

# Matriisin käänteismatriisi, L21

## Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Erikoistapaus:  
 $2 \times 2$

Matriisin käänteismatriisi

Käänteismatriisin määrittäminen

Erikoistapaus:  $2 \times 2$

Reaalilukujen tapauksessa luvun  $a \neq 0$  käänteisluku  $1/a = a^{-1}$  on sellainen luku, että

$$a^{-1} \cdot a = 1 \quad \text{ja} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

(missä  $1$  = kertolaskun neutraalialkio).

Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla  $0$ :sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia.

**Määritelmä:** Neliömatriisi  $A$  on **säännöllinen**, jos on olemassa **käänteismatriisi**  $A^{-1}$  siten, että

$$A^{-1}A = I \quad \text{ja} \quad AA^{-1} = I.$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Erikoistapaus:  
 $2 \times 2$

$$\text{Jos } Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ niin } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix},$$

sillä

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ \phantom{2x} 2y + \phantom{1}z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow Q\vec{x} = \vec{b}$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} = Q^{-1}\vec{b}$$

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ \phantom{2x} 2y + \phantom{1}z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases} \Leftrightarrow Q\vec{x} = \vec{b}$$

ratkaisu on siis

$$\vec{x} = Q^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kaksi kysymystä:

- ▶ (1) Mistä tietää onko kerroinkaavio säännöllinen?
- ▶ (2) Mistä saadaan käänteismatriisi?

Ensimmäinen vastaus kysymykseen (2) on seuraavassa.  
(Perustelu luennolla)

Matriisin  $A$  käänteismatriisin määrittäminen:

- ▶ (1) Muodosta kaksiosainen leveä kaavio

$$(A|I)$$

jonka vasen osa on käännettävä matriisi ja oikea puolki on saman kokoinen yksikkömatriisi.

- ▶ (2) Tee kaaviolle rivioperaatioita niin, että vasen puoli muuttuu yksikkömatriisiksi.
- ▶ (3) Kun vasen puoli on yksikkömatriisi, niin oikea puoli on  $A^{-1}$ .
- ▶ (\*) (Jos vaihetta (3) ei voi saavuttaa, niin matriisi ei ole säännöllinen.)

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Erikoistapaus:  
 $2 \times 2$

Määritä käänteismatriisi  $A^{-1}$ , kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ vaihda rivit 1 ja 3} \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \end{array} \right| \cdot (-1) \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminenErikoistapaus:  
 $2 \times 2$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} + \\ \cdot 2 \\ - \end{array} \right| \cdot 0.5$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & -3.5 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} + \\ - \\ \cdot 1 \end{array} \right| \cdot 2$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 4 \end{array} \right)$$

Siis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Erikoistapaus:  
 $2 \times 2$



Esimerkki jatkuu

Tarkistus:

$$\text{Jos } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ja } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

niin

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisi

Käänteismatriisin  
määrittäminen

Erikoistapaus:  
 $2 \times 2$

Tärkeä erikoistapaus:  $2 \times 2$  -matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Oletamme nyt, että  $ad - bc \neq 0$ . Laskemme käänteismatriisin yleisessä tapauksessa. Jos lasku onnistuu, niin käänteismatriisi on olemassa aina, kun  $ad - bc \neq 0$ .

# Erikoistapaus: $2 \times 2$

10

kun  $a \neq 0$  ja  $D = ad - bc \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot a \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array} \right) \begin{array}{c} \star c \\ - \end{array} \cdot (ad - bc)/a \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} (ad - bc) & (ad - bc) \cdot \frac{b}{a} & (d - bc/a) & 0 \\ 0 & (ad - bc) & -c & a \end{array} \right) \begin{array}{c} - \\ \star b/a \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} ad - bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right) \begin{array}{c} : (ad - bc) \\ : (ad - bc) \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array} \right), \quad \text{missä } D = ad - bc \end{aligned}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminenErikoistapaus:  
 $2 \times 2$

kun  $a \neq 0$ Tapauksessa  $a \neq 0$  saimme siis kaavan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esimerkki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminenErikoistapaus:  
 $2 \times 2$

# Erikoistapaus: $2 \times 2$

12

kun  $a = 0$ ,  $D = 0 \cdot d - bc \neq 0 \Rightarrow c \neq 0, d \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \Bigg| \text{vaihda rivit} \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} \cdot b \\ \cdot c \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} bc & bd & 0 & b \\ 0 & bc & c & 0 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} - \\ \cdot d/c \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} bc & 0 & -d & b \\ 0 & bc & c & 0 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{l} : bc \\ : bc \end{array} \\ \sim & \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{array} \right) \end{aligned}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminenErikoistapaus:  
 $2 \times 2$

kun  $a \neq 0$ 

Tapauksessa  $a = 0$  saimme siis saman kaavan kuin edellä

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esimerkki:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 \\ 3/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 \\ 3/6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 \\ 3/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aiheet

Matriisin  
käänteismatriisiKäänteismatriisin  
määrittäminenErikoistapaus:  
 $2 \times 2$