

Raja-arvo ja jatkuvuus, derivaatta

Kauhava pe 17.12.2010

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-funktion derivaatta

Linkkejä

- ▶ <http://fi.wikipedia.org/wiki/Raja-arvo>
- ▶ <http://fi.wikipedia.org/wiki/Derivaatta>
- ▶ etalukio
- ▶ maths online / derivaatta

Raja-arvo

Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

arvoa ei voi laskea, kun $x = 2$.

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Raja-arvo

Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

arvoa ei voi laskea, kun $x = 2$.

Jos x eroaa kahdesta ($x \neq 2$), niin funktion arvo voidaan laskea ja seuraavasta taulukosta nähdään, että arvot ovat sitä lähempänä 4:ää mitä lähempänä x on 2:ta.

x	$f(x)$
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
2.000	—
2.001	4.001
2.01	4.01
2.1	4.1

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

arvoa ei voi laskea, kun $x = 2$.

Jos x eroaa kahdesta ($x \neq 2$), niin funktion arvo voidaan laskea ja seuraavasta taulukosta nähdään, että arvot ovat sitä lähempänä 4:ää mitä lähempänä x on 2:ta.

x	$f(x)$
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
2.000	—
2.001	4.001
2.01	4.01
2.1	4.1

Nyt merkitään

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Lue: " Raja-arvo, kun x lähestyy 2:ta, lausekkeesta $(x^2 - 4)/(x - 2)$ on 4."

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Toinen paljon käytetty merkintätapa on

$$f(x) \longrightarrow 4, x \rightarrow 2,$$

tai

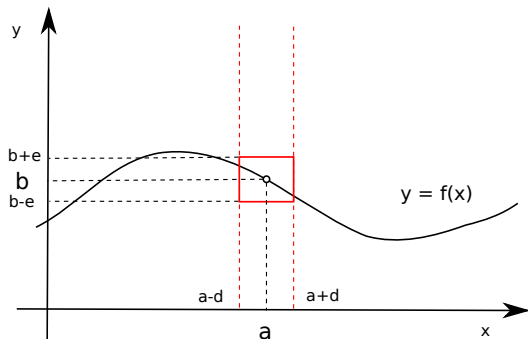
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 4.$$

Lue: "f(x) lähestyy 4:ää, kun x lähestyy 2:ta"

Raja-arvo

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, jos jokaiselle $e > 0$ on olemassa vastaava $d > 0$ siten, että

$$(|x - a| < d) \Rightarrow (|f(x) - b| < e).$$



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1}$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1}$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3) \cdot 1}$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{1}$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{1} = 9$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{1} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Esimerkkejä raja-arvon laskemisesta

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{1} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

Laske seuraavat raja-arvot

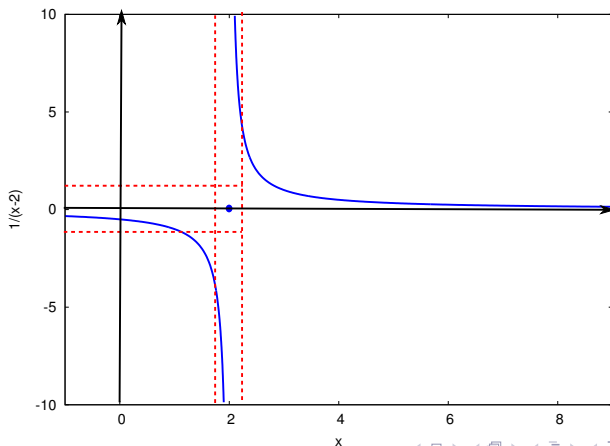
$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 5x} \right) =$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 5} \right) =$$

Raja-arvoa ei aina ole olemassa. Esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} f(x) &= \frac{1}{x-2}, \text{ kun } x \neq 2, \\ f(2) &= 0 \end{cases}$$

ei ole raja-arvoa 2:ssa.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa $x = a$, jos

- ▶ funktion arvo kohdassa $x = a$, eli $f(a)$, on hyvin määritelty (laskettavissa)
- ▶ funktion raja-arvo kohdassa $x = a$, eli $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, on olemassa,
- ▶ arvo ja raja-arvo ovat samat, eli

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä (a, b) , jos se on jatkuva jokaisessa välin (a, b) pisteessä.

Jatkuvuus

Havainnollinen kuvailu: Funktio $f(x)$ on jatkuva, jos sen kuvaaja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista.

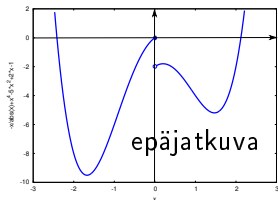
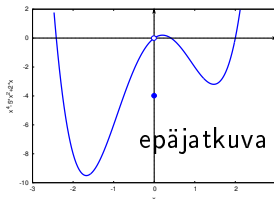
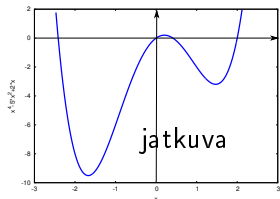
Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

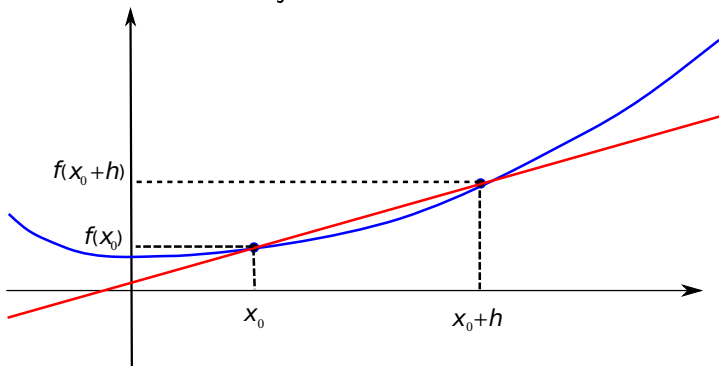
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta



Derivaatta

Tarkastellaan funktion arvoja kohdissa x_0 ja $x_0 + h$. Kuvaajan pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ kautta kulkeva suora on ”melkein kuvaajan suuntainen”.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

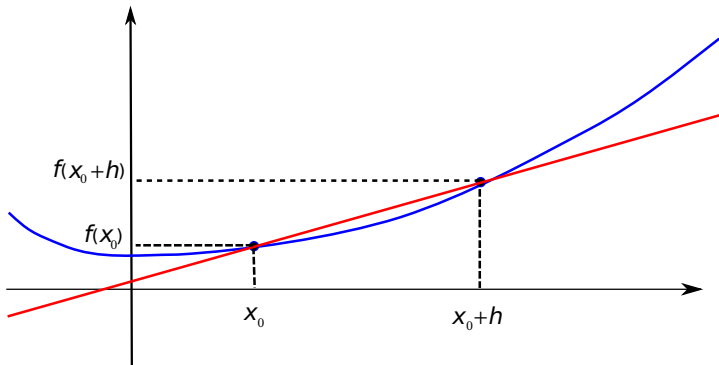
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Derivaatta

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan kuvaajan tangentti.

Ks. myös [maths online](#) / derivaatta.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

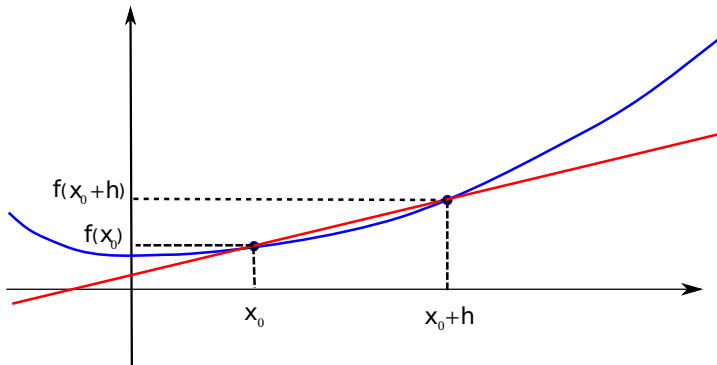
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Derivaatta

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan kuvaajan tangentti.

Ks. myös [maths online](#) / derivaatta.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

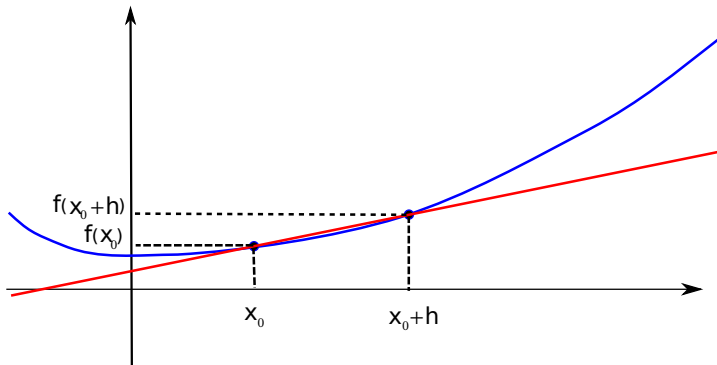
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Derivaatta

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan kuvaajan tangentti.

Ks. myös [maths online](#) / derivaatta.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

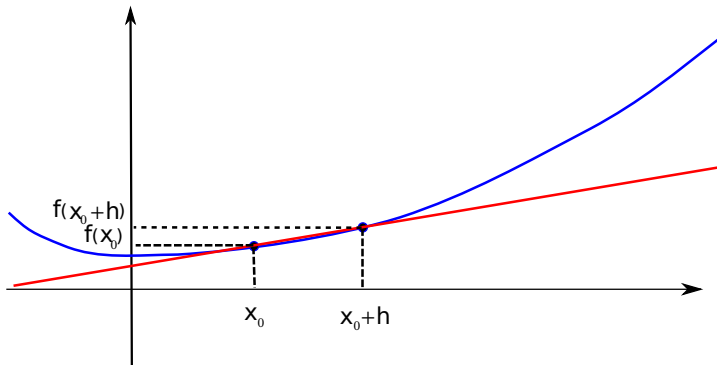
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Derivaatta

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan kuvaajan tangentti.

Ks. myös [maths online](#) / derivaatta.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

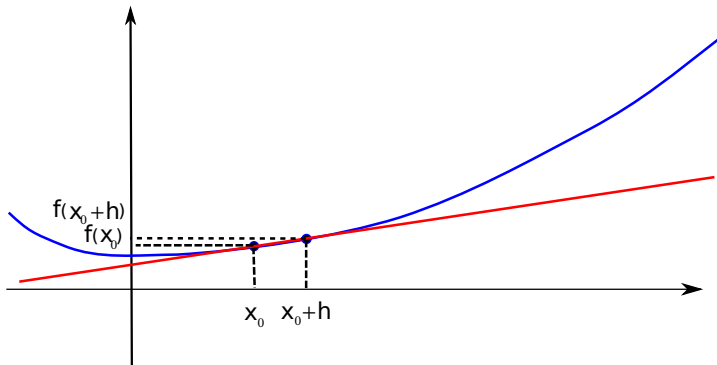
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Derivaatta

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan kuvaajan tangentti.

Ks. myös [maths online](#) / derivaatta.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

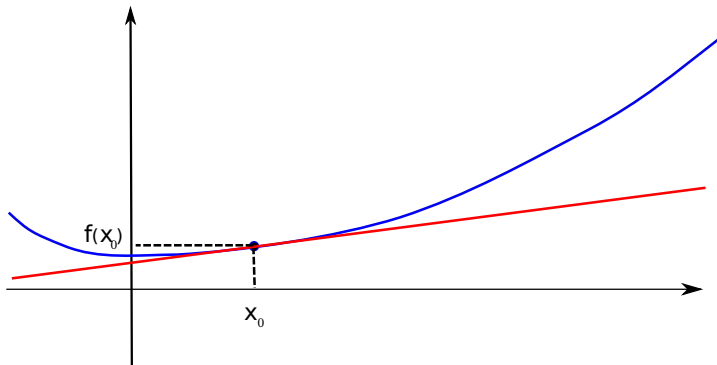
Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Derivaatta

Kun $h \rightarrow 0$, saadaan kuvaajan tangentti.

Ks. myös [maths online](#) / derivaatta.



Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on funktion erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}.$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on funktion erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}.$$

Derivaatalle käytetään monia merkintöjä. Jos $y = f(x)$, niin merkinnän $f'(x)$ lisäksi käytetään merkintöjä

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, Df(x), Df, \frac{d}{dx}f(x)$$

Esimerkki 1

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 1

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 1

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 - ax_0^2}{h} \end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 1

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 - ax_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah)}{h} \end{aligned}$$

Esimerkki 1

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 - ax_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah)\end{aligned}$$

Esimerkki 1

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 - ax_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah) = 2ax_0\end{aligned}$$

Esimerkki 1

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Määritetään funktion $f(x) = ax^2$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^2 + 2ax_0h + ah^2 - ax_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax_0 + ah)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax_0 + ah) = 2ax_0\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx}(ax^2) = 2ax$$

Esimerkki 2*

Lause: Jos $n > 0$ on kokonaisluku, niin

$$(x + h)^n = x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + h \cdot P_n(x, h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} P_n(x, h) = 0$.

Todistus:

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 2*

Lause: Jos $n > 0$ on kokonaisluku, niin

$$(x + h)^n = x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + h \cdot P_n(x, h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} P_n(x, h) = 0$.

Todistus: (1) Väite pitää paikkansa, kun $n = 1$ sillä

$$(x + h)^1 = x^1 + 1 \cdot h \cdot x^0 + h \cdot 0$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 2*

Lause: Jos $n > 0$ on kokonaisluku, niin

$$(x + h)^n = x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + h \cdot P_n(x, h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} P_n(x, h) = 0$.

Todistus: (1) Väite pitää paikkansa, kun $n = 1$ sillä

$$(x + h)^1 = x^1 + 1 \cdot h \cdot x^0 + h \cdot 0$$

(2) Olkoon lause totta, kun $n = 1, 2, \dots, k$. Silloin

$$\begin{aligned}(x + h)^{k+1} &= (x + h)(x^k + khx^{k-1} + hP_k(x, h)) \\ &= x^{k+1} + (k + 1)hx^{k-1} + h[P_k(x, h) \cdot (x + h)]\end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 2*

Lause: Jos $n > 0$ on kokonaisluku, niin

$$(x + h)^n = x^n + n \cdot h \cdot x^{n-1} + h \cdot P_n(x, h),$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} P_n(x, h) = 0$.

Todistus: (1) Väite pitää paikkansa, kun $n = 1$ sillä

$$(x + h)^1 = x^1 + 1 \cdot h \cdot x^0 + h \cdot 0$$

(2) Olkoon lause totta, kun $n = 1, 2, \dots, k$. Silloin

$$\begin{aligned}(x + h)^{k+1} &= (x + h)(x^k + khx^{k-1} + hP_k(x, h)) \\ &= x^{k+1} + (k + 1)hx^{k-1} + h[P_k(x, h) \cdot (x + h)]\end{aligned}$$

$\therefore$ Lause on tosi $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. □

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x, h) - ax_0^n}{h} \end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x, h) - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nax_0^{n-1} + aP_n(x, h))}{h}\end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x, h) - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nax_0^{n-1} + aP_n(x, h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (nax_0^{n-1} + aP_n(x, h))\end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x, h) - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nax_0^{n-1} + aP_n(x, h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (na x_0^{n-1} + aP_n(x, h)) \\&= na x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Esimerkki 3

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Määritetään funktion $f(x) = ax^n$ derivaatta

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h)^n - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0^n + anhx_0^{n-1} + ahP_n(x, h) - ax_0^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nax_0^{n-1} + aP_n(x, h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (na x_0^{n-1} + aP_n(x, h)) \\&= na x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = na x^{n-1}$$

Polynomi-funktion derivaatta

On helppoa ja suoraviivaista osoittaa, että

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Polynomi-funktion derivaatta

On helppoa ja suoraviivaista osoittaa, että

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$

Siis: Polynomi-funktio derivoidaan termi kerrallaan kaavalla

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}.$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Polynomi-funktion derivaatta

On helppoa ja suoraviivaista osoittaa, että

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x).$$

Siis: Polynomi-funktio derivoidaan termi kerrallaan kaavalla

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}.$$

Kannattaa muistaa erikoistapaukset:

$$(n = 1) : \quad \frac{d}{dx}(ax) = a,$$

$$(n = 0) : \quad \frac{d}{dx}(a) = 0.$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Polynomi-funktion derivaatta, esimerkki

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$
$$\Leftrightarrow f'(x) =$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Polynomi-funktion derivaatta, esimerkki

$$\begin{aligned}(1) \quad & f(x) = 3x^2 + 7x + 15 \\ & \Leftrightarrow f'(x) = 6x\end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

Polynomi-funktion derivaatta, esimerkki

$$\begin{aligned}(1) \quad & f(x) = 3x^2 + 7x + 15 \\ & \Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7\end{aligned}$$

Aiheet

Raja-arvo

Jatkuvuus

Derivaatta

Polynomi-
funktion
derivaatta

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) =$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20$$

$$(3) \quad h(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow h'(x) =$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20$$

$$(3) \quad h(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = -3x^2$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20$$

$$(3) \quad h(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = -3x^2 + 8x$$

$$(1) \quad f(x) = 3x^2 + 7x + 15$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 6x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 20x + 1$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 14x - 20$$

$$(3) \quad h(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = -3x^2 + 8x + 2$$

Kirjoita seuraavien polynomifunktioiden derivaatat

$$(1) \quad f(x) = 4x^2 - 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow f'(x) =$$

$$(2) \quad g(x) = 3x^5 + 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 9$$

$$\Leftrightarrow g'(x) =$$

$$(3) \quad h(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 2$$

$$\Leftrightarrow h'(x) =$$