

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Yleistä, LP-malleista

Esimerkki, "Giapetto"

Graafisen ratkaisun vaiheet

Optimin olemassaolo

- ▶ LP-mallit on yksi "Operaatioanalyysin" (Operations Research) perustyökaluista.
- ▶ Perusongelma: "Miten pitää suorittaa operaatio mahdollisimman hyvin, kun käytettävissä on rajalliset resurssit?" (max tai min)
- ▶ Jatko-ongelma: "Miten optimi muuttuu, jos jokin mallin parametri muuttuu?"
- ▶ Jatko-ongelma 2: "Mitä enintään kannattaa maksaa yhdestä lisäresurssista?"

Giapetto's Woodcarving inc. valmistaa kahdenlaisia puuleluja: **sotilaita** ja **junia**.

Tavoitefunktio.

Sotilaan myyntihinta on 27€, ja siihen kuluu materiaalia 10€edestä. Jokainen valmistettu sotilas aiheuttaa lisäksi muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksia keskimäärin 14€edestä. **Junan** myyntihinta on 21€, ja siihen kuluu 9€edestä materiaalia. Muuttuvia palkka- ja yleiskustannuksia jokainen juna aiheuttaa keskimäärin 10€.

Rajoitteet. Resurssien kulutus.

Sotilaiden ja junien valmistus tapahtuu kahdella osastolla: **puutyöosastolla** ja **viimeistelyosastolla**. Yksi sotilas vaatii 1 tunnin puutyötä ja 2 tuntia viimeistelyä. Vastaavasti yksi juna vaatii 1 tunnin puutyötä ja 1 tunnin viimeistelyä.

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Rajoitteet. Olemassaolevat resurssit.

Yritys pystyy hankkimaan kaiken tarvitsemansa materiaalin, mutta puutyö- ja viimeistelyosastojen kapasiteetti on rajallinen. Käytettävissä on 80 tuntia puutyötä per viikko, ja 100 tuntia viimeistelytyötä per viikko.

Rajoitteet. Lisäajoitteet.

Lelujen kysynnästä tiedetään, että junien kysyntä on käytännössä rajoittamaton, mutta sotilaita saadaan kaupaksi korkeintaan 40 per viikko.

Kysymys:

Miten yritys voi maksimoida katetuottoonsa? Muodostetaan ongelmasta LP-malli.

Aiheet

Yleistä,
LP-malleistaEsimerkki,
"Giapetto"Graafisen ratkaisun
vaiheetOptimin
olemassaolo

(1) Päästömuuttujat

x_1 = puusotilaiden valmistus (kpl/viikko)

x_2 = puujunien valmistus (kpl/viikko)

(2) Tavoitefunktio

Muodostamme tavoitefunktion $z(x_1, x_2)$, jolle etsimme suurinta mahdollista arvoa. Tavoitefunktio on nyt katetuotto.

$$\begin{aligned} z &= R(x_1, x_2) - C(x_1, x_2) \\ &= \overbrace{(27x_1 + 21x_2)}^{\text{tuotto}} - \left(\overbrace{(10x_1 + 9x_2)}^{\text{kustannus}} + \overbrace{(14x_1 + 10x_2)}^{\text{kustannus}} \right) \\ &\quad \text{materiaali} \quad \text{palkat yms.} \\ &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

(3) Rajoitteet

Selvitämme jokaisen tuotantoa rajoittavan tekijän erikseen

- ▶ Puutyö: resurssitarve = $1x_1 + 1x_2$ (h/viikko)
Käytettävissä oleva resurssi = 80 (h/viikko)
→ 1. rajoite: $x_1 + x_2 \leq 80$
- ▶ Viimeistelytyö: resurssitarve = $2x_1 + 1x_2$ (h/viikko)
Käytettävissä oleva resurssi = 100 (h/viikko)
→ 2. rajoite: $2x_1 + x_2 \leq 100$
- ▶ Kysyntärajoite:
→ 3. rajoite: $x_1 \leq 40$
- ▶ Merkkirajoitteet:
→ 4. rajoite: $x_1 \geq 0$
→ 5. rajoite: $x_2 \geq 0$

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Aiheet

Yleistä,
LP-malleistaEsimerkki,
"Giapetto"Graafisen ratkaisun
vaiheetOptimin
olemassaolo

(4) LP-malli

Kootaan kaikki oleellinen siistiksi paketiksi

$$\begin{array}{llllll} \max & z & = & 3x_1 & + & 2x_2 \\ \text{ehdoin} & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\ & & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ & & & x_1 & & & \leq & 40 \\ & & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(5) Graafinen ratkaisu

Aloitetaan tarkastelu ensimmäisestä rajoitteesta

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

Jos kiinnitämme x_1 :n arvon (esim. $x_1 = 50$), niin emme saa antaa x_2 :lle liian suurta arvoa. x_2 tulee olla **pienempi tai yhtä suuri kuin** $80 - x_1$ (esim. $x_2 \leq 80 - 50 = 30$).

(x_1, x_2) -tasossa tulee pisteen olla siis suoran $x_1 + x_2 = 80$ **alapuolella**.

Piirrämme suoran tasoon. Sitä varten selvitämme kaksi suoran pistettä

$$A = (0, 80), \quad \text{ja} \quad B = (80, 0)$$

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

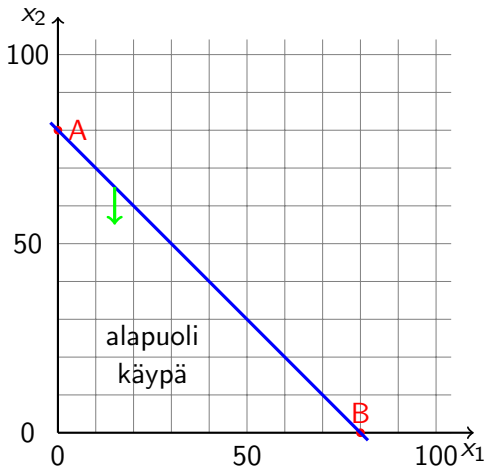
Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Ensimmäinen rajoite:

$$x_1 + x_2 \leq 80 \quad \text{alapuoli} \quad A = (0, 80), \quad B = (80, 0)$$



Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

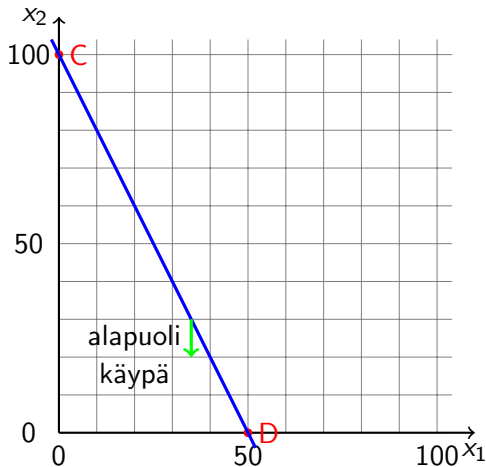
Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Toinen rajoite:

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \quad \text{alapuoli} \quad C = (0, 100), \quad D = (50, 0)$$



Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

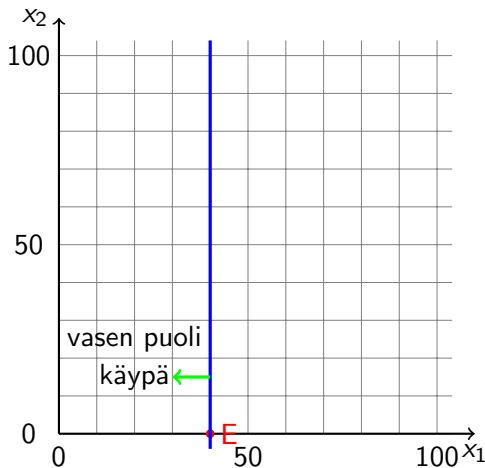
Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Kolmas rajoite:

$$x_1 \leq 40 \quad \text{vasen puoli} \quad E = (40, 0)$$



Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

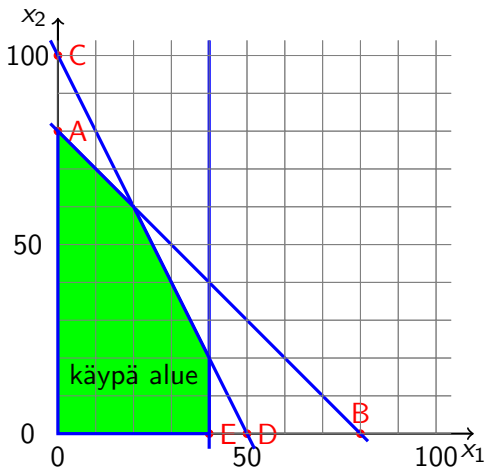
Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

- ▶ Lopuksi piirrämme kaikki suorat samaan kuvaan.
- ▶ Huomaa, että merkkirajoitteet kieltävät pystyakselin vasemman puolen (x_2 -akseli) sekä vaaka-akselin alapuolen (x_1 -akseli).

$x_1 + x_2 \leq 80$	alapuoli	$A = (0, 80),$	$B = (80, 0)$
$2x_1 + x_2 \leq 100$	alapuoli	$C = (0, 100),$	$D = (50, 0)$
$x_1 \leq 40$	vasen puoli	$E = (40, 0)$	



Aiheet

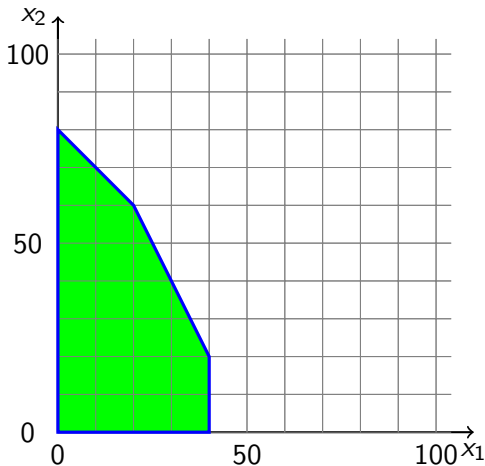
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Seuraavaksi haemme käyvästä alueesta parhaan pisteen.



Merkitsemme kuvaan pisteet, joissa $z = 3x_1 + 2x_2 = 90$.

Aiheet

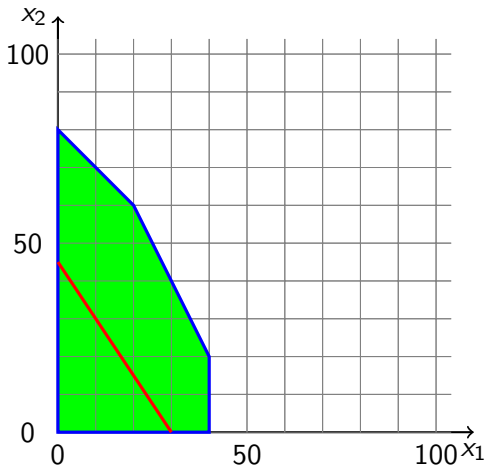
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Seuraavaksi haemme käyvästä alueesta parhaan pisteen.



Merkitsemme kuvaan pisteet, joissa $z = 3x_1 + 2x_2 = 90$.

Aiheet

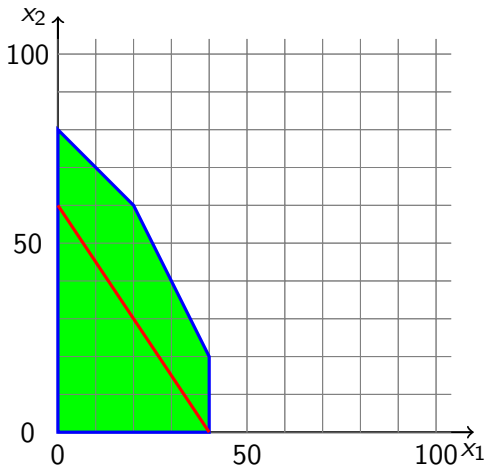
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Seuraavaksi haemme käyvästä alueesta parhaan pisteen.



Merkitsemme kuvaan pisteet, joissa $z = 3x_1 + 2x_2 = 120$.

Aiheet

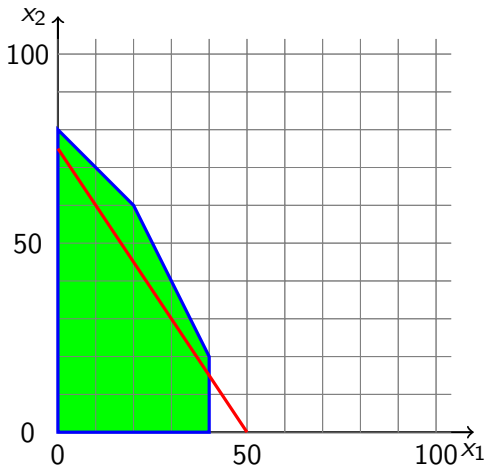
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Seuraavaksi haemme käyvistä alueesta parhaan pisteen.



Merkitsemme kuvaan pisteet, joissa $z = 3x_1 + 2x_2 = 150$.

Aiheet

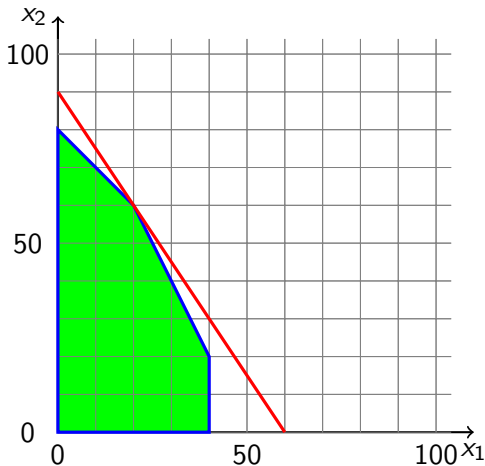
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Seuraavaksi haemme käyvästä alueesta parhaan pisteen.



Merkitsemme kuvaan pisteet, joissa $z = 3x_1 + 2x_2 = 180$.

Aiheet

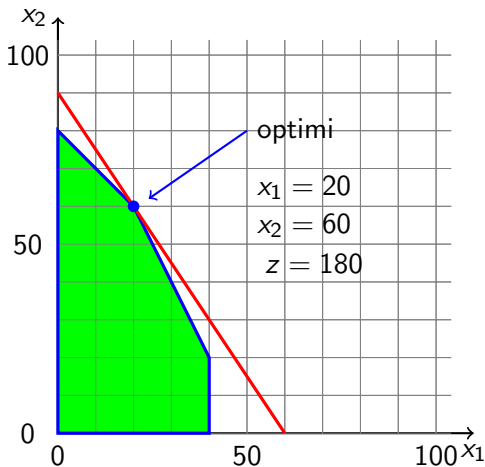
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Seuraavaksi haemme käyvästä alueesta parhaan pisteen.



Merkitsemme kuvaan pisteet, joissa $z = 3x_1 + 2x_2 = 180$.

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

- ▶ Käy läpi rajoitteet
 1. kaksi pistettä rajoitesuoralta
 2. mikä puoli käypä
- ▶ Piirrä koordinaatisto
- ▶ Piirrä rajoitesuorat ja käypä alue. Merkitse käypä alue kuvaan.
- ▶ Piirrä tavoitesuora jollakin z :n arvolla
- ▶ Päättele optimipiste
- ▶ Kirjoita vastaus

Aiheet

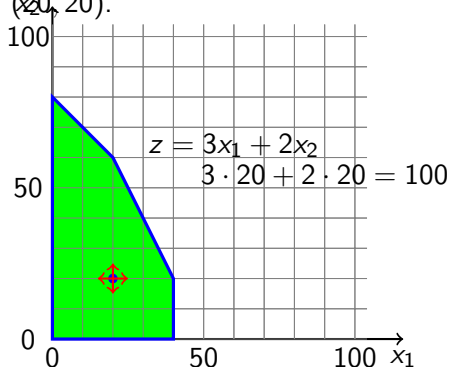
Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Tarkastellaan Giapetton esimerkin käyvän alueen sisä-pistettä $(20, 20)$.



Pistettä voidaan siirtää vähän oikealle tai vasemmalle tai vähän ylöspäin tai alaspäin. Jokin näistä siirroksista parantaa tavoitefunktion arvoa. $\Rightarrow$ Optimi ei ole sisäpisteessä vaan REUNALLA.

Aiheet

Yleistä,
LP-malleistaEsimerkki,
"Giapetto"Graafisen ratkaisun
vaiheetOptimin
olemassaolo

Optimin olemassaolon suhteen on olemassa neljä vaihtoehtoista tilannetta.

- ▶ **Yksikäsitteinen ratkaisu.** Ongelmalla yksi optimaalinen ratkaisu. (Esim Giapetto'n ongelma edellä.)
- ▶ **Ääretön määrä optimeja.** Suuri määrä keskenään yhtä hyviä optimaalisia ratkaisuja. (Esim. 2 alla)
- ▶ **Rajoittamaton optimi.** Tavoitefunktion arvo saadaan miten suureksi tahansa (Esim. 3 alla)
- ▶ **Käypä alue on tyhjä.** Ongelmalle ei ole edes huonoa ratkaisua. (Esim. 4 alla)

Aiheet

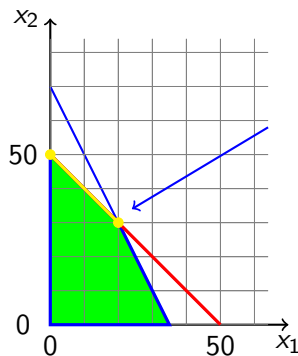
Yleistä,
LP-malleistaEsimerkki,
"Giapetto"Graafisen ratkaisun
vaiheetOptimin
olemassaolo

Optimin olemassaolo (ääretön määrä optimeja) 22

Jos tavoitesuora on yhdensuuntainen jonkin rajoitesuoran kanssa tapahtuu usein, että kaksi tai useampia nurkkapisteitä ovat optimaalisia.

Esim. 2. LP-malli

$$\begin{array}{llll} \max z & = & 5x_1 & + & 5x_2 \\ \text{s.t.} & & x_1 & + & x_2 \leq 50 \\ & & 2x_1 & + & x_2 \leq 70 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



optimi

$$\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 20 \\ x_2 = 50 - x_1 \\ z = 250 \end{array}$$

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

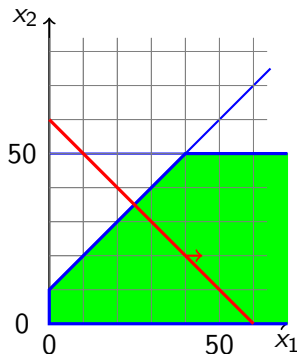
Optimin
olemassaolo

Jos käypä alue "vuotaa" äärettömiin, voi käydä niin, että tavoitefunktion arvoa voidaan parantaa loputtomasti.

Esim. 3. LP-malli

$$\begin{array}{ll}\max z = & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

"rajoittamaton optimi"
engl. "unbounded optimum"



Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

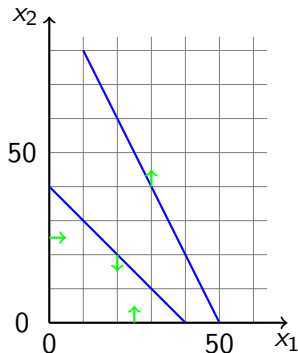
Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo

Jos rajoitteet ovat ristiriitaiset niin ongelmalle ei löydy yhtään käypää ratkaisua.

Esim. 4. LP-malli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 \leq 40 \\ &2x_1 + x_2 \geq 100 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



"käypä alue on tyhjä"
engl. "no feasible solution"

Aiheet

Yleistä,
LP-malleista

Esimerkki,
"Giapetto"

Graafisen ratkaisun
vaiheet

Optimin
olemassaolo