cdot 15,00}{2 \cdot 2,00 + 1 \cdot 5,00 + 1 \cdot 20,00} \cdot 100 = 106,9$$

Jos annamme kolmannelle tuotteelle kaksinkertaisen painon muihin nähden, niin indeksi on

$$P_{t_0 t} = \frac{1 \cdot 5,00 + 1 \cdot 6,00 + 2 \cdot 15,00}{1 \cdot 2,00 + 1 \cdot 5,00 + 2 \cdot 20,00} \cdot 100 = 87,2$$

PAINOJEN VALINNALLA ON MERKITYSTÄ!

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Laspeyresin hintaindeksi käyttää painoina perusvuoden määriä

$$P_{t_0,t}^L = \frac{\sum_{k=1}^n q_{kt_0} p_{kt}}{\sum_{k=1}^n q_{kt_0} p_{kt_0}}$$

Paaschenin hintaindeksi käyttää painoina vertailuvuoden määriä

$$P_{t_0,t}^P = \frac{\sum_{k=1}^n q_{kt} p_{kt}}{\sum_{k=1}^n q_{kt} p_{kt_0}}$$

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Laspeyres $P_{t_0,t}^L$ ja Paaschen $P_{t_0,t}^P$

13

Esimerkki

tuote k	2000		2010		paino
	p_{t_0}	q_{t_0}	p_t	q_t	
1	2,00	10	5,00	100	w_1
2	5,00	20	6,00	18	w_2
3	20,00	50	15,00	50	w_3

$$\begin{aligned} P_{t_0,t}^L &= \frac{\sum_{k=1}^n q_{kt_0} p_{kt}}{\sum_{k=1}^n q_{kt_0} p_{kt_0}} \cdot 100 = \frac{10 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 50 \cdot 15}{10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 50 \cdot 20} \cdot 100 \\ &= 82,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{t_0,t}^P &= \frac{\sum_{k=1}^n q_{kt} p_{kt}}{\sum_{k=1}^n q_{kt} p_{kt_0}} \cdot 100 = \frac{100 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 50 \cdot 15}{100 \cdot 2 + 18 \cdot 5 + 50 \cdot 20} \cdot 100 \\ &= 105,3 \end{aligned}$$

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Joskus Laspeyresin indeksi painottaa liikaa vanhoja tuotteita ja Paaschenin indeksi painottaa liikaa uusia tuotteita. Silloin voidaan käyttää Fisherin indeksii, joka on Laspeyresin ja Paaschenin indeksien keskiarvo

$$P_{t_0,t}^F = \sqrt{P_{t_0,t}^L \cdot P_{t_0,t}^P} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n q_{kt_0} p_{kt}}{\sum_{k=1}^n q_{kt_0} p_{kt_0}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n q_{kt} p_{kt}}{\sum_{k=1}^n q_{kt} p_{kt_0}}} \cdot 100$$

esimerkki Edellä

$$P_{t_0,t}^F = \sqrt{82,1 \cdot 105,3} = 93,0$$

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ 🔍 ↺

Tuoteryhmän volyymi-indeksi.

15

Volyymi-indeksi mittaa muutoksia tuotekorin määrissä.

Yleisesti: $Q_{t_0t} = (\sum_{k=1}^n w_k q_{kt}) / (\sum_{k=1}^n w_k q_{kt_0}) \cdot 100$

Laspeyresin volyymi-indeksi käyttää painoina perusvuoden hintoja

$$Q_{t_0,t}^L = \frac{\sum_{k=1}^n p_{kt_0} q_{kt}}{\sum_{k=1}^n p_{kt_0} q_{kt_0}} \cdot 100$$

Paaschenin volyymi-indeksi käyttää painoina vertailuvuoden hintoja

$$Q_{t_0,t}^P = \frac{\sum_{k=1}^n p_{kt} q_{kt}}{\sum_{k=1}^n p_{kt} q_{kt_0}} \cdot 100$$

Fisher, kuten edellä

$$Q_{t_0,t}^F = \sqrt{Q_{t_0,t}^L \cdot Q_{t_0,t}^P}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ 🔍 ↺

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Esimerkki

tuote k	2000		2010		paino
	p_{t_0}	q_{t_0}	p_t	q_t	
1	2,00	10	5,00	100	w_1
2	5,00	20	6,00	18	w_2
3	20,00	50	15,00	50	w_3

$$Q_{t_0,t}^L = \frac{\sum_{k=1}^n p_{kt_0} q_{kt}}{\sum_{k=1}^n p_{kt_0} q_{kt_0}} \cdot 100 = \frac{2 \cdot 100 + 5 \cdot 18 + 20 \cdot 50}{2 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 20 \cdot 50} \cdot 100$$

$$= 115,2$$

$$Q_{t_0,t}^P = \frac{\sum_{k=1}^n p_{kt} q_{kt}}{\sum_{k=1}^n p_{kt} q_{kt_0}} \cdot 100 = \frac{5 \cdot 100 + 6 \cdot 18 + 15 \cdot 50}{5 \cdot 10 + 6 \cdot 20 + 15 \cdot 50} \cdot 100$$

$$= 147,6$$

$$Q_{t_0,t}^F = \sqrt{115,2 \cdot 147,6} = 130,4$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

Indeksikaavat.

17

Laspeyres

$$P_{t_0,t}^L = \frac{\sum q_{t_0} p_t}{\sum q_{t_0} p_{t_0}} \cdot 100$$

Paaschen

$$P_{t_0,t}^P = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_t p_{t_0}} \cdot 100$$

Fisher

$$P_{t_0,t}^F = \sqrt{P_{t_0,t}^L \cdot P_{t_0,t}^P}$$

Laspeyres

$$Q_{t_0,t}^L = \frac{\sum p_{t_0} q_t}{\sum p_{t_0} q_{t_0}} \cdot 100$$

Paaschen

$$Q_{t_0,t}^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t_0}} \cdot 100$$

Fisher

$$Q_{t_0,t}^F = \sqrt{Q_{t_0,t}^L \cdot Q_{t_0,t}^P}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

Aiheet

Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Yhden tuotteen hintaindeksi

Reaalikorko

Pääoman deflatoitu arvo

Tuoteryhmän hintaindeksi

Tuoteryhmän volyymi-indeksi

Indeksikaavat

6 Matriisit ja determinantit

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, (x_1 \ x_2 \ x_3) \text{ ja } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Matriiseihin perehtyminen voidaan perustella useilla järkeisillä.

(1) Matriisien avulla voidaan suuria lukujoukkoja esittää mahdollisimman pienellä vaivalla ja kokonaisille lukukaavioille voidaan antaa nimiä A, B, jne. Tämä helpottaa suuresti asioiden esittämistä. Eräissä tilanteissa matriisi on hyvin onnistunut ja havainnollinen tapa esittää lukuryhmiä. Esimerkiksi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

oleelliset osat tiivistyvät matriiseihin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

(2) Matriiseille voidaan määritellä yhteen- ja kertolasku. Matriiseilla voidaan siis laskea. Näiden laskutoimitusten avulla on kehitetty menetelmiä eräiden matriisien avulla kuvattavien ongelmien ratkaisemiseen. Esimerkkinä mainittakoon yhtälöryhmän ratkaiseminen.

(3) Vaikka itse et koskaan harrastaisikaan matriisilaskentaa, niin varmaa on, että tietokoneesi harrastaa. Jos tietokone esimerkiksi ei löydä ratkaisua yhtälöryhmälle se yleensä antaa virheilmoituksen, jossa se kertoo mitä vikaa oli kerroinmatriisissa. Virheilmoituksen ymmärtäminen edellyttää matriisilaskennan perusteiden osaamista.

6.1 Matriisin määritelmä ja laskulait

Määritelmä 6.1 Suorakulmainen lukukaavio, jossa on m vaakariviä ja n pystysaraketta on $m \times n$ -matriisi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Luvut a_{ij} ovat matriisin A alkiot ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Tyyppiä $m \times 1$ oleva matriisi on pystyvektori ja tyyppiä $1 \times n$ oleva matriisi on vaakavektori. Usein käytämme matriisille merkintää $A = (a_{ij})$. Vastaavasti matriisin A alkioille käytetään joskus merkintää $(A)_{ij}$.

Määritelmä 6.2 Matriisit $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ ovat samat (identtiset), jos ne ovat samaa tyyppiä ja $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$. Tällöin merkitään $A = B$.

Määritelmä 6.3 (a) Kahden $m \times n$ -matriisin $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ summa $A+B$ on $m \times n$ -matriisi $C = (c_{ij})$ s.e. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$.

(b) Reaaliluvun λ ja $m \times n$ -matriisin $A = (a_{ij})$ tulo λA on $m \times n$ -matriisi (λa_{ij}) . (Kaikki alkiot kerrotaan λ :lla.)

Sovimme merkintätavasta $(-1)A = -A$, jolloin $A + (-B) = A - B$.

Esimerkki 6.4

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Määritelmä 6.5 $m \times n$ -matriisin $A = (a_{ij})$ ja $n \times p$ -matriisin $B = (b_{jk})$ tulo AB on $m \times p$ -matriisi $C = (c_{ik})$ s.e. $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$.

(Tulomatriisin rivillä i sarakkeessa k oleva alkio c_{ik} saadaan A :n i :nnen vaakarivin ja B :n k :nnen pystysarakkeen pistetulona.)

Esimerkki 6.6 a)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Huomaa tyyppien yhteensopivuus: $(3 \times 2\text{-matriisi})(2 \times 3\text{-matriisi}) = (3 \times 3\text{-matriisi}).$)

b) Seuraavassa välimuotoja on vähemmän, mutta lasku on silti helppo tarkastaa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+0 & -1+0+0 \\ 0-2+0 & 0+0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(Huomaa tyyppien yhteensopivuus: $(2 \times 3\text{-matriisi})(3 \times 2\text{-matriisi}) = (2 \times 2\text{-matriisi}).$)

c) Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ja $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tällöin suora lasku osoittaa, että

(i) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 9 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mutta BA ei ole määritelty.

(ii) $B^2 = BB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, mutta $A^2 = AA$ ei ole määritelty.

(iii) $BC \neq CB$.

d) Sivulla 1 ollut yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muotoon $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eli

$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Määritelmä 6.6 Nollamatriisi O on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Jos matriisissa on sarakkeita yhtä monta kuin riviä, se on neliömatriisi. $n \times n$ -neliömatriisin (a_{ij}) päälävistäjä muodostuu alkioista a_{kk} , $1 \leq k \leq n$. Neliömatriisi I on yksikkömatriisi, jos sen päälävistäjän alkiot ovat ykkösiä ja muut nollia.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Neliömatriisi on diagonaalinen, jos sen ainoat nollasta eroavat alkiot ovat päälävistäjällä.

Lause 6.7 Olkoon A, B ja C $m \times n$ -matriiseja ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tällöin

- | | |
|--|--|
| (1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | $+_m$ on liitännäinen (assosiatiivinen) |
| (2) $A + O = A$ | nollamatriisi on $+_m$:n neutraalialkio |
| (3) $A + (-A) = O$ | $-A$ on $+_m$:n käänteisalkio |
| (4) $A + B = B + A$ | $+_m$ on vaihdannainen (kommutatiivinen) |
| (5) $1 \cdot A = A$ | |
| (6) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ | |
| (7) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ | |
| (8) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ | |

Lause 6.8 Olkoon A, B ja C matriiseja ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin

- | | |
|---|--|
| (1) $(AB)C = A(BC)$ | $\cdot_m$ on liitännäinen |
| (2) $A(B + C) = AB + AC$ | $+_m$ ja $\cdot_m$ noudattavat osittelulakeja |
| (3) $(A + B)C = AC + BC$ | ———— " ———— |
| (4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ | |
| (5) $IA = AI = A$ | I on kertolaskun $\cdot_m$ neutraalialkio (ykkösalkio) |

Esimerkki 6.9 Olkoon A, B ja C matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista että

- | | |
|--|---|
| (1) $AB \neq BA$ | Matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen |
| (2) $(AC = BC)$ vaikka $(A \neq B)$ | Matriisilla jakaminen (supistaminen) ei ole luvallista |
| (3) $(AB = O)$ vaikka $(A \neq O$ ja $B \neq O)$ | Tulo voi olla nolla, vaikka tekijät ovat nollasta poikkeavia. |

Eräitä todistuksia (Älä opettele näitä ulkoa):

$$(6.7) (1): \quad (A + (B + C))_{ij} = a_{ij} + (B + C)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} = (A + B)_{ij} + c_{ij} \\ = ((A + B) + C)_{ij}$$

(6.8) (1): Olkoon A, B ja C tyyppejä $m \times n$, $n \times p$ ja $p \times r$ olevat matriisit. Silloin matriisit $(AB)C$ ja $A(BC)$ ovat tyyppiä $m \times r$.

$$(AB)_{is} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ks} \quad \text{ja} \quad (BC)_{kj} = \sum_{s=1}^p b_{ks} c_{sj} \quad \text{joten}$$

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{s=1}^p (AB)_{is} c_{sj} = \sum_{s=1}^p \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ks} \right] c_{sj} = \sum_{1 \leq s \leq p, 1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ks} c_{sj} \quad \text{ja}$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left[\sum_{s=1}^p b_{ks} c_{sj} \right] = \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq s \leq p} a_{ik} b_{ks} c_{sj}$$

Siis $[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij} \forall i, j$ ja matriisit ovat samaa tyyppiä

$$\Rightarrow (AB)C = A(BC).$$

(6.8) (2): Olkoon matriisi A tyyppiä $m \times n$ ja matriisit B ja C tyyppiä $n \times p$. Tällöin

$$[A(B + C)]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = [\mathbf{AB} + \mathbf{AC}]_{ij}$$

(6.8) (4): Lausutaan yksikkömatriisi käyttäen Kroneckerin deltaa $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}$.

$$(\mathbf{IA})_{ij} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{i1} a_{1j} + \delta_{i2} a_{2j} + \cdots + \delta_{im} a_{mj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$$

$$(\mathbf{AI})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} = a_{i1} \delta_{1j} + a_{i2} \delta_{2j} + \cdots + a_{in} \delta_{nj} = a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$$

(6.9) (2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vaikka $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(6.9) (3): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vaikka $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$ ja $\begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}$ $\square$

6.2 Transponointi

Määritelmä 6.2.1 $m \times n$ -matriisin $A = (a_{ij})$ transponoitu matriisi eli transpoosi A^T on $n \times m$ -matriisi s.e. $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. (Matriisi A^T saadaan siis A :sta vaihtamalla vaakarivit pystysarakkeiksi.)

Esimerkki 6.2.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$$

(Huomaa, että vasen ylänurkka pysyy paikallaan.)

Lause 6.2.3 Jos matriisien A ja B väliset laskutoimitukset ovat määriteltyjä ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

- (1) $(A^T)^T = A$
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$

Todistus: Kohdat (1) - (3) nähdään välittömästi.

$$(4): \left[(AB)^T \right]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \left[B^T A^T \right]_{ij} \quad \square$$

Määritelmä 6.2.4 Neliömatriisi $A = (a_{ij})$ on symmetrinen, jos $a_{ij} = a_{ji} \ \forall \ i, j$. Neliömatriisi $A = (a_{ij})$ on antisymmetrinen, jos $a_{ij} = -a_{ji} \ \forall \ i, j$.

Selvästi neliömatriisi A on symmetrinen, jos ja vain jos $A^T = A$. Jokainen neliömatriisi voidaan esittää symmetrisen ja antisymmetrisen matriisin summana $A = A^+ + A^-$, missä $A^+ = \frac{1}{2}(A + A^T)$ on symmetrinen ja $A^- = \frac{1}{2}(A - A^T)$ on antisymmetrinen.

6.3 Käänteismatriisi

Reaalilukujen tapauksessa luvun a käänteisluku a^{-1} on sellainen luku, että $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$ (missä 1 = kertolaskun neutraalialkio) Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla O :sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia.

Määritelmä 6.3.1 Neliömatriisi A on säännöllinen, jos on olemassa käänteismatriisi A^{-1} siten, että $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Lause 6.3.2 Jos neliömatriisi A on säännöllinen, niin

- (1) käänteismatriisi A^{-1} on yksikäsitteinen,
- (2) matriisiyhtälöllä $Ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = A^{-1}b$.

Todistus: (1): Olkoon X ja Y kaksi A :n käänteismatriisia. Silloin $Y = YI = Y(AX) = (YA)X = IX = X$ (2): $A^{-1}b = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ix = x$. $\square$

Esimerkki 6.3.3 a) Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Silloin $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, sillä

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Yhtälöryhmän $\begin{cases} x+y=4 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ eli matriisiyhtälön $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Ryhmän $\begin{cases} x+3y+z-u-2w=1 \\ 5y-z-2u+w=0 \\ -2y+2z+6w=2 \\ x-y+3z+u+2w=3 \\ 2x+5z+3u=-2 \end{cases}$ ratkaisu on $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -4.75 & 3.00 & -7.00 & 14.75 & -4.50 \\ 0.25 & 0.00 & 0.50 & -1.25 & 0.50 \\ 2.50 & -1.50 & 3.25 & -6.50 & 2.00 \\ -1.00 & 0.50 & -0.75 & 1.00 & 0.00 \\ -0.75 & 0.50 & -0.75 & 1.75 & -0.50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34.5 \\ -3.5 \\ -14.5 \\ 0.5 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

On selvää, että käänteismatriisin määrittäminen on seuraava kiirreellisesti selvitetävä asia. Tässä tarvitaan determinanttia, joka määritellään seuraavassa luvussa. Todetaan vielä muutama käänteismatriisin ominaisuus.

Lause 6.3.4 Olkoot A ja B säännöllisiä $n \times n$ -matriiseja. Silloin myös A^{-1} , A^T ja AB ovat säännöllisiä ja

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$
- (2) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
- (3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- (4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Todistus: (1) Suoraan määritelmästä.

- (2) Lauseiden 6.1.8(4) ja 6.1.7(6) perusteella
 $(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = \lambda^{-1}(\lambda A)(A^{-1}) = (\lambda^{-1}\lambda)(AA^{-1}) = I$ ja
 $(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = \lambda(\lambda^{-1}A^{-1})A = (\lambda\lambda^{-1})(A^{-1}A) = I$
- (3) Lauseen 6.1.8(1) perusteella
 $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ ja
 $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$
- (4) Lauseen 6.2.3(4) perusteella
 $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$ ja
 $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I \quad \square$

Lause 6.3.5 Jos matriisi A on säännöllinen, niin

- (1) $(AB = AC) \Rightarrow (B = C)$
- (2) $(BA = CA) \Rightarrow (B = C)$

Todistus: Oletuksen mukaan on olemassa A^{-1} siten, että

- (1) $B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = IC = C$
- (2) $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CI = C \quad \square$

6.4 Determinantti

Tässä kappaleessa määritellään determinantti ja osoitetaan sille ominaisuuksia, joita tarvitaan matriisin kääntämisessä. Kaksi- ja kolmirivisen determinantin määrittäminen tulee osata käsin mutta useampirivisten determinanttien määrittäminen tehdään numeerisesti tietokoneella.

Määritelmä 1.4.1 (Kaksirivinen determinantti, [määritelmä löytyy taulukkokirjoista])

2×2-matriisin $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ determinantti on $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$. Ratkaistaan yhtälöparista

muuttuja x yhteenlaskukeinolla eliminoimalla muuttuja y

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \begin{matrix} \cdot a_{22} \\ \cdot -a_{12} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \cdot x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

Välittömästi havaitaan, että yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu, jos kerroinmatriisin kaksirivinen determinantti on nollasta poikkeava.

Määritelmä 6.4.2 (Kolmirivinen determinantti, [määritelmä löytyy taulukkokirjoista])

3×3-matriisin $A = (a_{ij})$ determinantti on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- (Muistisääntö: (i) kertoimet yläriviltä
(ii) kertoimen perään kaksirivinen determinantti, joka saadaan poistamalla alkuperäisestä determinantista kerrointa vastaava rivi ja sarake
(iii) termien merkit + - +)

Määritelmä 6.4.3 (Nelirivinen determinantti, 4×4-matriisin $A = (a_{ij})$ determinantti on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

- (Muistisääntö: (i) kertoimet yläriviltä
(ii) kertoimen perään kolmirivinen determinantti, joka saadaan poistamalla alkuperäisestä determinantista kerrointa vastaava rivi ja sarake
(iii) termien merkit + - + -)

Edellä olleet määritelmät on helppo laajentaa rekursiivisesti isommille determinanteille. (Rekursiivisuus tarkoittaa sitä, että 2-rivisen determinantin määrittelyn jälkeen n -rivinen determinantti määritellään $(n-1)$ -rivisten determinanttien avulla. Tällöin kaikki determinantit palautuvat kaksiriviseen. Rekursiivinen määritelmä on usein helposti koodattavissa tietokonealgoritmiksi.)

Lause 6.4.4

- a) $\det(I) = 1$.
b) Neliömatriisi A on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi A^{-1}) jos ja vain, jos $\det(A) \neq 0$
c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
d) Jos neliömatriisi A on säännöllinen, niin $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Todistus: sivuutetaan. $\square$

Lause 6.4.5

- a) Determinantin arvo säilyy jos rivit ja sarakkeet vaihdetaan (siis $\det(A^T) = \det(A)$)
b) Jos determinantissa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, muuttuu determinantin arvo alkuperäisen vastaluvuksi.
c) Jos determinantissa on nollarivi (tai nollasarake), niin determinantin arvo on 0.
d) Jos jokin determinantin rivi lisätään reaaliluvulla kerrottuna toiseen riviin, ei determinantin arvo muutu (sama pätee sarakkeille).
e) Jos jokin determinantin rivi kerrotaan reaaliluvulla k , niin determinantin arvo tulee k -kertaiseksi.

Todistus: Kaksi- ja kolmirivisille determinanteille ominaisuudet todetaan suoralla laskulla. n -rivinen determinantti vaatisi tarkemman tarkastelu, mutta sivuutamme sen tässä. $\square$

Nelirivisen determinantin laskeminen lauseen 6.4.3 mukaisesti on joskus työlästä. Edellisen lauseen ominaisuudet helpottavat suuresti isojen determinanttien laskemista.

Esimerkki 6.4.6

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{a)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{b)}{=} - \left(0 - 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 0 \right)$$

$$= 2 \left(0 - 0 + 3 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = 2 \cdot 3 (-1 \cdot 2 - (-4) \cdot 3) = 60$$

a) vaihdetaan 1. ja 3. rivi

b) sovelletaan nelirivisen determinantin määritelmää.

6.5 Determinantin kehittäminen

Ensin käsittelemme Gaussin algoritmin, jossa determinantti ensin muutetaan yläkolmiomuotoon. Yläkolmiomuoto on muoto, jossa päälävistäjän alla on vain nollia.

Esimerkiksi determinantit

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

ovat yläkolmiomuodossa.

Lause 6.5.1 Jos $n \times n$ -matriisin A determinantti $\det(A)$ on yläkolmiomuodossa (eli $a_{ij} = 0$, jos $i > j$), niin determinantin arvo on päälävistäjällä olevien alkioiden tulo $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Todistus: Suora lasku. $\square$

Lauseen 6.4.6 kohdan (d) mukaan determinantin arvo ei muutu, jos sen riviin lisätään skalaarilla kerrottu toinen rivi. Tällaisten rivioperaatioiden avulla (ja mahdollisesti vaihtamalla rivejä keskenään) voidaan determinantti aina muuttaa yläkolmiomuotoon. Ennen Gaussin algoritmia esitämme muutaman esimerkin.

Esimerkki 6.5.2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & +2 \\ 1 & 5 & 0 & \leftarrow & \\ -2 & 2 & -3 & & \leftarrow \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & \leftarrow & \\ 0 & 8 & -5 & & \leftarrow \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-9) = -18 \\ \text{b)} \quad & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & +1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & \leftarrow & & \\ 4 & 0 & 1 & 3 & & \leftarrow & \\ -2 & 1 & 0 & 5 & & & \leftarrow \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{vaihdetaan} \\ \text{rivit 2 ja 3} \end{array} \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} +1 \\ \leftarrow \end{array} \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -1 \\ \leftarrow \end{array} \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 5 = 20$$

Olkoon A seuraavassa $n \times n$ -matriisi. Seuraavan prosessin aikana determinantin ulkoasu muutetaan vaiheittain yläkolmiomuotoon siten, että determinantin arvo koko ajan säilyy samana. Merkitään peräkkäisiä muotoja: $|A| = |A(1)| \rightarrow |A(2)| \rightarrow |A(3)| \rightarrow \dots \rightarrow$ |yläkolmiomuoto|

Gaussin algoritmi:

- (0) Aseta $k = 1$, $|A(1)| = |A|$
- (1) Otetaan tukialkioksi (pivot element) alkio $a(k)_{kk}$.
- (2) Jos tukialkio on 0 ja tukialkion sarakkeessa tukialkion alapuolella on nollasta poikkeava alkio $a(k)_{rk}$, $r > k$, vaihdetaan rivit r ja k keskenään ja saatu uusi determinantti kerrotaan (-1) :llä.
- (3) Lisätään tukialkion rivin alapuolella oleviin riveihin tukialkion rivi sopivalla luvulla kerrottuna siten, että tukialkion alapuolella olevat alkion muuttuvat nolliksi.
- (4) Jos $k < n-1$, niin kasvatetaan k :ta yhdellä ja siirrytään kohtaan (1) muuten kohtaan (5).
- (5) $\det(A) = a(k)_{11} \cdot a(k)_{22} \cdots a(k)_{nn}$

Huomautus: Kohdan (3) rivioperaatiot eivät onnistu, jos tukialkio on 0. Tämän takia tehdään rivinvaihto kohdassa (2), jotta tukialkio olisi nollasta poikkeava. Jos tukialkio ja lisäksi kaikki sen alla olevat alkioit ovat nolliä, ei kohdassa (3) tarvitse tehdä mitään.

Seuraavaksi esittelemme ns. alideterminanttikehityksen.

Määritelmä 6.5.3 Matriisin A alimatriisi A_{ij} saadaan poistamalla A :sta i :s rivi ja j :s sarake. Alimatriisin determinantti $\det(A_{ij})$ on alkioon a_{ij} liittyvä *minori* (alideterminantti). Lukua $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ sanotaan alkion a_{ij} *kofaktoriksi*.

Esimerkki 6.5.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -5 & -4 \\ 7 & 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \\ 7 & 8 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{23}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \\ 7 & 8 & 20 \end{vmatrix}$$

Seuraava lause on luonnollinen yleistys determinantin aiemmalle määritelmälle (6.4.2 ja 6.4.3).

Lause 6.5.5 $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$ (kehitemä i :nnen rivin suhteen)

$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj})$ (kehitemä j :nnen sarakkeen suhteen)

Todistus: sivuutetaan $\square$

Determinantti kannattaa kehittää sen rivin tai sarakkeen suhteen, jolla on eniten nollia.

Esimerkki 6.5.6

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot (-15 - 0) - 3 \cdot (-3 - 0) - 1 \cdot (2 + 10) = -18$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} a_{13} |A_{13}| + (-1)^{2+3} a_{23} |A_{23}| + (-1)^{3+3} a_{33} |A_{33}| + (-1)^{4+3} a_{43} |A_{43}|$

$= 0 \cdot |A_{13}| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot |A_{43}|$

$= -1 \cdot \left\{ 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\} + 1 \cdot \left\{ 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$

$= -1 \cdot \{ 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 26 - 1 \cdot 4 \} + 1 \cdot \{ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 16 - 1 \cdot 4 \} = 20$

6.6 Matriisin kääntäminen

Määritelmä 6.6.1 $n \times n$ -matriisin A *adjungaatti* on $n \times n$ -matriisi $\text{adj}(A) = (\alpha_{ij})$, missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$ (, joka on siis alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori). Adjungaatti on siis kofaktorimatriisin transpoosi.

Lause 6.6.2 Jos $\det(A) \neq 0$, niin $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Todistus: sivuutetaan $\square$

Esimerkki 6.6.3 Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Silloin

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-16 - 6) - 1 \cdot (4 - 0) + 3 \cdot (3 - 0) = -39$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -22, \quad |A_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4, \quad |A_{13}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 5, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{pmatrix} = \frac{1}{-39} \begin{pmatrix} -22 & -5 & -14 \\ -4 & -8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ennen yhtälöryhmiin siirtymistä käsittelemme Gaussin algoritmin muunnelman, jonka avulla voidaan konstruoida matriisin käänteismatriisi. Algoritmi käyttää rivioperaatioita, joten toteamme ensin joitakin yleisiä ominaisuuksia rivioperaatioille.

Olkoon A seuraavassa $n \times n$ -matriisi. Rivioperaatiot voidaan muuntaa matriisilla (rivioperaattorilla) kertomiseksi seuraavalla tavalla:

1) kahden rivin vaihto

Kun matriisi A kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$E_{p,q;\text{vaihto}} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{pq} = e_{qp} = 1 \\ e_{ii} = 1, \text{ kun } i \neq p \text{ ja } i \neq q, \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases}$$

niin rivit p ja q vaihtavat paikkaa.

$$\text{Esim: } E_{1,2;\text{vaihto}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

2) rivin kertominen luvulla λ

Kun matriisi A kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$E_{p;\lambda} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{ii} = 1, \text{ kun } i \neq p \\ e_{ii} = \lambda, \text{ kun } i = p, \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases}$$

niin rivi p tulee kerrotuksi luvulla λ .

$$\text{Esim: } E_{2;10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 110 & 120 & 130 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

3) rivin p lisääminen luvulla λ kerrottuna riviin q

Kun matriisi A kerrotaan matriisilla (rivioperaattorilla)

$$E_{p,q;\lambda} = (e_{ij}), \text{ missä } \begin{cases} e_{ii} = 1, \forall i \\ e_{qp} = \lambda \\ e_{ij} = 0, \text{ muulloin} \end{cases},$$

niin rivi p tulee lisätyksi luvulla λ kerrottuna riviin q .

$$\text{Esim: } E_{1,2;100} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 111 & 212 & 313 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

Kaikki edellä esiintyneet rivioperaattorit E ovat säännöllisiä sillä helposti nähdään että

$$(E_{p,q;\text{vaihto}})^{-1} = E_{p,q;\text{vaihto}},$$

$$(E_{p;\lambda})^{-1} = E_{p;1/\lambda} \text{ ja}$$

$$(E_{p,q;\lambda})^{-1} = E_{p,q;-\lambda}.$$

Apulause 6.6.4 Olkoon A säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos on olemassa $n \times n$ -matriisi B , jolle $BA = I$, niin $A^{-1} = B$.

Todistus: $AB = ABI = ABAA^{-1} = AIA^{-1} = I \quad \square$

Apulause 6.6.5 Olkoon A säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos on olemassa rivioperaattorijono $E_1, E_2, \dots, E_n$, jolle on voimassa $E_n \cdots E_2 E_1 A = I$, niin $A^{-1} = E_n \cdots E_2 E_1 I$.

Todistus: Seuraa edellisestä apulauseesta.

Lause 6.6.6 Olkoon A säännöllinen $n \times n$ -matriisi. Jos A voidaan muuttaa jonolla rivioperaatioita yksikkömatriisiksi I , niin käänteismatriisi A^{-1} saadaan tekemällä samat rivioperaatiot yksikkömatriisille I .

Todistus: Seuraa edellisestä apulauseesta.

Esimerkki 6.6.7 Määritä matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi. Tarkastellaan

yhdistettyä matriisia $(A|I)$, tehdään rivioperaatioita yhdistetylle matriisille, kunnes vasen puoli on I . Yhdistetyn matriisin oikea puoli antaa silloin käänteismatriisin.

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +\text{rivi1} \\ +2 \cdot \text{rivi1} \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \cdot 1/2 \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \cdot \text{rivi2} \\ +4 \cdot \text{rivi2} \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +4 \cdot \text{rivi3} \\ -\text{rivi3} \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) = (I|A^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Siis } A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ -7/2 & -3/2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Menetelmä johtaa helposti hankaliin murtolukulaskuihin, mutta se on erittäin suoraviivainen ja sellaisena helppo omaksua.

Gaussin algoritmi (käänteismatriisin määrittämiseksi):

- (0) Aseta $k = 1$, $B(1) = (A|I)$
- (1) Otetaan tukialkioksi (pivot element) alkio $b(k)_{kk}$.
- (2) Jos tukialkio on 0 ja tukialkion sarakkeessa tukialkion alapuolella on nollasta poikkeava alkio $b(k)_{rk}$, $r > k$, vaihdetaan rivit r ja k keskenään. Jos tukialkio on 0 ja sen alapuoleltakaan ei löydy nollasta poikkeavaa alkiota, lopetetaan ja todetaan ettei käänteismatriisia ole olemassa.
- (3) Jaetaan tukialkion rivi tukialkiolla. (Eli tehdään tukialkio 1:ksi.)
- (3) Lisätään tukialkion rivi muihin riveihin sopivalla luvulla kerrottuna siten, että tukialkion ylä- ja alapuolella olevat alkion muuttuvat nolliksi.
- (4) Jos $k < n$, niin kasvatetaan k :ta yhdellä ja siirrytään kohtaan (1) muuten kohtaan (5).
- (5) A^{-1} = saadun $n \times 2n$ -matriisin $B(k)$ oikea puolikas.

7 Lineaarinen yhtälöryhmä

7.1 Ratkaisujen olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Tässä kappaleessa yhtälöryhmällä tarkoitetaan aina lineaarista yhtälöryhmää, joka määritellään seuraavassa.

Määritelmä 7.1.1: Lineaarinen yhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

missä kertoimet a_{ij} ja b_i ovat reaalityyppisiä lukuja kaikille $1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$.

- m = yhtälöiden lukumäärä, n = tuntemattomien lukumäärä.
- Jono $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on ratkaisu, jos se toteuttaa kaikki yhtälöryhmän yhtälöt. Ratkaisu on ei-triviaali, jos ainakin yksi $x_i \neq 0$.
- Yhtälöryhmä on homogeeninen, jos $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Jos ainakin yksi $b_i \neq 0$, niin yhtälöryhmä on epähomogeeninen.
- Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina triviaaliratkaisu $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.
- Pystyvektorista $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T$ käytetään nimitystä RHS (eli Right Hand Side). Yhtälöryhmä on siis homogeeninen, jos RHS on nollavektori.
- Jos $m = n$, niin yhtälöryhmä on kvadraattinen.
- Merkitsemällä $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ja $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ voidaan yhtälöryhmä esittää matriisimuodossa

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Seuraavaan taulukkoon on koottu yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärää koskevat tulokset.

		homogeeninen ryhmä	epähomogeeninen ryhmä
$n < m$	joko	vain triviaaliratkaisu	korkeintaan yksi ratkaisu
	tai	äärettömän monta ratkaisua	äärettömän monta tai ei yhtään ratkaisua
$n = m$	$\det(A) \neq 0$	vain triviaaliratkaisu	täsmälleen yksi ratkaisu
$n = m$	$\det(A) = 0$	äärettömän monta ratkaisua	äärettömän monta tai ei yhtään ratkaisua
$n > m$		äärettömän monta ratkaisua	äärettömän monta tai ei yhtään ratkaisua

Todistamme taulukon väitteistä vain yhden.

Lause 2.1.2 Jos kvadraattisen lineaarisen yhtälöryhmän kerroinmatriisi on säännöllinen, eli $\det(A) \neq 0$, niin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu, joka homogeenisen yhtälöryhmän tapauksessa on triviaaliratkaisu.

Todistus: Tarkastellaan ensin homogeenisen yhtälöryhmän tapausta. Tehdään vastaoletus: on olemassa ei-triviaali ratkaisu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, jolle $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Käytämme matriisin j :nnestä sarakkeesta merkintää $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$. Yhtälöryhmä voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Olkoon k ensimmäinen indeksi, jolla $x_k \neq 0$. Silloin

$$\mathbf{a}_k = -\frac{x_{k+1}}{x_k} \mathbf{a}_{k+1} - \dots - \frac{x_n}{x_k} \mathbf{a}_n$$

Jos laskemme A :n determinantin arvon, voimme siis lisätä k :nteen sarakkeeseen sarakkeen

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \mathbf{a}_{k+1} + \dots + \frac{x_n}{x_k} \mathbf{a}_n,$$

jolloin sarake k muuttuu nollasarakkeeksi, ja $\det(A) = 0$.

Osoitimme edellä, että "kun on olemassa ei-triviaali ratkaisu, niin $\det(A) = 0$ ". Tästä seuraa kääntäen, että "kun $\det(A) \neq 0$, niin on olemassa vain triviaaliratkaisu". Tämä osoittaa lauseen todeksi homogeenisen yhtälöryhmän tapauksessa.

Tarkastellaan toiseksi epähomogeenisen yhtälöryhmän tapausta. Koska $\det(A) \neq 0$, matriisi on säännöllinen joten sillä on käänteismatriisi A^{-1} . Nyt suora lasku osoittaa, että $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ on yksi yhtälöryhmän ratkaisu. Pitää vielä osoittaa, että tämä on ainoa ratkaisu.

Olkoon $\mathbf{y}$ toinen yhtälöryhmän ratkaisu. Merkitään $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, jolloin

$$A\mathbf{z} = A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisuna $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Siis $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{x}$ ja $\mathbf{x}$ on ainoa ratkaisu. $\square$

7.2 Gaussin eliminointimenettely

Tarkastellaan kvadraattista lineaarista yhtälöryhmää,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (7.2.1)$$

jonka kerroinmatriisi A on säännöllinen.

Apulause 7.2.1 Jos yhtälöryhmän (7.2.1) kerroinmatriisi A on säännöllinen ja on olemassa jono rivioperaatioita, joilla kerroinmatriisi voidaan muuttaa yksikkömatriisiksi, niin yhtälöryhmän ratkaisu saadaan tekemällä samat rivioperaatiot RHS:lle.

Todistus: Olkoon $E_n \cdots E_2 E_1 A = I$. Silloin apulauseen 6.6.5 mukaan

$$E_n \cdots E_2 E_1 b = \underbrace{E_n \cdots E_2 E_1 I}_{A^{-1}} \underbrace{b}_{Ax} = x \quad \square$$

Esimerkki 7.2.2 Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Yhdistetään kerroinmatriisi ja RHS ja tehdään rivioperaatiot yhdistetylle matriisille.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} -2 \cdot \text{rivi}1 \\ -\text{rivi}1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{array} \right) \leftarrow \cdot 1/5 \\ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3/5 & -14/5 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{array} \right) & \begin{array}{l} +2 \cdot \text{rivi}2 \\ -4 \cdot \text{rivi}2 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -14/5 \\ 0 & 0 & 12/5 & 44/5 \end{array} \right) \leftarrow \cdot 5/12 \\ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -14/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} +1/5 \cdot \text{rivi}3 \\ +3/5 \cdot \text{rivi}3 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Siis yhtälöryhmän ratkaisu on $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

Esimerkki 7.2.3 Edellä kuvatut rivioperaatiot saattavat johtaa hankaliin murtolukuihin vaikka lopullinen vastaus olisikin yksinkertainen. Virheen mahdollisuus on silloin suuri. Laskutoimituksia voidaan yksinkertaistaa, jos kerroinmatriisi viedäänkin vain yläkolmiomuotoon ja muuttujien arvot ratkaistaan sen jälkeen peräkkäisillä sijoituksilla. Tarkastellaan samaa yhtälöryhmää kuin edellisessäkin esimerkissä.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot \text{rivi}1 \\ -\text{rivi}1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -4/5 \cdot \text{rivi}2 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 12/5 & 44/5 \end{array}\right)$$

Viimeinen muoto tarkoittaa, että

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 5y - 3z = -14 \\ \frac{12}{5}z = \frac{44}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & \Rightarrow x = 7 + 2 \cdot y - z = 2 \\ & \Rightarrow y = 1/5 \cdot (-14 + 3 \cdot z) = -1 \\ & \Rightarrow z = 3 \end{aligned}$$

7.3 Cramerin kaavat

Olkoon $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kvadraattinen lineaarinen yhtälöryhmä, jolle $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Silloin $\mathbf{A}$:n käänteismatriisi voidaan lausua adjungaatin avulla. Saamme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

missä $A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ on alkioon a_{ij} liittyvä kofaktori. Kehittämällä seuraava determinanti k :nnen sarakkeensa suhteen voimme laskea

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & b_n & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} b_j |A_{jk}| \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \sum_{j=1}^n A_{jk} b_j = \text{matriisitulon } \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ } k\text{:s alkio} \\ &= x_k \end{aligned}$$

Cramerin kaava: Yhtälöryhmän $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ k :s tuntematon saadaan lausekkeesta $x_k = \frac{D_k}{D}$,

missä D on kerroinmatriisin determinanti ja D_k on determinanti, joka saadaan, kun kerroinmatriisin k :s sarake korvataan $\mathbf{b}$:llä (eli RHS:llä).

Esimerkki 7.3.1 Ratkaistaan Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot \text{rivi1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\text{rivi1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -25$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot \text{rivi1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot \text{rivi1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Siis $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{25}{13}$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{10}{13}$ ja $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{13}$

7.4 Homogenisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Tarkastellaan yksinkertaista esimerkkiä lineaarisesta homogeenisesta yhtälöryhmästä.

Esimerkki 7.4.1: Etsi ei-triviaalit ratkaisut yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

Koska kerroinmatriisin determinantti on 0, ei Cramerin kaavaa voi käyttää. Toisaalta samasta syystä tiedämme, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua (taulukko s. 107). Ratkaisemme yhtälöryhmän Gaussin eliminointimenetelmällä. Tällä kertaa pidämme yhtälöt yhtälöinä, mutta menettely muuten on sama kuin sivuilla 108-109.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \quad \text{vaihdetaan aluksi 1. ja 2. yhtälö} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 & -2 \quad -1 \\ 2x - y - z = 0 & \leftarrow \\ x + y - 5z = 0 & \leftarrow \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases} \quad \text{3. yhtälö on sama kuin 2., joten se poistetaan} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -z \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisun loppuvaiheet olisi myös voinut tehdä seuraavilla tavoilla

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -x \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x/2 \\ z = x/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3b/2 \\ b/2 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

tai

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ -3z = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y/3 \\ z = y/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c/3 \\ c \\ c/3 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

Kaikki kolme ratkaisua merkitsevät samaa.

Seuraava ratkaisutapa ei ole täysin "idioottivarma", sillä se voi johtaa hankaliin erikoistapauksiin. Useimmiten se kuitenkin toimii hyvin.

Nopea ratkaisutapa homogeenisen ryhmän ei-triviaalin ratkaisun löytämiseksi

- * anna yhdelle muuttujalle arvoksi a (esim $z = a$)
- * siirrä äsken valittua muuttujaa sisältävät termit RHS:iin
- * poista yksi yhtälöistä (hävittämättä yhtään muuttujaa)
- * ratkaise syntynyt ei-homogeeninen ryhmä (esim Cramerin menetelmällä)

Esimerkki 7.4.2: Ratkaistaan uudelleen edellisen esimerkin yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

Merkitään $z = a$, poistetaan ylin yhtälö ja siirretään a :ta sisältävät termit oikealle.

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = -a \\ x + y = 5a \end{cases}$$

Syntynyt yhtälöpari on helppo ratkaista millä tahansa keinolla, mutta mallin vuoksi ratkaisemme sen Cramerin kaavoilla.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad D_1 = \begin{vmatrix} -a & -1 \\ 5a & 1 \end{vmatrix} = 4a \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & 5a \end{vmatrix} = 6a$$

Siis

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{4a}{2} = 2a, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{6a}{2} = 3a, \quad z = a.$$

8 Vektoriavaruudet

Tässä kappaleessa esittelemme vektoriavaruuden käsitteen ja siihen liittyviä merkintätapoja. Aihetta käsitellään huomattavan kevyesti verrattuna siihen tapaan, jolla useat alan oppikirjat asian esittävät. Useimmat oppikirjat on tarkoitettu tekniikan opiskelijoille tai johonkin erityiskysymykseen (esim. lineaariseen regressioon) perehtyville. Talousmatematiikan perusteisiin riittää huomattavasti suppeampi paketti.

8.1 Euklidinen vektoriavaruus $\mathbb{E}^n$ (eli $\mathbb{R}^n$)

Euklidinen vektori on järjestetty lukujono. Vektoreille käytetään tilanteesta riippuen joko vaakavektorinotaatiota $\bar{u} = (x, y)$ tai pystyvektorinotaatiota $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Valitsemme nyt näistä merkintätavoista pystyvektorimerkinnän mutta tekstin sujuvuuden takia merkitsemme sitä usein transpoosin avulla $\mathbf{u} = (x, y)^T$.

Sovimme, että $\mathbb{E}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathbb{E}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$, jne.

Yleisesti $\mathbb{E}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ on n -ulotteinen Euklidinen vektoriavaruus. Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, niin luku x_k on vektorin $\mathbf{x}$ k :s komponentti.

Esimerkki 8.1.1: Olkoon tutkittavanamme toimiala, jolla toimii 100 yritystä. Luokittelemme yritykset taloudellisen tilansa perusteella kolmeen luokkaan "heikot" (20kpl), "kohtalaiset" (50 kpl) ja "hyvät" (30kpl). Lukumäärästä saamme jakaumavektorin $\mathbf{q} = (20, 50, 30)^T$. Toisaalta tiedämme, että huonot yritykset tuottavat keskimäärin 1 mmk vuodessa, kohtalaiset yritykset tuottavat keskimäärin 2 mmk vuodessa ja hyvät yritykset tuottavat keskimäärin 5 mmk vuodessa. Näistä keskimääräisistä tuottoluvuista saadaan tuottovektori $\mathbf{r} = (1, 2, 5)^T$. Nyt koko toimialan vuotuisen tuoton voidaan odottaa olevan

$$R = \mathbf{r}^T \mathbf{q} = (1, 2, 5) \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 5 \cdot 30 = 270 \text{ (mmk vuodessa)}$$

Esimerkki 8.1.2: Jatketaan edellisen esimerkin tarkastelua. Olkoon yritysten jakaumavektori tällä hetkellä $\mathbf{q} = (20, 50, 30)^T$. Yritykset voivat vuoden kuluessa muuttaa tilaansa seuraavin todennäköisyyksin

tila vuoden kuluttua	tila nyt	todennäköisyys
huono (1)	huono (1)	$p_{11} = 0.7$
kohtalainen (2)	huono (1)	$p_{21} = 0.2$
hyvä (3)	huono (1)	$p_{31} = 0.1$
huono (1)	kohtalainen (2)	$p_{12} = 0.3$
kohtalainen (2)	kohtalainen (2)	$p_{22} = 0.5$
hyvä (3)	kohtalainen (2)	$p_{32} = 0.2$
huono (1)	hyvä (3)	$p_{13} = 0.2$
kohtalainen (2)	hyvä (3)	$p_{23} = 0.2$
hyvä (3)	hyvä (3)	$p_{33} = 0.6$

Olkoon $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ yritysten jakaumavektori vuoden kuluttua. Silloin voimme arvioida, että $Q_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + p_{13}q_3$, $Q_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + p_{23}q_3$ ja $Q_3 = p_{31}q_1 + p_{32}q_2 + p_{33}q_3$. Mutta tähän merkitsee sitä, että

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{q},$$

missä $\mathbf{P}$ on siirtymätodennäköisyysmatriisi. Kahden vuoden kuluttua jakauman odotusarvo on $\mathbf{PQ} = \mathbf{PPq} = \mathbf{P}^2\mathbf{q}$. Jos siirtymätodennäköisyydet pysyvät lähivuosina vakioina, voimme numeerisesti arvioida tulevien vuosien jakaumia. (Seuraava taulukko on laskettu MathCad-ohjelmalla.)

vuosi n	$P^n \mathbf{q} =$	jakauma
1	$P \mathbf{q} =$	$(35.000 \ 35.000 \ 30.000)^T$
2	$P^2 \mathbf{q} =$	$(41.000 \ 30.500 \ 28.500)^T$
3	$P^3 \mathbf{q} =$	$(43.550 \ 29.150 \ 27.300)^T$
4	$P^4 \mathbf{q} =$	$(44.690 \ 28.745 \ 26.565)^T$
5	$P^5 \mathbf{q} =$	$(45.220 \ 28.624 \ 26.157)^T$

Kun siirtymätodennäköisyydet pysyvät muuttumattomina, lähestyy jakauma tasapainojakaumaa, joka ei enää muutu. Tasapainojakaumalle pätee siis

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.7q_1 + 0.3q_2 + 0.2q_3 = q_1 \\ 0.2q_1 + 0.5q_2 + 0.2q_3 = q_2 \\ 0.1q_1 + 0.2q_2 + 0.6q_3 = q_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.3q_1 + 0.3q_2 + 0.2q_3 = 0 \\ 0.2q_1 - 0.5q_2 + 0.2q_3 = 0 \\ 0.1q_1 + 0.2q_2 - 0.4q_3 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan homogeeninen yhtälöryhmä kuten esimerkissä 7.4.2. Merkitään $q_3 = a$, poistetaan ylin yhtälö ja siirretään a :ta sisältävät termit oikealle. Saamme

$$\begin{cases} 0.2q_1 - 0.5q_2 = -0.2a \\ 0.1q_1 + 0.2q_2 = 0.4a \end{cases} \quad \text{siis}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{vmatrix} = 0.09, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -0.2a & -0.5 \\ 0.4a & 0.2 \end{vmatrix} = 0.16 \cdot a, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.2a \\ 0.1 & 0.4a \end{vmatrix} = 0.1 \cdot a.$$

$$\text{Siis } q_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0.16a}{0.09} = \frac{16a}{9}, \quad q_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0.10a}{0.09} = \frac{10a}{9} \quad \text{ja} \quad q_3 = a = \frac{9a}{9}.$$

Koska yrityksiä on kaikkiaan 100 kappaletta pitää olla

$$q_1 + q_2 + q_3 = 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{16a}{9} + \frac{10a}{9} + \frac{9a}{9} = 100$$

$$\Leftrightarrow 35a = 900$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{900}{35} = \frac{180}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{16a}{9} = \frac{16 \cdot 180}{9 \cdot 7} = \frac{16 \cdot 20}{7} \approx 45.71 \\ q_2 = \frac{10a}{9} = \frac{10 \cdot 180}{9 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 20}{7} \approx 28.57 \\ q_3 = a = \frac{180}{7} \approx 25.71 \end{cases}$$

Kahden vektorin $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ välinen pistetulo (skalaaritulo, sisätulo) on luku (skalaari)

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ normi on

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

(Kun vertaa määritelmiä koulukurssissa opetettuun huomaa, että nyt annettu määritelmä on yleistys, joka yhtyy entiseen, kun $n = 2$ ja $n = 3$.)

Sanomme (kanoonisiksi) kantavektoreiksi vektoreita

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

On selvää, että jokainen vektori $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ voidaan kirjoittaa komponenttiensa ja kantavektoreiden avulla muotoon

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n.$$

8.2 Lineaarinen kuvaus

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi tarkastelemme nyt kolmiulotteista vektoriavaruutta $\mathbb{E}^3$. Tulokset on helppo yleistää n -ulotteiseen vektoriavaruuteen. Annamme kaksi määritelmää kuvauksen $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ lineaarisuudelle. Ensimmäinen määritelmä on "virallinen" ja toinen on havainnollinen.

Määritelmä 8.2.1: Kuvaus $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ on lineaarinen, jos

- (1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$ (eli summan kuva on kuvien summa)
- (2) $f(\lambda \mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a})$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{E}^3, \lambda \in \mathbb{R}$ (kerrotun kuva saadaan kertomalla kuva)

Määritelmä 8.2.2: Kuvaus $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ on lineaarinen, jos se määrittelee $\mathbf{y}$:n komponentit lineaarisina lausekkeina $\mathbf{x}$:n komponenteista. Toisin sanoen, jos

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Jälkimmäisestä määritelmästä seuraa, että lineaarista kuvausta vastaa matriisi $\mathbf{A}$ siten, että

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Toteamme, että määritelmät 8.2.1 ja 8.2.2 ovat yhtäpitävät.

(8.2.1 $\Rightarrow$ 8.2.2): Olkoon $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ lineaarinen määritelmän 8.2.1 mielessä ja $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Merkitään kantavektoreiden kuvia seuraavasti

$$f(\mathbf{e}_i) = (\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{3i})^T$$

Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1f(\mathbf{e}_1) + x_2f(\mathbf{e}_2) + x_3f(\mathbf{e}_3) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 \\ \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 \\ \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{32}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

ja f on lineaarinen myös määritelmän 8.2.2 mielessä. Samalla osoitimme, että kuvauksen f matriisi muodostuu sarakkeista $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ ja $f(\mathbf{e}_3)$.

(8.2.1 $\Leftarrow$ 8.2.2): Seuraa matriisitulon ominaisuuksista. $\square$

Seuraavassa samaistetaan lineaarikuvaus matriisiinsa.

8.3 Matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

Jos $\mathbf{x} \neq 0$ ja on totta, että $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, niin sanomme, että reaaliluku λ on A:n ominaisarvo (eigenvalue) ja vektori $\mathbf{x}$ on A:n ominaisvektori (eigenvector). Esimerkissä 8.1.2 (sivulla 116) määritimme siirtymätodennäköisyysmatriisin ominaisarvoa 1 vastaavan ominaisvektorin.

Olkoon vektori $\mathbf{x}$ matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Silloin

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nollavektorista poikkeava ominaisvektori on siis olemassa jos ja vain, jos vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu eli jos ja vain, jos kerroinmatriisin determinantti on nolla, $\det(A - \lambda I) = 0$

Matriisin ominaisvektorien määrittäminen tehdään siten, että ensin ratkaistaan ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä $\det(A - \lambda I) = 0$ (joka on n :n asteen yhtälö) ja sitten jokaista saatua ominaisarvoa kohden ratkaistaan vastaava homogeeninen yhtälöryhmä.

Esimerkki 8.3.1: Ratkaistaan matriisin $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ominaisvektorit ja ominaisarvot.

Ratkaistaan ensin ominaisarvot karakteristisesta yhtälöstä

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 \cdot 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} &\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ tai } \lambda = -2 \end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

Kun $\lambda = 3$, niin

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 - x_2 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Siis $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$

Kun $\lambda = -2$, niin

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -2x_1 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Siis $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$

9 LINEAARIALGEBRAN SOVELLUKSIA

Tässä kappaleessa esitellään sovelluksia. Ainakin osa sovelluksista on luennoilla syytä käydä läpi niin varhain kuin se on mahdollista. Tässä opetusmonisteen kehitysversiossa ne on kuitenkin koottu samaan kappaleeseen.

9.1 Panos-tuotos -analyysi

Panos-tuotos-analyysi kehitettiin alunperin kansantaloutta silmällä pitäen. Silloin pyrittiin ennustamaan USA:n kansantalouden kehitystä. Ennusteet perustuivat edeltävinä vuosina USA:n kansantalouden rakenteesta kerättyihin tietoihin. Kävi ilmeiseksi, että vaikka kansantalouden tila muuttuisi nopeastikin, niin eräät sen rakennetta kuvaavat lukusuhteet muuttuvat silti hitaasti. Tämä antaa hyvän pohjan ennusteiden tekemiselle. Alkuperäisen kansantaloutta kuvaavan sovelluksen kehitti aikanaan amerikkalainen Wassily W. Leontief (1905-1999). (http://en.wikipedia.org/wiki/Input-output_model)

Kansantalouden rakenne

Panos-tuotos-menetelmä jakaa talouden toimialoihin ja tarkastelee sitä, miten eri toimialojen tuotokset ovat panoksia toisille toimialoille. Allaoleva panos-tuotos-matriisi (input-output-matrix) esittää taloutta joka on jaettu kolmeen toimialaan T1, T2 ja T3. Toimialaa T1 vastaava rivi kertoo, että toimialan T1 tuotoksesta 240 yksikköä on välituotteita, jotka käytetään panoksena jatkotuotantoon. 180 yksikköä T1:n tuotoksesta myydään toimialan T2 yrityksille, jotka käyttävät sen panoksena omaan tuotantonsa. 144 yksikköä T1:n tuotoksesta myydään toimialan T3 yrityksille ja 36 yksikköä toimialan T1 tuotoksesta päättyy lopputuotteena kuluttajille. Siten toimialan T1 kokonaistuotos on $240 + 180 + 144 + 36 = 600$. Toimialan T2 kokonaistuotos on vastaavasti 360 ja toimialan T3 kokonaistuotos on 480.

		käyttö/toimiala			loppu- tuotteet
		T1	T2	T3	
Tuotanto toimiala	T1	240	180	144	36
	T2	120	36	48	156
	T3	120	72	48	240
perus- panokset	p1	120	36	240	
	p2	60	18	96	

Sarakkeista voimme lukea, mistä kukin toimiala hankkii panoksensa. Peruspanokset sisältävät työn, luonnonvarat ja tarkasteltavan talouden ulkopuolelta tulevat panokset.

Seuraavassa taulukossa jätämme lopputuotteet pois ja jaamme jokaisen sarakkeen luvut saraketta vastaavan toimialan kokonaistuotannolla. Saamme kerroin-matriisin (input-output coefficients) josta näemme, mitä panoksia eri toimialat tarvitsevat valmistautsaansa yhden tuotosyksikön. Kerroin-matriisin yläosa (3×3) kuvaa eri toimialojen keskinäisiä riippuvuuksia. Muodostamme tästä talukon yläosasta matriisin **A**, jota sanomme ”toimialojen panos-tuotos -matriisiksi” tai teknologia-matriisiksi¹ (technology matrix). Taulukon alaosasta saamme ”tuotannontekijöiden panos-tuotos -matriisin” **B**, joka kertoo mitä tuotannontekijöitä tarvitaan kunkin tuotoksen tekemiseen.

	T1	T2	T3			T1	T2	T3
T1	240/600	180/360	144/480	→	T1	0.4	0.5	0.3
T2	120/600	36/360	48/480		T2	0.2	0.1	0.1
T3	120/600	72/360	48/480		T3	0.2	0.2	0.1
p1	120/600	36/360	240/480		p1	0.2	0.1	0.5
p2	60/600	18/360	96/480		p2	0.1	0.05	0.2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Merkitään toimialojen kokonaistuotoksia muuttujilla x_1 , x_2 , ja x_3 . Ja otetaan kerroin-matriisien **A** ja **B** lisäksi käyttöön kokonaistuotos-vektori $\vec{x}$ ja kysyntävektori $\vec{d}$, jotka saavat nyt arvot

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 360 \\ 480 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 36 \\ 156 \\ 240 \end{pmatrix}$$

¹Teknologia-matriisi (Technology matrix) on niin iskevä sana, että se on luultavasti keksitty ja otettu käyttöön useita kertoja hieman toisistaan poikkeavissa tarkoituksissa. Kannattaa siis olla tarkka, kun siteeraa eri tekstejä.

Kun toimiala T1 tyydyttää kaiken tuotteisiinsa kohdistuvan kysynnän, niin T1:n kokonaistuotos = T1:n tarvitsema panos + T2:n tarvitsema panos + T3:n tarvitsema panos + T1:n lopputuotteiden kysyntä. Vastaavat yhtälöt saadaan toimialojen T2 ja T3 kokonaistuotannolle. Siis

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 + 36 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 156 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 240 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{d}.$$

Saadusta matriisiyhtälöstä saadaan yhteys kokonaistuotannon ja kysynnän välille seuraavasti

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mathbf{A}\vec{x} + \vec{d} \\ \Leftrightarrow \mathbf{I}\vec{x} - \mathbf{A}\vec{x} &= \vec{d} \\ \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})\vec{x} &= \vec{d} \end{aligned}$$

Matriisi $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ on Leontief'n matriisi. Jos Leontief'n matriisi on säännöllinen, niin kokonaistuotanto saadaan kaavasta

$$\vec{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d}$$

Panos-tuotos -analyysin ydin-ajatus tiivistyy seuraavaan

- Kysyntä $\vec{d}$ voi muuttua nopeasti ja kokonaistuotanto $\vec{x}$ muuttuu vastaavasti.
- Teknologiamatriisi $\mathbf{A}$ ja vastaava Leontief'n matriisi $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ muuttuvat hitaasti, joten ne voidaan estimoida edellisen kauden tiedoista.
- Kun tiedossa on perusteltu ennuste kysynnästä $\vec{d}$ ja hyvä estimaatti Leontief'n matriisille $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, niin saamme hyvän ennusteen tuotannolle $\vec{x}$.

Esimerkki 1. Kappaleen alussa esitetyn talouden lopputuotteiden kysyntä oli $\vec{d}_0 = (36 \ 156 \ 240)^T$, Kokonaistuotanto oli $\vec{x}_0 = (600 \ 360 \ 480)^T$ ja resurssitarve-vektori oli

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \mathbf{B}\vec{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 396 \\ 174 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jos loppukysyntä muuttuu siten, että uusi kysyntävektori on $\vec{d}_1 = (77 \ 154 \ 231)$, niin muuttuneet kokonaistuotanto- ja resurssitarve-vektorit ovat

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.5 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{0.308} \begin{pmatrix} 0.79 & 0.51 & 0.32 \\ 0.20 & 0.48 & 0.12 \\ 0.22 & 0.22 & 0.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 424 \\ 187.25 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Lopputuotteiden kysynnän muutos

$$\Delta \vec{d} = \vec{d}_1 - \vec{d}_0 = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36 \\ 156 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

saa aikaan kokonaistuotannossa ja resurssitarpeessa muutokset

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 \\ 360 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92.5 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 424 \\ 187.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 396 \\ 174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 13.25 \end{pmatrix}$$

Toimialan T1 kysyntä kasvoi, mutta toimialojen T2 ja T3 kysynät pienenevät. Silti kaikkien toimialojen kokonaistuotannot kasvoivat, koska toimiala T1 ”veti kahta muuta toimialaa perässään kasvuun”. Myös kummankin peruspanoksen kulutukset kasvoivat.

Esimerkki 2. Jatkamme edelleen edeltävän talouden analyysiä. Haluamme tietää min-
kä verran lopputuotteet kuluttavat peruspanoksia.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \vec{r} &= \mathbf{B}\vec{x} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d} \\ &= \begin{pmatrix} 0.935 & 0.844 & 0.961 \\ 0.432 & 0.386 & 0.409 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0.935d_1 + 0.844d_2 + 0.961d_3 \\ r_2 = 0.432d_1 + 0.386d_2 + 0.409d_3 \end{cases}$$

Kertoimista näemme suoraan, että yksi T1:n tuotos tarvitsee 0.935 yksikköä peruspanos p1:tä ja 0.432 yksikköä peruspanos p2:ta. (Nämä ovat isompia lukuja kuin matriisin **B** perusteella osaisi odottaa!)

Omakustannusarvo

1950-luvun puolivälistä alkaen on panos-tuotos -mallia sovellettu yksittäisen yrityksen taloussuunnittelussa. Seuraavassa kuvataan juuri tällaista mikrotaloudellista sovellusta. Mallityyppi, jota käsitellään, on ns. Leontiefin avoin staattinen malli.

Mallin kohteena on yritys, joka jaetaan edelleen pienempiin alayksiköihin, joita kutsutaan seuraavassa osastoiksi. Se miten jako osastoihin suoritetaan, riippuu kulloisestakin yrityksestä. Seuraavassa oletamme osastojaon perustuvan siihen, että jokainen osasto tuottaa sille ominaista suoritetta. Suorite voi olla yrityksen myyntiohjelmaan kuuluva tuote, prosessissa edelleen jalostettava puolivalmiste tai prosessin ylläpitämiseen tarvittava energia tms. Kunkin osaston tuottama suorite voidaan käyttää kahdella eri tavalla:

- Se voidaan myydä yrityksen ulkopuolelle.
- Se voidaan käyttää muilla osastoilla tuotannontekijänä

Esimerkki 3. Tarkastellaan seuraavassa esimerkkiyritystä, jossa on neljä osastoa Os1, Os2, Os3 ja Os4, joista kukin tuottaa tiettyä suoritetta. Edellisen kauden tuotannosta ja sen jakautumisesta sekä käytetyistä tuotannontekijöistä on käytettävissä seuraavan taulukon tiedot.

Taulukon neljä ylintä riviä kertovat miten neljän osaston tuotantoa on käytetty oman ja toisten osastojen panoksina. Kuusi alinta riviä kertovat mitä muita tuotannontekijöitä osastot ovat käyttäneet panoksina.

		Os1	Os2	Os3	Os4	myynti	yhteensä
	Os1	250	100	170	80	1400	2000
	Os2	1200	700	100	2600	400	5000
	Os3	7	1	3	2	12	25
	Os4	20	35	15	30	400	500
raaka-aine 1	tt1	200	0	80	120		400
raaka-aine 2	tt2	1400	800	2300	500		5000
raaka-aine 3	tt3	400	100	0	0		500
energia	tt4	50	30	80	40		200
työvoima 1	tt5	2700	900	100	2300		6000
työvoima 2	tt6	50	80	40	130		300

Laskemme ensin teknologia-matriisin $\mathbf{A}$ ja panos-matriisin $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 250/2000 & 100/5000 & 170/25 & 80/500 \\ 1200/2000 & 700/5000 & 100/25 & 2600/500 \\ 7/2000 & 1/5000 & 3/25 & 2/500 \\ 20/2000 & 35/5000 & 15/25 & 30/500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1250 & 0.0200 & 6.8000 & 0.1600 \\ 0.6000 & 0.1400 & 4.0000 & 5.2000 \\ 0.0035 & 0.0002 & 0.1200 & 0.0040 \\ 0.0100 & 0.0070 & 0.6000 & 0.0600 \end{pmatrix},$$

$$\text{ja } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 200/2000 & 0/5000 & 80/25 & 120/500 \\ 1400/2000 & 800/5000 & 2300/25 & 500/500 \\ 400/2000 & 100/5000 & 0/25 & 0/500 \\ 50/2000 & 30/5000 & 80/25 & 40/500 \\ 2700/2000 & 900/5000 & 100/25 & 2300/500 \\ 50/2000 & 80/5000 & 40/25 & 130/500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.1000 & 0.0000 & 3.2000 & 0.2400 \\ 0.7000 & 0.1600 & 92.0000 & 1.0000 \\ 0.2000 & 0.0200 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0250 & 0.0060 & 3.2000 & 0.0800 \\ 1.3500 & 0.1800 & 4.0000 & 4.6000 \\ 0.0250 & 0.0160 & 1.6000 & 0.2600 \end{pmatrix}$$

Jos nyt kysyntä (myynti) $\vec{d}$ muuttuu, niin näiden matriisien avulla voimme nyt laskea vastaavasti muuttuneen kokonais-tuotos -vektorin $\vec{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d}$ ja muuttuneen tuotantontekijöiden tarve -vektorin $\vec{r} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d}$.

Yritys hinnoittelee eri osastojen tuotteet seuraavasti (indeksointi seuraa osastojen nu-

merointia)

$$\vec{p}^T = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4)^T = (100.00 \ 10.00 \ 2000.00 \ 150.00)^T.$$

Tuotannontekijöiden yksikköhinnat ovat (indeksointi vastaa tuotannontekijöiden numerointia)

$$\vec{c}^T = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6)^T = (70.00 \ 10.00 \ 50.00 \ 8.00 \ 15.00 \ 25.00)^T.$$

Yrityksen kate saadaan selville, kun lasketaan tuotteiden euromääräiset myyntituotot ja tuotannontekijöiden ostot

		myynti(kpl)	yks.hinta	myynti(€)	yhteensä
tuote1	Os1	1400	100	140 000	
tuote2	Os2	400	10	4 000	
tuote3	Os3	12	2000	24 000	
tuote4	Os4	400	150	60 000	228 000
		ostot(kpl)	yks.hinta	ostot(€)	yhteensä
raaka-aine 1	tt1	400	70	28 000	
raaka-aine 2	tt2	5000	10	50 000	
raaka-aine 3	tt3	500	50	25 000	
energia	tt4	200	8	1 600	
työvoima 1	tt5	6000	15	90 000	
työvoima 2	tt6	300	25	7 500	202 100

Yrityksen myyntikate on

$$\frac{228\,000 - 202\,100}{228\,000} \cdot 100\% = 11.35\%$$

Seuraavana vuonna kysynnän rakenne muuttuu siten, että tuotteen 1 kysyntä pienenee ja tuotteen 4 kysyntä kasvaa niin, että uusi kysyntä-vektori on

$$\vec{d}_{uusi} = (500 \ 400 \ 12 \ 1300)^T.$$

Tuotannontekijöiden tarve -vektori on uudessa tilanteessa

$$\vec{r}_{uusi} = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d}_{uusi} = (578.2 \ 6666 \ 471.2 \ 304.8 \ 10635 \ 634.1)^T.$$

Uusi katelaskelma on

		myynti(kpl)	yks.hinta	myynti(€)	yhteensä
tuote1	Os1	500	100	50 000	
tuote2	Os2	400	10	4 000	
tuote3	Os3	12	2000	24 000	
tuote4	Os4	1300	150	195 000	273 000
		ostot(kpl)	yks.hinta	ostot(€)	yhteensä
raaka-aine 1	tt1	578.2	70	40 476	
raaka-aine 2	tt2	6666.2	10	66 662	
raaka-aine 3	tt3	471.2	50	23 561	
energia	tt4	304.8	8	2 438	
työvoima 1	tt5	10635.0	15	159 526	
työvoima 2	tt6	634.1	25	15 853	308 516

Kysynnän rakenteen muuttuminen pilasi kannattavuuden. Tämä johtui tietenkin siitä, että tuotteet oli hinnoiteltu huonosti. Tuotetta 1 myytiin ylihintaan ja tuotetta 4 myytiin alihintaan. Kun ylihintaisen myynnin osuus pieneni ja alihintaisen myynnin osuus kasvoi, niin kate romahti.

Seuraavaksi laskemme tuotteille omakustannusarvot. Periaate on seuraava.

$$\begin{aligned}\text{Tuotto} = R &= \vec{p}^T \vec{d} \\ \text{Kustannus} = C &= \vec{c}^T \vec{r} = \vec{c}^T \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{d}\end{aligned}$$

Jos nyt asetamme

$$\vec{p}^T = \vec{c}^T \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1},$$

niin riippumatta kysynnän rakenteesta tuotto riittää kustannusten peittämiseen. Omakustannus -arvot edellisen yrityksen tapauksessa ovat

$$\vec{p}^T = \vec{c}^T \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (69.35 \quad 10.32 \quad 2153.50 \quad 187.59).$$

Omakustannushintoihin vielä lisätään haluttun kateprosentin (esim. 15%) suuruinen korotus, jolloin hinnoiksi tulee

$$\begin{aligned}\vec{p}^T &= 1.15 \cdot \vec{c}^T \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (79.75 \quad 11.87 \quad 2476.48 \quad 215.73) \\ &\approx (80.00 \quad 11.85 \quad 2475.00 \quad 216.00).\end{aligned}$$

Näillä hinnoilla edelliset kaksi katelaskelmaa menevät seuraaviin muotoihin

		myynti(kpl)	yks.hinta	myynti(€)	yhteensä
tuote1	Os1	1400	80.00	112 000	
tuote2	Os2	400	11.85	4 740	
tuote3	Os3	12	2475.00	29 700	
tuote4	Os4	400	216.00	86 400	232 840
		ostot(kpl)	yks.hinta	ostot(€)	yhteensä
raaka-aine 1	tt1	400	70	28 000	
raaka-aine 2	tt2	5000	10	50 000	
raaka-aine 3	tt3	500	50	25 000	
energia	tt4	200	8	1 600	
työvoima 1	tt5	6000	15	90 000	
työvoima 2	tt6	300	25	7 500	202 100

		myynti(kpl)	yks.hinta	myynti(€)	yhteensä
tuote1	Os1	500	80.00	40 000	
tuote2	Os2	400	11.85	4 740	
tuote3	Os3	12	2475.00	29 700	
tuote4	Os4	1300	216.00	280 800	355 240
		ostot(kpl)	yks.hinta	ostot(€)	yhteensä
raaka-aine 1	tt1	578.2	70	40 476	
raaka-aine 2	tt2	6666.2	10	66 662	
raaka-aine 3	tt3	471.2	50	23 561	
energia	tt4	304.8	8	2 438	
työvoima 1	tt5	10635.0	15	159 526	
työvoima 2	tt6	634.1	25	15 853	308 516

Nyt kate on halutun suuruinen riippumatta kysynnän rakenteesta. Tämä on tietenkin vasta lähtökohta laajemmalle analyysille, jossa huomioidaan myös markkinoiden kysyntäpuoli. Seuraavassa muutama helppo periaate:

- Tuotetta ei kannata valmistaa, jos se pitää myydä alle omakustannusarvon.
- Jos voitonmaksimointi -tarkastelu johtaa oleellisesti omakustannusarvoa korkeampaan hintaan, niin tuote on ”lypsylehmä” ja sitä tulee lypsää.
- Lypsylehmät houkuttelevat alalle uusia toimijoita, jolloin kilpailu kiristyy.
- Kilpailun kiristyessä tulee huolehtia kustannusten minimoinnista ja hinnoittelun tarkkuudesta.
- Uuden tuotteen tapauksessa tuotetta voidaan myydä alle omakustannusarvon, jos sillä tavoin saadaan vallattua markkinoita, ja jos uskotaan, että tulevaisuudessa tuote voidaan hinnoitella kalliimmaksi tai tuotantokustannukset saadaan painettua alemmiksi niin, että tuotteesta tulee lypsylehmä.

- Hinnoittelu on käytännössä dynaaminen prosessi, jossa ratkaisevinta ei ole tämänhetkinen kate, vaan tuotannosta nyt ja tulevaisuudessa saatava nettotulovirta.